



## ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DAS TENSÕES INDUZIDAS PELA PRESENÇA DE ARMADURA NA EXPANSÃO DEVIDO À REAÇÃO ÁLCALI-AGREGADO

**Mariana Corrêa Posterlli**

**Rogério Carrazedo**

mariana.posterlli@usp.br

rogcarrazedo@sc.usp.br

Universidade de São Paulo - USP; Escola de Engenharia de São Carlos - EESC

Av. Trabalhador São-carlense, 400, 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil

**Resumo.** A reação álcali-agregado (RAA) é uma reação química complexa e tem como produto um gel higroscópico que expande quando em contato com a água, causando fissuração e afetando importantes propriedades mecânicas do concreto. Entretanto, sob tensão de compressão, seja aplicada ou induzida pela presença de armadura, a expansão é reduzida na direção comprimida. Uma boa ferramenta para a previsão da vida útil de estruturas afetadas pela RAA é a modelagem numérica da expansão do concreto possibilitando a previsão e projeto de reparos necessários. Nesse contexto, essa pesquisa desenvolve um modelo macroscópico paramétrico com o objetivo de estudar tensões induzidas pela presença de armadura na expansão do concreto sujeito à RAA. Os resultados obtidos pelo modelo numérico foram comparados com dados experimentais e mostraram bons resultados na previsão da expansão de estruturas de concreto armado.

**Palavras-chave:** Reação álcali-agregado, modelo paramétrico, concreto armado, método dos elementos finitos posicional.

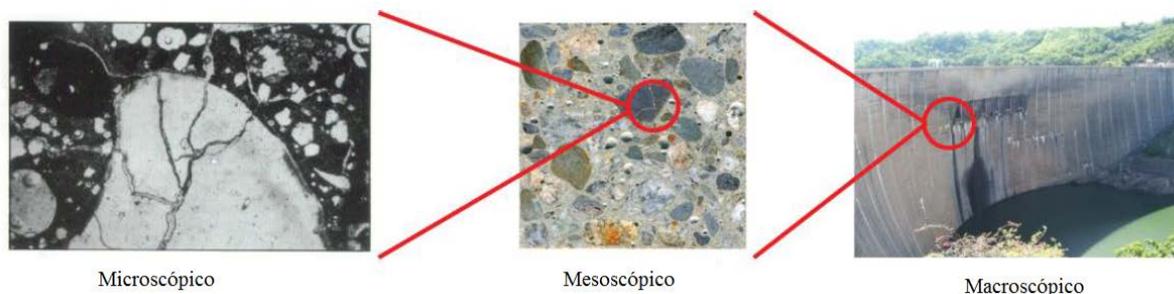
## 1 INTRODUÇÃO

O concreto é um dos principais materiais de construção empregado no mundo devido à sua elevada resistência, facilidade com que os elementos estruturais podem ser obtidos, disponibilidade de material e baixo custo (Mehta e Monteiro, 2008). Porém, mesmo quando devidamente projetadas, essas estruturas ainda estão sujeitas a alteração de suas propriedades físicas e químicas em função das características de seus componentes e da resposta destes às condições impostas pelo ambiente (Souza e Riper, 2009).

Entre os processos de deterioração que afetam o desempenho e a durabilidade do concreto pode-se destacar a reação álcali-agregado (RAA), uma reação deletéria que ocorre entre os íons alcalinos presentes na pasta de cimento hidratada e a sílica de alguns tipos de agregados reativos e que tem como produto um gel higroscópico. Em presença de água esse gel expande, gerando tensões e levando à fissuração do concreto o que reduz importantes propriedades mecânicas como, por exemplo, o módulo de elasticidade.

A RAA é uma reação complexa cujos mecanismos que a envolvem ainda não foram completamente entendidos. Sabe-se que muitos fatores podem afetar significativamente a velocidade e a extensão da reação, entre eles a mineralogia e tamanho do agregado, o conteúdo alcalino da solução, temperatura, umidade, porosidade e tensões de confinamento (Pan *et al.*, 2012). Devido a essa complexidade, somada à heterogeneidade do concreto e à distribuição irregular do agregado reativo na estrutura, diversos modelos numéricos surgiram a fim de se prever os danos causados nas estruturas, possibilitando o controle e recuperação das mesmas.

Pan *et al.* (2012) divide os modelos numéricos que tratam da RAA em função da heterogeneidade do concreto e dos mecanismos químicos envolvendo a reação, conforme ilustra a Fig. 1.



**Figura 1: Escalas dos modelos numéricos que representam a RAA.**  
**Fonte: Esposito e Hendricks (2013)**

Modelos microscópicos ou teóricos estudam os mecanismos químicos envolvidos na reação: processos de difusão, cinética da dissolução, formação e expansão do gel. Geralmente consideram um elemento de volume representativo, um agregado esférico envolto pela pasta de cimento e descrevem a interação entre o gel e a matriz (Hobbs, 1981; Furusawa *et al.*, 1994; Bazant e Stefens, 2000; Lemarchand *et al.*, 2001).

Modelos mesoscópicos representam a anisotropia do concreto, considerando as fases de agregado, pasta de cimento, vazios e gel. O principal objetivo desses modelos é tratar dos mecanismos de fissuração e propagação de fissuras nas partículas de agregado e na pasta (Comby-Peyrot *et al.*, 2009; Dunant e Scrivener, 2010).

Por fim, os modelos macroscópicos, os quais são aplicados para a previsão do comportamento e mecanismos de deterioração de estruturas afetadas pela RAA. Esses modelos são formulados em elementos finitos acoplando os efeitos mecânicos com os

aspectos químicos da reação e têm por objetivo reproduzir o campo de tensões e deslocamentos da estrutura.

Dessa forma, o presente trabalho emprega um modelo macroscópico paramétrico, cuja origem vem dos trabalhos desenvolvidos por Léger *et al.* (1996) e Pappalardo Jr. *et al.* (2000). A lei cinética para a expansão por RAA é a apresentada por Carrazedo (2004), a qual tem por base a lei apresentada por Pietruszczak (1996). Além disso também é apresentado um estudo numérico do efeito das tensões induzidas pela presença de armadura na expansão do concreto afetado por RAA.

O modelo macroscópico aqui desenvolvido para representar a expansão por RAA é implementado por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) (Coda e Greco, 2004). Esse método considera as posições como parâmetros nodais, a medida de deformação é a de Green e a lei constitutiva dos materiais é a de Saint-Venant-Kirchhoff. O material é discretizado por meio de uma matriz elástica bidimensional reforçado com fibras lineares perfeitamente aderidas à matriz. As fibras são introduzidas por meio de relações cinemáticas, sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema (Vanalli, 2004).

## 2 MECANISMOS E ESTÁGIOS DA RAA

A reação álcali-agregado é o termo geral que descreve diferentes tipos de reações químicas que ocorrem no concreto. A ABNT NBR 15577-1 (2008) classifica a RAA em três tipos em função da mineralogia do agregado reativo: reação álcali-sílica, reação álcali-silicato e reação álcali-carbonato.

A reação álcali-sílica é relatado como o tipo mais comum de reação e é o principal responsável pela deterioração das estruturas. Participam da reação a sílica reativa do agregado e os álcalis do cimento, resultando como produto dessa reação um gel expansivo.

Dessa forma, Léger *et al.* (1996) divide o processo de expansão do concreto afetado pela reação álcali-sílica em três estágios, conforme ilustra a Fig. 2.

