



## **ANÁLISE NUMÉRICA DO ARRANCAMENTO DE FIBRAS DE AÇO USANDO ELEMENTOS FINITOS**

**Thalles Morais Faria**

**Raul Durand**

**Cláudio Henrique de Almeida Feitosa Pereira**

**Yadian Menéndez Rosales**

thallesm.faria@aluno.unb.br

durand@unb.br

claudiopereira@unb.br

yadian.menendez@gmail.com

Universidade de Brasília

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, 1º andar, Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil

**Resumo.** *No concreto reforçado com fibras de aço, a interação entre fibras e a matriz de concreto é de suma importância para o desempenho do compósito. A boa interação destes componentes permite o aumento da capacidade de absorção de energia do compósito. Neste contexto, este trabalho apresenta a simulação numérica de ensaios experimentais de arrancamento de fibra de aço usando o método dos elementos finitos. Os resultados destas simulações são úteis na verificação dos parâmetros do contato, os mesmo que podem ser utilizados em outras análises numéricas. O concreto foi simulado utilizando um modelo constitutivo não linear com previsão de trinca. Para a fibra foi utilizado o modelo perfeitamente elasto-plástico. Para simular o contato foi proposto um modelo tensão cisalhante-deslizamento semelhante ao proposto pelo CEB-FIP. Os resultados obtidos apresentaram boa concordância quando comparados com os ensaios experimentais. Nas simulações também foi verificado que as fibras de aço com seções transversais diferentes apresentaram uma força de arrancamento maior. Finalmente os parâmetros utilizados do contato, validados através das simulações dos ensaios foram aplicados na*

*simulação de uma viga reforçada com fibras.*

***Palavras Chave:*** *Concreto reforçado, Fibras de aço, Elementos finitos*

# 1 INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos têm tornado mais acessível materiais compósitos na Engenharia. O material compósito é dado pela combinação de dois ou mais componentes com propriedades diversificadas. O concreto, por definição, é um material compósito constituído de pasta de cimento e agregados. O comportamento deste material é tipicamente frágil quando submetido a esforços de tração. Este comportamento, em peças estruturais se torna um problema, uma vez que, após a ruptura o material perde totalmente a capacidade resistiva. Para amenizar este problema soluções são estudadas mundialmente por vários pesquisadores. Dentre as soluções está o concreto reforçado com fibras de aço.

O concreto reforçado com fibras (CRF) é um material composto por duas fases. A primeira fase (matriz), composta por concreto simples que possui comportamento frágil. A segunda fase (dispersa), composta por fibras com comportamento dúctil. A combinação entre estas fases torna o concreto mais dúctil. O comportamento do CRF depende de diversos fatores, dentre eles estão o teor de fibras, a aderência entre as fases, a geometria das fibras e o tipo de fibra usado. A utilização do CRF no Brasil é crescente a cada ano. Com isso, o controle tecnológico torna-se necessário para avaliação do comportamento do compósito com diferentes tipos de fibra.

O controle tecnológico realizado por ensaios experimentais demanda espaço e tempo. Assim, muitas vezes, nem todos os tipos de fibras passam por experimentos exaustivos. Neste sentido, as simulações numéricas servem para se fazer uma análise prévia do comportamento do compósito, pois elas são feitas de maneira mais rápida que os ensaios experimentais.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é capaz representar o concreto reforçado com fibras. Para analisar inclusões dos reforços no MEF têm-se alguns métodos, dentre eles estão os método discreto, embutido e semi-embutido. O método discreto possui o inconveniente da geração de uma nova malha para cada configuração de reforço. Este inconveniente deve-se ao fato dos nós do reforço serem compatíveis com os nós dos elementos atravessados. O método embutido, por sua vez, não possui tal inconveniente de geração de nova malha para cada configuração de reforço. Neste método, a malha não depende da geometria do reforço. Finalmente, o método semi-embutido mescla características dos métodos discretos e embutido. Dentre as características, estão a possibilidade de aplicação de condições de contorno diretamente no elemento de reforço e a simulação de deslocamento relativo entre concreto e reforço. Este fato permite a simulação, por exemplo, do arrancamento de uma fibra de aço inserida no concreto.