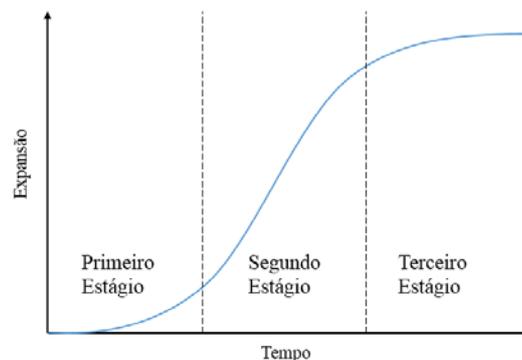


Figura 2: Curva de expansão para concreto afetado por RAA.

- i) Primeiro estágio: o concreto se torna saturado pelo gel produto da RAA. Esse estágio apresenta pequena expansão pois os poros do concreto ainda não foram completamente preenchidos pelo gel;
- ii) Segundo estágio: o gel, que agora preenche todos os poros do concreto, continua a absorver água desenvolvendo pressão e expandindo o concreto;
- iii) Terceiro estágio: ocorre um esgotamento do material reativo e, portanto, o processo de expansão é finalizado.

### 3 MODELAGEM DA RAA

Como já citado anteriormente a RAA é uma reação complexa e que depende de muitos fatores. Dessa forma, os modelos macroscópicos paramétricos permitem a obtenção da taxa de deformação do concreto a partir dos principais fatores que influenciam a reação.

Léger *et al.* (1996) desenvolveram um modelo macroscópico paramétrico capaz de associar a intensidade e a distribuição da expansão no concreto a partir da combinação linear dos fatores que influenciam a RAA, tais como a umidade, temperatura, reatividade dos constituintes e estado de tensões. Esses fatores são normalizados a partir de leis de normalização e que tem por objetivo associar as observações obtidas em laboratório e as medidas reais observadas na estrutura.

Com base no trabalho de Léger *et al.* (1996), Pappalardo Jr. *et al.* (2000) propuseram um modelo paramétrico em que a combinação dos fatores de influência (temperatura, umidade, porosidade e tensão de confinamento) é feita por meio de uma equação constitutiva para melhor representar todos os estágios da reação.

Dessa forma, o modelo macroscópico paramétrico desenvolvido nessa pesquisa utiliza a equação constitutiva apresentada por Carrazedo (2004) (Eq. (1)) com base no trabalho de Pietrusczak (1996) para combinar os fatores de influência (umidade, porosidade, temperatura e tensões de confinamento) e expressar a taxa de deformação resultante devido à RAA.

$$\dot{\varepsilon}_{RAA} = H(t - t^p F_p) \varepsilon_{vol}^{max} (1 - e^{-(t - t^p F_p)/A_1 F_t}) F_c \sqrt{F_m} \quad (1)$$

em que  $\dot{\varepsilon}_{RAA}$  é a taxa de expansão devido à reação álcali-agregado,  $H$  é uma função Heaviside,  $\varepsilon_{vol}^{max}$  é a máxima expansão volumétrica esperada,  $A_1$  é o índice de reatividade,  $F_m$ ,  $F_p$ ,  $F_c$  e  $F_t$  são os fatores de influência devido à umidade, porosidade, tensões de confinamento e temperatura normalizados e  $t^p$  é o tempo para o início da reação, e representa o tempo que o gel leva para preencher todos os poros do concreto.

Diversos fatores podem influenciar tanto a velocidade quanto a intensidade das expansões devido à RAA. Muitos autores citam o agregado reativo, o teor de álcalis, a umidade relativa, a temperatura, porosidade e tensões confinantes como os principais fatores que influenciam a reação, dessa forma o modelo aqui utilizado para representar a RAA realiza algumas simplificações acerca do efeito dos fatores de influência.

#### 3.1 Reatividade dos constituintes

Características como mineralogia, quantidade e dimensão dos agregados podem influenciar na sua reatividade. Em geral, minerais com estrutura desorganizada tendem a apresentar maior reatividade. Já o efeito da dimensão e quantidade de agregado é um pouco mais complicada. Normalmente espera-se um aumento da expansão com a redução do tamanho das partículas e com o aumento da quantidade de agregado reativo, entretanto o que de fato se observa é que uma faixa de dimensão e quantidade intermediária (teores péssimos) gera as maiores expansões (Rajabipour *et al.*, 2011).

Quanto ao teor de álcalis presente no concreto, pode-se afirmar que o cimento Portland é a principal fonte de álcalis (sódio e potássio) no concreto, dessa forma, quanto maior o teor de álcalis do cimento e quanto maior o consumo de cimento do concreto, maiores serão as expansões observadas. Entretanto, alguns agregados e adições minerais também podem ser fontes de álcalis (Mehta e Monteiro, 2008).

Além disso a sílica reativa presente nos agregados e a concentração de álcalis não apresentam uma distribuição uniforme no concreto; por simplificação, a reatividade dos constituintes é representada no modelo por meio de dois parâmetros: a máxima expansão volumétrica esperada ( $\varepsilon_{vol}^{max}$ ) e o índice de reatividade ( $A_1$ ), esse último associado à velocidade em que a reação ocorre.

### 3.2 Temperatura

O efeito da temperatura na expansão por RAA não é tão facilmente interpretado. A elevação da temperatura aumenta a dissolução dos componentes da reação, aumentando, assim a velocidade da reação. A elevação da temperatura também reduz a viscosidade do gel, permitindo que esse se espalhe mais facilmente pelos poros do concreto, reduzindo o seu potencial expansivo, evidenciando, dessa forma uma menor expansão final (Pignatelli, 2012).

O modelo aqui apresentado considera que a elevação da temperatura aumenta a velocidade da reação, mas não modifica a máxima expansão volumétrica.

A Fig. 3 ilustra a lei linear para a normalização da temperatura ( $F_t$ ). Ressalta-se que os limites inferiores e superiores adotados para as leis de normalização variam em função da estrutura analisada, nesse caso os limites foram os mesmos adotados por Léger *et al.* (1996). Além disso, o parâmetro  $k_c$  é uma variável de calibração que possibilita a ponderação de cada parâmetro do modelo matemático a partir de dados experimentais e de instrumentação.

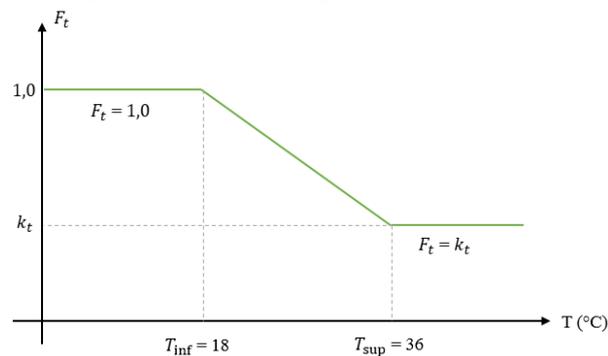


Figura 3: Lei de normalização para a temperatura.  
Fonte: Pappalardo Jr. *et al.* (2000).

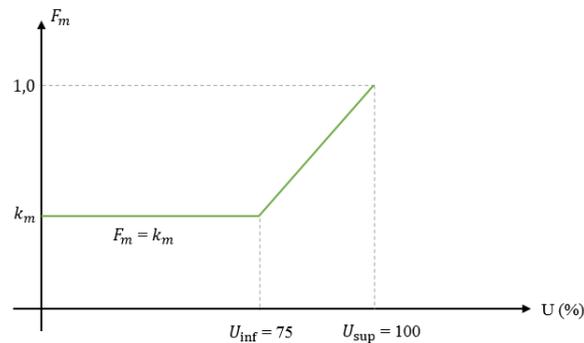
### 3.3 Umidade

Assim como a reatividade dos agregados e o teor de álcalis, a umidade é considerada fator condicionante para o desenvolvimento da RAA, atuando na dissolução da sílica, transporte de álcalis e na expansão do gel produto da reação. Portanto, o aumento da umidade tende a aumentar a expansão por RAA.

Mehta e Monteiro (2008) afirmam que a umidade resultante da água de amassamento presente nos poros do concreto já é suficiente para dar início à RAA, porém a maioria dos autores afirma que as expansões do gel só se tornam prejudiciais à integridade do concreto em ambientes com umidade relativa acima de 80%.

A difusão de água na estrutura determina a quantidade ou existência de expansão por RAA, dessa forma, o modelo considera que o aumento de umidade irá aumentar a expansão, não afetando a sua velocidade.

Léger *et al.* (1996) consideram necessário pelo menos 75% de umidade relativa para que uma expansão considerável seja observada no concreto, assim a Fig. 4 representa a lei para normalização adotada para a umidade ( $F_m$ ).



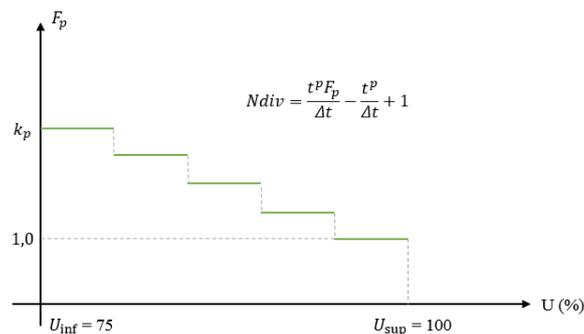
**Figura 4: Lei de normalização para a umidade.**  
**Fonte: Pappalardo Jr. et al. (2000).**

### 3.4 Porosidade

Madureira (2007) afirma que, se por um lado, uma maior porosidade do concreto retém maior quantidade de água em seu interior, indispensável para a ocorrência da RAA, por outro, uma maior porosidade também significa que o gel tem maior espaço físico para expandir antes de iniciar a pressão e fissuração do concreto.

No modelo a porosidade afeta o tempo para início da reação ( $t^p$ ), assim, a função Heaviside na Eq. (1) apenas evidencia expansão quando todos os poros do concreto estiverem preenchidos por gel.

Como consequência da função Heaviside, dependendo do passo de tempo adotado pode ser introduzido um erro na análise, esse erro é evitado por meio de uma lei de conversão em forma de escada (Fig. 5), com passo de tempo  $\Delta t$  múltiplo de  $t^p$  (Carrazedo e Lacerda, 2008).



**Figura 5: Lei de normalização para a porosidade.**  
**Fonte: Carrazedo e Lacerda (2008).**

### 3.5 Tensões de confinamento

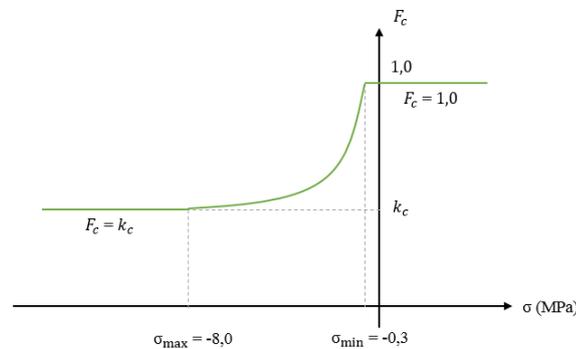
A maioria das obras civis está sujeita a elevadas tensões resultado de seu peso próprio e carregamento externo. Dessa forma, diversos estudos experimentais analisaram os efeitos da RAA em amostras submetidas a tensões de compressão aplicadas e induzidas pela presença

de armadura: Clark (1991), Swamy e Al-asali (1990), Jones e Clark (1996) Multon e Toutlemonde (2006).

Os resultados desses estudos experimentais mostram uma redução das expansões na direção em que o carregamento é aplicado, sendo essa expansão restringida transferida para a direção menos comprimida. O mesmo também é observado para o caso de tensões induzidas pela presença de armadura, em que a expansão é reduzida em direção paralela à armadura e transferida para a direção perpendicular a esta (Multon e Toutlemonde, 2006).

O modelo numérico aqui desenvolvido é capaz de representar a ortotropia da expansão, entretanto não foi implementada a transferência da expansão para a direção menos comprimida. A cada passo de tempo as tensões são calculadas e um novo valor para o fator de influência  $F_c$  é determinado.

Nesse trabalho foram avaliadas duas leis de normalização referentes ao efeito das tensões aplicadas ou induzidas pela presença de armadura na expansão por RAA. A Fig. 6 representa a lei de normalização apresentada em Léger *et al.* (1996) e os respectivos limites de tensão adotados pelo mesmo autor.



**Figura 6: Lei de normalização para as tensões.**  
Fonte: Adaptado de Léger *et al.* (1996)

Essa lei de normalização tem como base o trabalho de Charlwood (1994). Nesse modelo o fator de influência é relacionado com a tensão de compressão  $\sigma_i$  pela Eq. (2) e Eq. (3) para cada direção principal.

$$F_c = 1,0 \quad \text{para} \quad \sigma_{\min} \leq \sigma_i \quad (2)$$

$$F_c = 1 - K \log_{10}(\sigma_i / \sigma_{\min}) \quad \text{para} \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_i \leq \sigma_{\min} \quad (3)$$

em que  $\sigma_i$  é a tensão principal na direção  $i$  e  $K$  define a curvatura do gráfico que relaciona as tensões com o fator de influência e vale 0,701 para  $\sigma_{\max} = -8,0$ MPa.

A outra lei de normalização avaliada é apresentada na Fig. 7 e é proposta por Pappalardo Jr. *et al.* (2000). Nesse caso, o parâmetro  $F_c$  obtido para cada passo de tempo entra na Eq. (1) como  $\sqrt{F_c}$ .

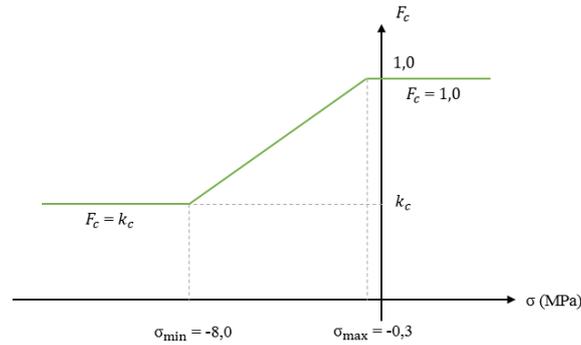


Figura 7: Lei de normalização para as tensões.  
Fonte: Pappalardo Jr. *et al.* (2000)

## 4 MODELAGEM DO CONCRETO ARMADO

A modelagem foi realizada pelo Método dos Elementos Finitos Posicional, no qual os parâmetros nodais considerados são as posições e as deformações são medidas em relação à posição inicial do corpo (Coda e Greco, 2004). A medida de deformação é a de Green e a lei constitutiva dos materiais é a de Saint-Venant-Kirchhoff.

O concreto é discretizado por meio de uma matriz elástica bidimensional reforçado com fibras lineares e, por simplificação, é considerado acoplamento perfeitamente aderente fibra-matriz.