Neste contexto, o trabalho inicialmente apresenta simulações numéricas do arrancamento de fibras com diferentes seções transversais a fim de se verificar o comportamento das forças de arrancamento e tensões de aderência entre o contato aço-concreto. Posteriormente, com os parâmetros do contato obtidos, é simulada uma viga biapoiada submetida à flexão. Por fim, é avaliada a aplicabilidade do método semi-embutido na simulação do concreto reforçado com fibras.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Estudos anteriores

Esta seção apresenta o trabalho de alguns autores que realizaram estudos em compósitos reforçados com fibras. Li et al. (1991) estudou o comportamento do compósito pela curva tensão

versus abertura de trinca com um modelo que prevê tal comportamento. Os autores concluíram que o modelo prevê os processos físicos dos compósitos, assim como, a influência do efeito da aderência da fibra ao concreto.

Posteriormente, Mohamed et al. (1995) apresentaram um modelo micro mecânico baseado em probabilística para simular o comportamento pós-fissuração em matrizes frágeis reforçadas com fibras. Os autores concluíram que o modelo permite variação dos parâmetros a fim de se encontrar melhores características para o compósito

Por sua vez, Van Hauwaert e Van Mier (1998) usam o modelo de *Lattice*, para o ensaio de uma viga reforçada. No estudo os autores concluíram que o modelo empregado é simples, mas consegue demonstrar a influência da interação entre fibra e matriz.

Já, Sena-Cruz (2005) utilizou um modelo de múltiplas fissuras fixas para a simulação de uma viga reforçada. O autor conclui que o modelo consegue representar com coerência os resultados experimentais e que a melhor aproximação dos resultados depende do tipo de curva utilizada para o amolecimento.

Nos anos seguintes, Cunha et al. (2011) realizaram ensaios numéricos de resistência uniaxial com o modelo de múltiplas fissuras. Os autores concluíram que o modelo apresenta resultados com boa acurácia. Com isso, eles conseguiram prever o comportamento macro mecânico dos compósitos.

Já, Mihai et al. (2016) utilizaram um modelo de dano plástico para as simulações numéricas. Os autores concluíram que o modelo é capaz de simular diferentes direções para as fissuras, além de, reproduzir o comportamento experimental de maneira numérica com precisão.

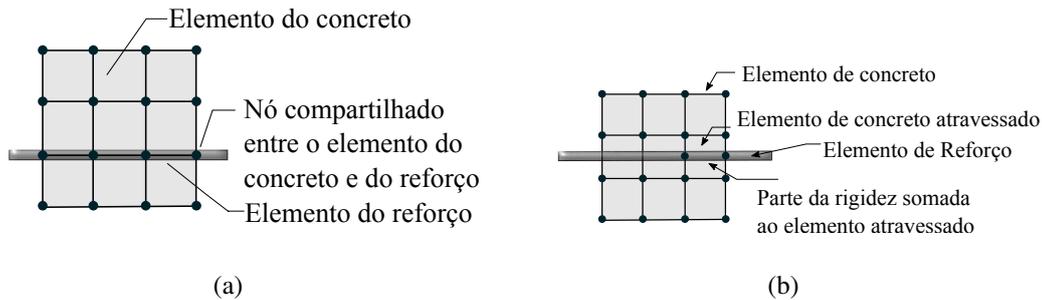
## **2.2 Método dos Elementos Finitos**

O método dos elementos finitos (MEF) é um método bastante empregado na Engenharia. Este método consiste em subdividir um domínio em elementos finitos. A conexão entre os elementos é feita através dos nós. Para a solução dos sistemas as incógnitas são os deslocamentos e forças nodais. Por outro lado, para o cálculo das deformações nodais é feita uma relação entre a matriz de transformação e os deslocamentos nodais. Esta matriz de transformação depende do tipo de elemento usado na análise. O cálculo das tensões é feita por uma relação de uma lei constitutiva tensão-deformação. Por fim, o equilíbrio nodal entre forças externas e internas é obtido por um processo de incremento iterativo. Uma abordagem mais detalhada sobre o método pode ser encontrado em (Zienkiewicz e Taylor, 2000).