Considerando-se forças conservativas e o Princípio da Mínima Energia Potencial Estacionária para a solução do problema não linear geométrico, a energia potencial total de um sólido reforçado com fibras é dada pela Eq. (4).

$$\Pi = \int_{V_0^f} \theta(\mathbf{E}) dV_0^f + \int_{V_0^m} u_e(\mathbf{E}) dV_0^m - \mathbf{F} \cdot \mathbf{Y} \quad (4)$$

em que  $\theta$  é a energia específica de deformação das fibras,  $u_e$  é a energia específica de deformação para a matriz elástica,  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças conservativas externas concentradas,  $\mathbf{Y}$  é o vetor de posição nodal,  $\mathbf{E}$  é a deformação uniaxial de Green medida nas fibras,  $\mathbf{E}$  é a deformação desenvolvida na matriz (tensor de deformação de Green),  $V_0^m$  representa o volume inicial da matriz e  $V_0^f$  representa o volume inicial das fibras contidas na matriz.

Como a variação da energia potencial total é igual a zero na posição de equilíbrio, logo o problema consiste em determinar a posição  $\mathbf{Y}$  que satisfaça o equilíbrio (Eq. (5)).

$$\delta \Pi = \int_{V_0^f} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^f \cdot \delta \mathbf{Y} + \int_{V_0^m} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^m \cdot \delta \mathbf{Y} - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{Y} = 0 \quad (5)$$

Realizando-se substituições pelos conjugados energéticos, pode-se reescrever a Eq. (5) na forma da Eq. (6).

$$\delta \Pi = \left( \int_{V_0^f} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^f + \int_{V_0^m} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^m - \mathbf{F} \right) \cdot \delta \mathbf{Y} = 0 \quad (6)$$

em que  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff desenvolvido na matriz elástica e  $S$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff desenvolvido nas fibras.

A Equação (6) pode ser resolvida através do processo iterativo de Newton-Raphson, o qual utiliza como estratégia de solução um vetor de desbalanceamento de forças  $g$  (Eq. (7)).

$$g(\mathbf{Y}) = \left( \int_{V_0^f} S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^f + \int_{V_0^m} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} dV_0^m \right) - \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{int}}^f + \mathbf{F}_{\text{int}}^m - \mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

em que  $\mathbf{F}_{\text{int}}^f$  é chamado de vetor de forças internas, com parcela de contribuição referente à fibra e  $\mathbf{F}_{\text{int}}^m$  é a parcela referente à matriz.

Como o processo é não linear, a Eq. (7) é expandida em série de Taylor (Eq. (8)).

$$g(\mathbf{Y}) \cong g(\mathbf{Y}_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{\mathbf{Y}_0} \cdot \Delta \mathbf{Y} = g(\mathbf{Y}_0) + \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{Y} = 0 \quad (8)$$

em que  $\mathbf{Y}_0$  é uma posição tentativa e  $\mathbf{H}$  é chamada de matriz Hessiana (ou matriz rigidez tangente). Como as forças são conservativas, a matriz Hessiana pode ser escrita conforme a Eq. (9), em que  $\mathbf{H}^f$  é a parcela da hessiana referente à fibra e  $\mathbf{H}^m$  é a parcela referente à matriz.

$$\mathbf{H} = \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathbf{E}^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} + S \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y} \partial \mathbf{Y}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} : \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{Y} \partial \mathbf{Y}} \right) \right\} = \mathbf{H}^f + \mathbf{H}^m \quad (9)$$

A resolução pelo Método de Newton-Raphson do sistema não-linear apresentado na Eq. (8) fornece a correção da posição ( $\mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}$ ) e o procedimento é repetido até que  $|\Delta \mathbf{Y}|/|\mathbf{X}|$  seja menor do que uma tolerância, em que  $\mathbf{X}$  é o vetor posição inicial do corpo.

Para o caso de fibras perfeitamente aderentes à matriz, Vanalli (2004) propôs uma maneira de se inserir fibras no domínio sem a necessidade de coincidência dos nós da fibra com os nós da chapa e sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema. Para isso deve-se escrever as coordenadas adimensionais do elemento finito de fibra em função das coordenadas do elemento de chapa (Eq. (10)).

$$X_i^p = \phi_l(\xi_1^p, \xi_2^p) X_i^l \quad (10)$$

em que  $\phi_l$  são as funções de forma do elemento finito de chapa calculadas para as coordenadas adimensionais  $\xi_i^p$  do nó  $p$  do elemento de fibra e  $X_i^l$  são as coordenadas na posição inicial dos nós da chapa.

A fim de se determinar as coordenadas adimensionais, Sampaio (2014) expande a Eq. (10) em Série de Taylor (Eq. (11)).

$$X_i^p \cong \phi_l(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt}) X_i^l + \left. \frac{\partial \phi_l(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \right|_{\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt}}, \text{ ou, } X_i^p = X_i^{pt} + H_{ij} \Delta \xi_j \quad (11)$$

em que  $X_i^{pt}$  é a posição tentativa dos nós da fibra calculada a partir das funções de forma do elemento bidimensional e das coordenadas adimensionais tentativas.

Portanto, para se determinar a correção das coordenadas adimensionais  $\Delta\xi_j$ , resolve-se a equação não linear (Eq. (12)) pelo Método de Newton-Raphson.

$$H_{ij}\Delta\xi_j = X_i^p - X_i^{pt} \quad (12)$$

Conhecendo agora em qual elemento finito do domínio o nó da fibra está contido e o par de coordenadas adimensionais  $(\xi_1, \xi_2)$  associadas ao nó é possível calcular as posições atuais dos nós da fibra em função da posição atual dos nós da chapa (Eq. (13)).

$$Y_i^p = \phi_l(\xi_1^p, \xi_2^p)Y_i^l \quad (13)$$

em que  $Y_i^l$  são as posições atuais dos nós do elemento finito de chapa.

Dessa forma, o vetor de forças internas do nó  $\beta$  na direção  $\alpha$  do elemento de chapa reforçado com fibras é dado pela Eq. (14).

$$(F_\alpha^\beta)^{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0^m} \frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0^m + \int_{V_0^f} \frac{\partial \theta}{\partial Y_\alpha^\beta} (Y_j^p(Y_i^l)) dV_0^f \quad (14)$$

em que a energia específica de deformação da fibra é função das posições nodais atuais da fibra ( $Y_j^p$ ).

A primeira parcela da Eq. (14) é referente à força interna da chapa, já a segunda parcela pode ser escrita conforme a Eq. (15).

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial \theta}{\partial Y_i^p} \frac{\partial Y_i^p}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad (15)$$

em que  $\frac{\partial \theta}{\partial Y_i^p}$  representa o vetor de forças internas da fibra e o termo  $\frac{\partial Y_i^p}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{\beta}(\xi_1^p, \xi_2^p)$

incorpora o grau de liberdade da fibra como função do grau de liberdade da matriz.

Fazendo a segunda derivada da energia interna de deformação do material reforçado com fibras obtém-se a matriz Hessiana (ou matriz de rigidez tangente) (Eq. (16)).

$$H_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} = \int_{V_0^m} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} dV_0^m + \int_{V_0^f} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} (Y_j^p(Y_i^l)) dV_0^f \quad (16)$$

Da Eq. (16) pode-se observar que a primeira parcela é referente à Hessiana do elemento de chapa e a segunda derivada da energia específica de deformação da fibra em relação aos parâmetros nodais da chapa é expressa pela Eq. (17).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} = & (h_{\omega\rho\omega\rho})_f \frac{\partial(Y_\omega^\rho)_f}{\partial Y_\alpha^\beta} \frac{\partial(Y_\omega^\rho)_f}{\partial Y_\gamma^\eta} + (h_{\omega\rho\pi\mu})_f \frac{\partial(Y_\omega^\rho)_f}{\partial Y_\alpha^\beta} \frac{\partial(Y_\pi^\mu)_f}{\partial Y_\gamma^\eta} + (h_{\pi\mu\omega\rho})_f \frac{\partial(Y_\pi^\mu)_f}{\partial Y_\alpha^\beta} \frac{\partial(Y_\omega^\rho)_f}{\partial Y_\gamma^\eta} + \\ & + (h_{\pi\mu\pi\mu})_f \frac{\partial(Y_\pi^\mu)_f}{\partial Y_\alpha^\beta} \frac{\partial(Y_\pi^\mu)_f}{\partial Y_\gamma^\eta} \end{aligned} \quad (17)$$

em que o termo  $(h)_f$  é a matriz Hessiana local da fibra.

Maiores detalhes acerca das deduções anteriores podem ser encontrados em Sampaio *et al.* (2013), Paccola *et al.* (2015) e Vanalli *et al.* (2008).

A fim de se considerar a expansão por RAA no modelo mecânico, emprega-se uma decomposição aditiva do tensor de deformações de Green (Eq. (18)). Essa decomposição aditiva é possível apenas para um campo de pequenas deformações.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) - \varepsilon_{RAA}\delta_{ij} \quad (18)$$

em que  $E_{ij}$  representa a parcela elástica da deformação,  $C_{ij}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green,  $\delta$  representa o delta de Kronecker e  $\varepsilon_{RAA}$  é a deformação observada devido à reação álcali-agregado para cada uma das direções principais.

## 5 EXEMPLOS

### 5.1 Expansão de prisma contendo armadura

Esse primeiro exemplo tem por objetivo avaliar a expansão por RAA de prismas de concreto contendo armadura. Os resultados obtidos numericamente são comparados com as observações do trabalho experimental de Fan e Hanson (1998) a fim de validar o modelo aqui apresentado.

As amostras ensaiadas por Fan e Hanson (1998) consistem em prismas de concreto (Fig. 8) contendo agregado reativo. Uma das amostras (sem armadura) foi sujeita à expansão livre, já outra foi reforçada ao longo da maior dimensão por barras de armadura No. 3, com diâmetro de 9,5mm, módulo de elasticidade de 210GPa e resistência à tração de 433MPa.

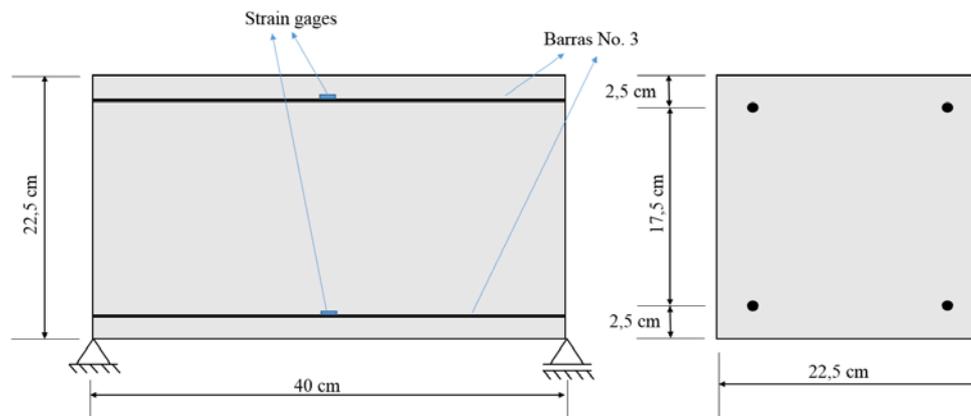


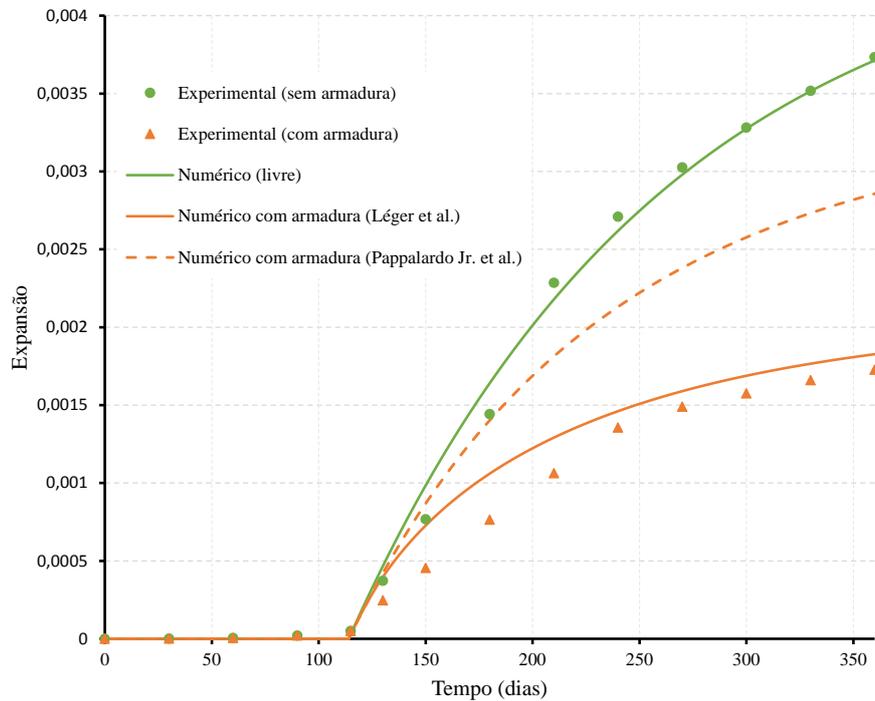
Figura 8: Geometria dos prismas de concreto armado.

Todas as amostras foram mantidas imersas em água e à temperatura de 38°C. As medidas de expansão e de tensão foram obtidas durante 360 dias.

Para o modelo numérico, foi adotado: módulo de elasticidade do concreto de 21GPa, máxima expansão volumétrica esperada ( $\varepsilon_{vol}^{max}$ ) de 0,0046, índice de reatividade ( $A_1$ ) de 750 dias e tempo de preenchimento dos poros de 115 dias.

Como a umidade e temperatura das amostras foi mantida constante, as variáveis de calibração  $k_m$  e  $k_p$  são adotadas como 1,0; a variável  $k_t$  associada à temperatura é adotada igual à 0,2 e a variável  $k_c$  associada ao estado de tensões é adotada igual à zero.

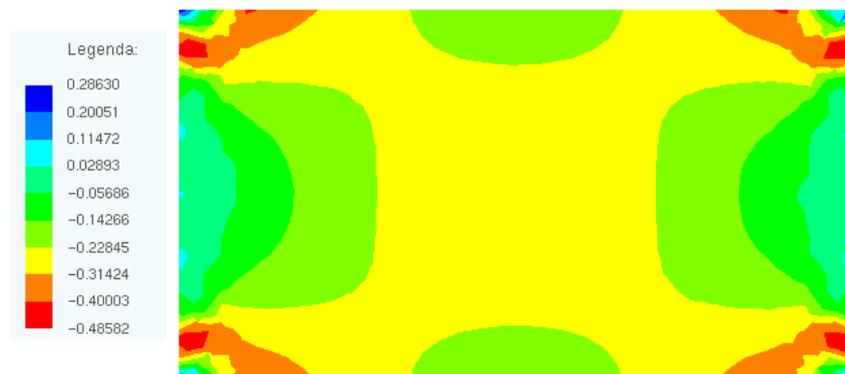
A Figura 9 apresenta a comparação dos resultados numéricos e experimentais. Pode-se observar que a presença de armadura reduz cerca de 50% da expansão longitudinal do concreto; também é possível perceber que a lei logarítmica proposta por Léger *et al.* (1996) (Fig. 6) representa melhor essa redução da expansão.