O presente trabalho utilizou elementos de barra, elementos de interface entre aço-concreto e elementos sólidos para discretização do domínio. Para as fibras foram usados elementos de barra de três nós, o que permite que o elemento possa ser curvo e a distribuição de deformação ser linear. Para representar o concreto foram utilizados elementos hexaédricos de oito nós. Por fim, a ligação entre os elementos de concreto com elementos de barra foi feita por elementos de junta 1D cuja formulação foi proposta por Durand (2008).

Para a simulação de inclusões de reforço, o MEF possui alguns métodos, dentre eles o método discreto, o embutido e o semi-embutido. A Figura 1 apresenta as abordagens pelos métodos discreto e embutido. Observa-se na figura que, o método discreto permite que os elementos de reforço sejam posicionados nas arestas dos elementos que representam o concreto, porém possui o inconveniente de uma nova geração de malha cada vez que se muda a configu-

ração do reforço. Isto porque os nós dos elementos de reforço têm que ser coincidentes com os nós dos elementos de concreto. Por outro lado, no método embutido não é necessária a geração de uma nova malha para cada configuração de reforço permitindo que o reforço atravessasse os elementos de concreto. Neste método a rigidez do elemento atravessado recebe uma contribuição correspondente à rigidez do reforço. Além disso, a contribuição do reforço depende da sua geometria e posição em relação ao elemento atravessado. Por fim, o método semi-embutido que mescla características positivas dos métodos discreto e embutido, será apresentado no próximo item.



**Figura 1: (a) Abordagem pelo método discreto; (b) Abordagem pelo método embutido**

### 2.3 Método semi-embutido

O método semi-embutido proposto por Durand (2008) utiliza uma abordagem de inclusões de reforços combinando o método discreto e o método embutido. Os elementos de reforço são discretizados em segmentos correspondentes a cada elemento atravessado. Posteriormente, os segmentos são considerados como elementos de barra e são conectados aos sólidos por meio de elementos de interface. A Figura 2(a) apresenta o elemento de barra discretizado pela abordagem semi-embutida. Nesta figura nota-se que são formados pequenos segmentos de barra nas interseções entre os elementos de concreto. Já a Figura 2(b) apresenta de maneira esquemática a representação do elemento de junta. Nota-se que na figura o elemento de junta não apresenta espessura, porém este elemento é responsável pela ligação entre o reforço e o elemento reforçado. A formulação para estes elementos de interface pode ser encontrada em Durand (2008) e Durand e Farias (2012).

A Figura 3 mostra o elemento de junta utilizado em análises tridimensionais. Nesta figura os círculos azuis representam os nós do elemento de junta que serão ligados ao elemento atravessado. De maneira análoga os círculos vermelhos representam nós que serão ligados ao elemento de reforço (barra). Por fim, os círculos brancos representam as posições iniciais dos elementos de barra e permanecem fixos no elemento atravessado. A Figura 4 mostra, de maneira esquemática, a superposição do elemento de junta, o elemento sólido e o elemento de barra de forma a obter um elemento com reforço.