**Figura 9: Expansão dos prismas de concreto com e sem armadura.**

Os valores de expansão para o concreto armado apresentados na Fig. 9 são referentes à média das expansões obtidas em quatro *strain gages* instalados nas barras de armadura, dessa forma, assumindo que as barras estejam perfeitamente aderidas ao concreto, a deformação das barras aos 360 dias gera uma tensão de compressão no concreto de  $0,22 \text{ kN/cm}^2$  (Fan e Hanson, 1998).

A Figura 10 ilustra os resultados numéricos utilizando a lei de tensões proposta por Léger *et al.* (1996) para a distribuição de tensões na direção da armadura (direção x). Assim, aos 360 dias, o valor da tensão de compressão induzida no concreto no modelo numérico (na região próxima aos *strain gages*) é de  $0,219 \text{ kN/cm}^2$ . Portanto, é possível concluir que o modelo numérico aqui empregado é capaz de representar as tensões e expansões devido à RAA em estruturas de concreto armado.



**Figura 10: Tensão na direção x em  $\text{kN/cm}^2$  (aos 360 dias).**

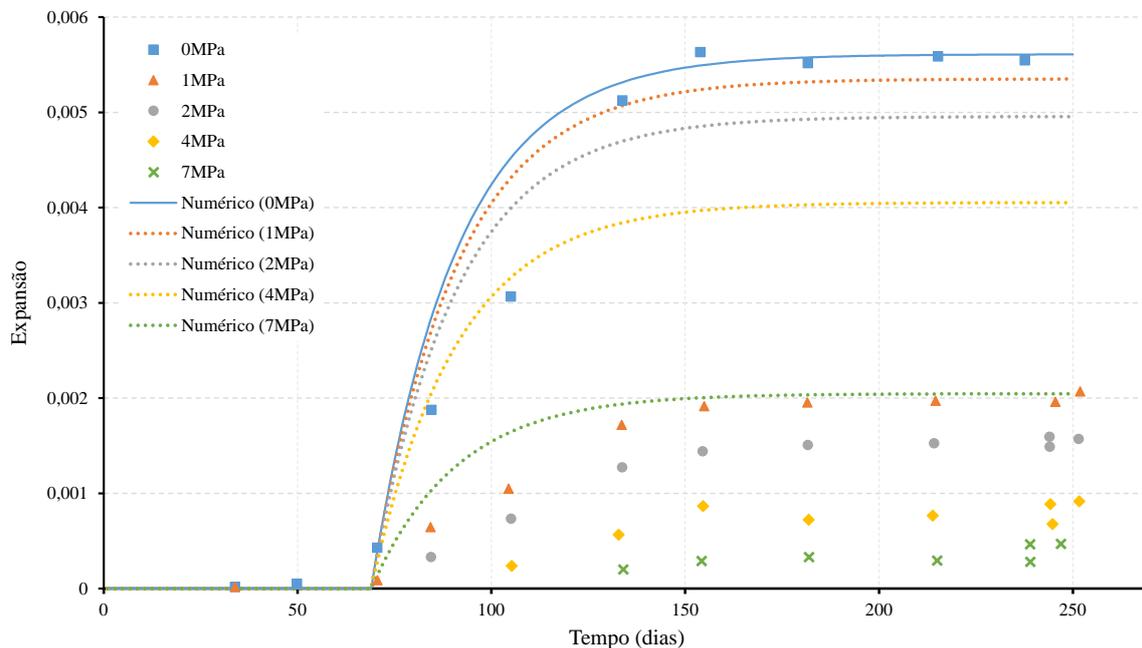
## 5.2 Expansão de corpo de prova

Esse exemplo tem por objetivo avaliar a expansão por RAA devido aos diferentes níveis de tensão aplicadas e taxas de armadura, e tem como base o trabalho experimental de Jones e Clark (1996).

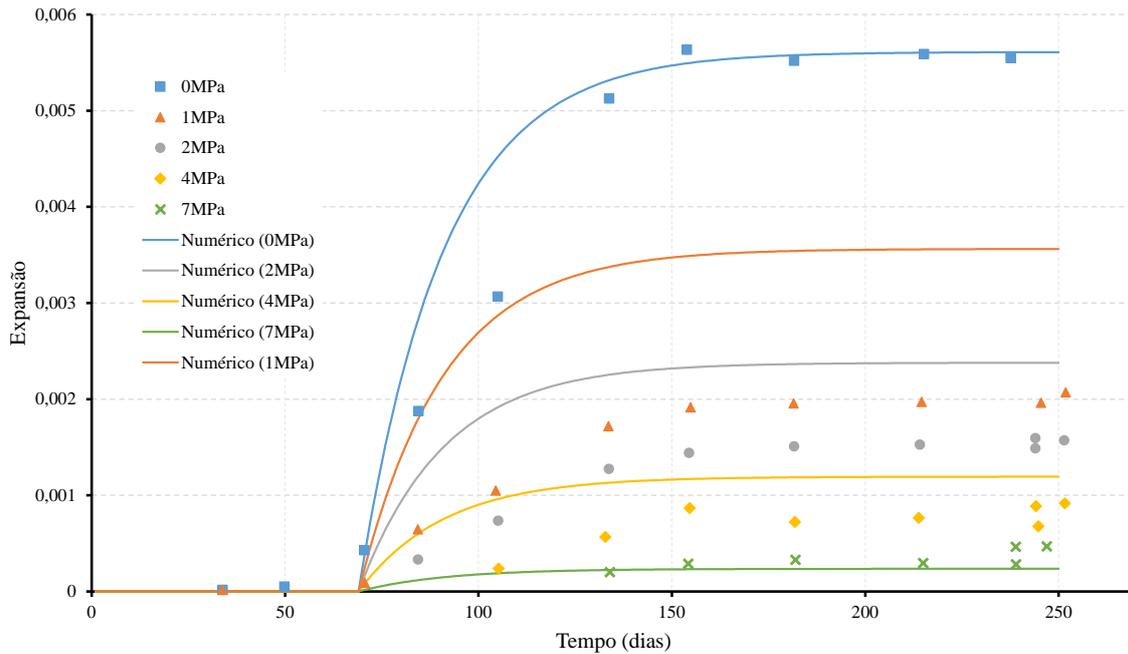
Jones e Clark (1996) realizaram três séries de ensaios envolvendo 180 corpos de prova cilíndricos de 10cm de diâmetro e 20cm de altura. Todos os corpos de prova foram mantidos imersos em água e à temperatura de 38°C ( $k_m$  e  $k_p$  são adotadas como 1,0;  $k_t$  é adotada igual à 0,2 e  $k_c$  é adotada igual à zero).

Na primeira série de ensaios os corpos de prova foram submetidos a diferentes níveis de tensões de compressão aplicadas, variando de 1 a 7MPa, portanto, para o modelo numérico, foi adotado: módulo de elasticidade do concreto de 21GPa, máxima expansão volumétrica esperada ( $\varepsilon_{vol}^{max}$ ) de 0,0055, índice de reatividade ( $A_1$ ) de 110 dias e tempo de preenchimento dos poros de 70 dias.

As Figuras 11 e 12 apresentam os resultados numéricos e experimentais para a expansão na direção do carregamento aplicado. As curvas numéricas apresentadas na Fig. 11 empregam a lei referente às tensões proposta por Pappalardo Jr. *et al.* (2000), já as curvas da Fig. 12 empregam a lei de tensões proposta por Léger *et al.* (1996). Pode-se observar que as curvas numéricas apresentadas na Fig. 12 são as que apresentaram melhores resultados quando comparadas com os dados experimentais. Entretanto, deve-se ressaltar que para níveis de tensão de compressão mais baixos (1 e 2MPa) os resultados numéricos apresentam grande divergência quando comparados com os resultados experimentais.

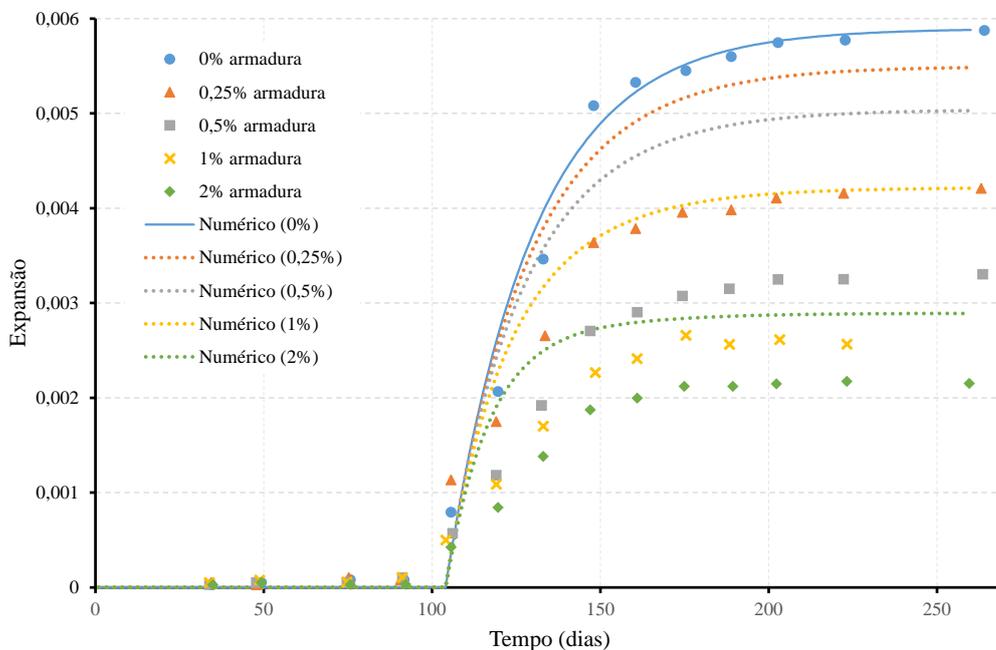


**Figura 11: Expansão dos corpos de prova sob diferentes níveis de tensão aplicadas (lei de tensões proposta por Pappalardo Jr. *et al.* (2000)).**

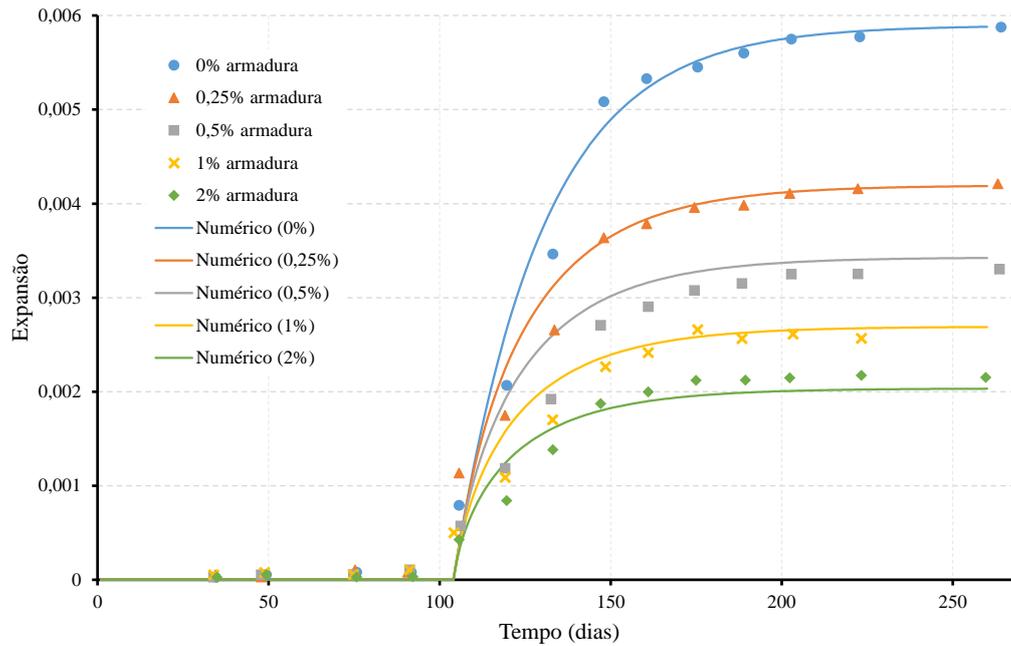


**Figura 12: Expansão dos corpos de prova sob diferentes níveis de tensão aplicadas (lei de tensões proposta por Léger et al. (1996)).**

A segunda série de ensaios avaliou o efeito de diferentes taxas de armadura (de 0,25 a 2%) na expansão dos corpos de prova, nesse caso, uma única barra de aço (módulo de elasticidade de 210GPa) foi inserida no centro dos corpos de prova. O modelo numérico considera os seguintes parâmetros: máxima expansão volumétrica esperada ( $\varepsilon_{vol}^{max}$ ) de 0,0058, índice de reatividade ( $A_1$ ) de 130 dias e tempo de preenchimento dos poros de 105 dias.



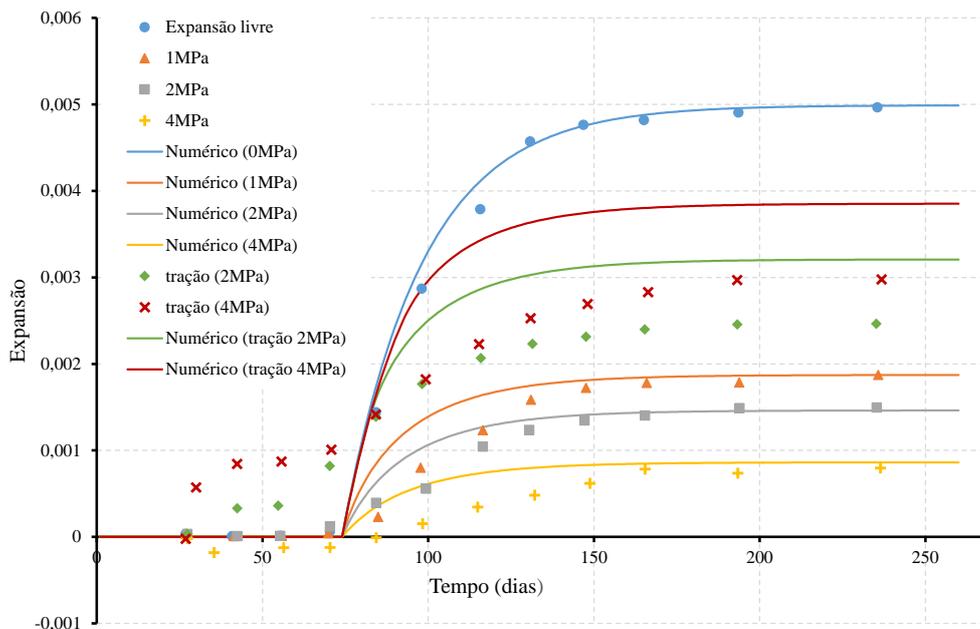
**Figura 13: Expansão dos corpos de prova contendo diferentes taxas de armadura (lei de tensões proposta por Pappalardo Jr. et al. (2000)).**



**Figura 14: Expansão dos corpos de prova contendo diferentes taxas de armadura (lei de tensões proposta por Léger et al. (1996)).**

As Figuras 13 e 14 apresentam os resultados numéricos e experimentais para a expansão dos corpos de prova reforçados com diferentes taxas de armadura. Novamente pode-se observar que as curvas numéricas que empregam a lei de tensões proposta por Léger *et al.* (1996) (Fig. 14) apresentam os melhores resultados.

A última série de ensaios avaliou o efeito de diferentes níveis de carregamento na expansão de corpos de prova contendo 1% de armadura. O modelo numérico considera os seguintes parâmetros: máxima expansão volumétrica esperada ( $\varepsilon_{vol}^{max}$ ) de 0,0049, índice de reatividade ( $A_1$ ) de 120 dias e tempo de preenchimento dos poros de 75 dias.



**Figura 15: Expansão dos corpos de prova sob diferentes níveis de tensão e contendo 1% de armadura (lei de tensões proposta por Léger et al. (1996)).**

Os resultados numéricos e experimentais para essa última série de ensaios (Fig. 15) comprovam que o modelo numérico aqui apresentado também representa bem o caso em que as tensões são aplicadas e induzidas simultaneamente nos corpos de prova. Pode-se destacar que o modelo numérico não representa bem o caso em que o concreto armado é tracionado, uma vez que a lei de normalização referente às tensões não considera redução da expansão para tensões de tração.

## **6 CONCLUSÃO**

As comparações dos resultados numéricos com os dados experimentais dos exemplos apresentados anteriormente permitem as seguintes conclusões:

- Os resultados obtidos mostram que o modelo macroscópico paramétrico aqui apresentado é uma boa ferramenta para a previsão da expansão por RAA de estruturas de concreto armado, auxiliando na avaliação da segurança das estruturas afetadas e no planejamento e projeto de reparos.
- Melhores resultados foram obtidos para a lei de normalização das tensões proposta por Léger *et al.* (1996).
- O modelo numérico para previsão da expansão por RAA apresenta bons resultados tanto para o caso de tensões induzidas pela presença de armadura, quanto para o caso de tensões aplicadas em estruturas armadas.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo fomento oferecido à pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 15577-1: Agregados-Reatividade álcali-agregado - Parte 1: Guia para avaliação da reatividade potencial e medidas preventivas para uso de agregados em concreto. Rio de Janeiro, ABNT, 2008.

Bazant, Z.P.; Steffens, A. Mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete. *Cement and Concrete Research*, v.30, n.3, p.419-428, 2000.

Carrazedo, R. *Modelagem numérica da expansão do concreto devido a reação álcali-agregado*. Dissertação (Mestre em Ciências) - Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, 2004.

Carrazedo, R.; Lacerda, L.A. Parametric model for the analysis of concrete expansion due to alkali-aggregate reaction. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, v.43, n.5, p.325-335, 2008.

Charlwood, R. A review of alkali aggregate in hydro-electric plants and dams. *Hydropower Dams*, v.1, p.73-80, 1994.

Clark, L.A. Modelling the structural effects of alkali-silica reactions on reinforced concrete, *ACI Materials Journal*, v.88, p.271-277, 1991.

Coda, H.B.; Greco, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.193, p. 3541-3557, 2004.

Comby-Peyrot, I.; Bernard, F.; Bouchard, P.; Bay, F.; Garcia-Diaz, E. Development and validation of a 3D computational tool to describe concrete behavior at mesoscale. Application to the alkali-silica reaction. *Computational Materials Science*, v.46, n.4, p.1163-1177, 2009.

Dunant, C.F.; Scrivener, K.L. Micro-mechanical modelling of alkali-silica-reaction-induced degradation using the AMIE framework. *Cement and Concrete Research*, v.40, n.4, p.517-525, 2010.

Esposito, R.; Hendriks, M.A.N. Structural Modelling of ASR-affected concrete: The approach developed in the PAT-ASR project. *Proceedings of Nordic-Baltic Miniseminar of Alkali-aggregate reactions (AAR) in concrete*, 2013.

Fan, S.; Hanson, J.M. Length expansion and cracking of plain and reinforced concrete prisms due to alkali-silica reaction. *ACI Materials Journal*, v.95, n.1, p.480-487, 1998.

Furusawa, Y.; Ohga, H.; Uomoto, T. An analytical study concerning prediction of concrete expansion due to alkali-silica reaction. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON DURABILITY OF CONCRETE, 3., 1994, Nice, França.

Hobbs, D.W. The alkali-silica reaction - a model for predicting expansion in mortar. *Magazine of Concrete Research*, v.33, n.117, p.208-220, 1981.

Jones, A.E.K.; Clark, L.A. The effects of restraint on ASR expansion of reinforced concrete. *Magazine of Concrete Research*, v.48, n.174, p.1-13, 1996.

Léger, P.; Cote, P.; Tinawi, R. Finite element analysis of concrete due to alkali-aggregate reactions in dams. *Computers and Structures*, v.60, n.4, p.601-611, 1996.

Lemarchand, E.; Dormieux, L.; Ulm, F. A micromechanical approach to de modeling of swelling due to alkali-silica reaction. *Proceedings of the Engineering Mechanics Conference*, 14., 2001, Austin, Texas.

Madureira, E.L. *Simulação numérica do comportamento mecânico de elementos de concreto armado afetados pela reação álcali-agregado*. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pernambuco (UFPE), Recife, 2007.

Mehta, P.K.; Monteiro, P.J.M. *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. São Paulo, Brasil: PINI, 2008.

Multon, S.; Toutlemonde, F. Effect of applied stresses on alkali-silica reaction-induced expansions. *Cement and Concrete Research*, v.36, n.5, p.912-920, 2006.

Paccola, R.R.; Piedade Neto, D.; Coda, H.B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. *Composite Structures*, v.133, p.343-357, 2015.

Pan, J.W. *et al.* Modeling of alkali-silica reaction in concrete: a review. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, v.6, n.1, p.1-18, 2012.

Pappalardo JR, A.; Pauletti, R.M.O.; Pimenta, P.M. Simulação numérica da reação álcali-agregado em barragens de concreto. *Revista Mackenzie de Engenharia e Computação*, v.1, n.1, p.181-199, 2000.

Pietruszczak, S. On the mechanical behaviour of concrete subjected to alkali-aggregate reaction. *Computers and Structures*, v.58, n.6, p.1093-1097, 1996.

Pignatelli, R. *Modelling of degradation induced by alkali-silica reaction in concrete structures*. Tese Politecnico di Milano, 2012.

Rajabipour, F. Giannini, E.; Dunant, C.; Ideker, J.H.; Thomas, M.D.A. Alkali-silica reaction: Current understanding of the reaction mechanisms and the knowledge gaps. *Cement and Concrete Research*, v.76, p.130-146, 2015.

Sampaio, M.S.M. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. Tese (Doutor em Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

Sampaio, M.S.M.; Paccola, R.R.; Coda, H.B. Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v.66, p.12-25, 2013.

Souza, V.C.M.; Ripper, T. *Patologia das Estruturas de Concreto. Patologia, recuperação e reforço de estruturas de concreto*. São Paulo: Pini, 2009.

Swamy, R.N.; Al-Asali, M.M. Control of alkali-silica reaction in reinforced concrete beams. *ACI Materials Journal*, v.87, n.1, p.133-142, 1990.

Vanalli, L. *O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos*. Tese (Doutor em Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

Vanalli, L.; Paccola, R.R.; Coda, H.B. A simple way to introduce fibers into FEM models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.24, p.585-603, 2008.