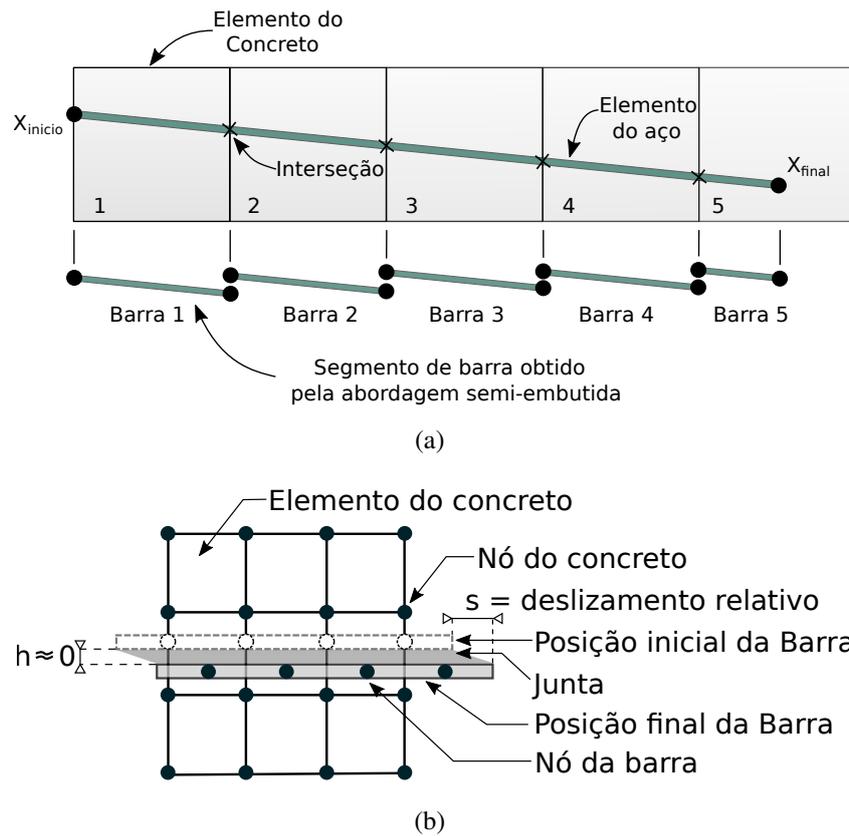


Figura 2: (a) Representação da discretização da armadura pela abordagem semi-embutida (Durand e Farias, 2012); (b) Representação do elemento reforçado pelo método semi-embutido

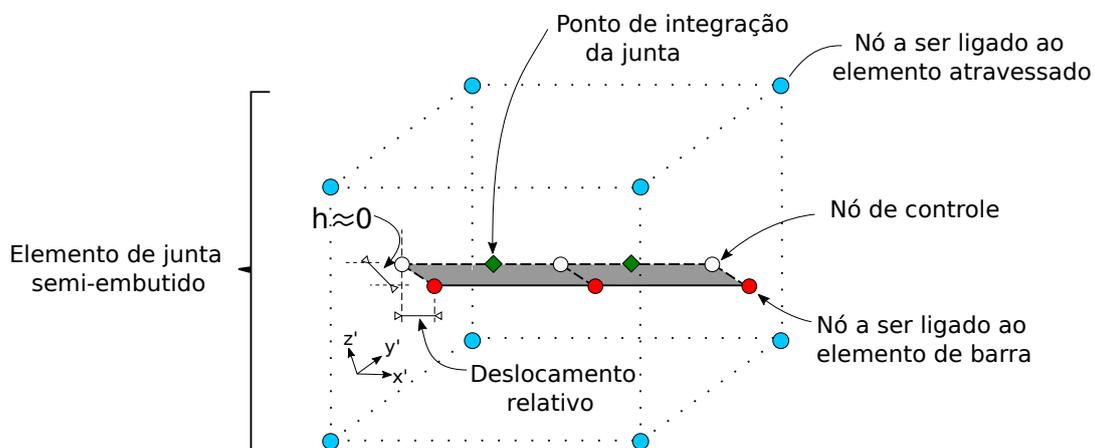


Figura 3: Representação do elemento de junta no espaço Tridimensional (Durand e Farias, 2012)

Na abordagem semi-embutida, os nós dos elementos de barra fazem parte do sistema global gerando assim mais graus de liberdade. Dessa maneira, diferentemente do método embutido, na abordagem semi-embutida é possível a aplicação de condições de contorno nos nós das barras, o que permite, por exemplo, simulações de ensaios de arrancamento. Além disso, o método semi-embutido permite a consideração de diferentes propriedades de interface, sendo possível a simulação de reforços atravessando diferentes materiais.

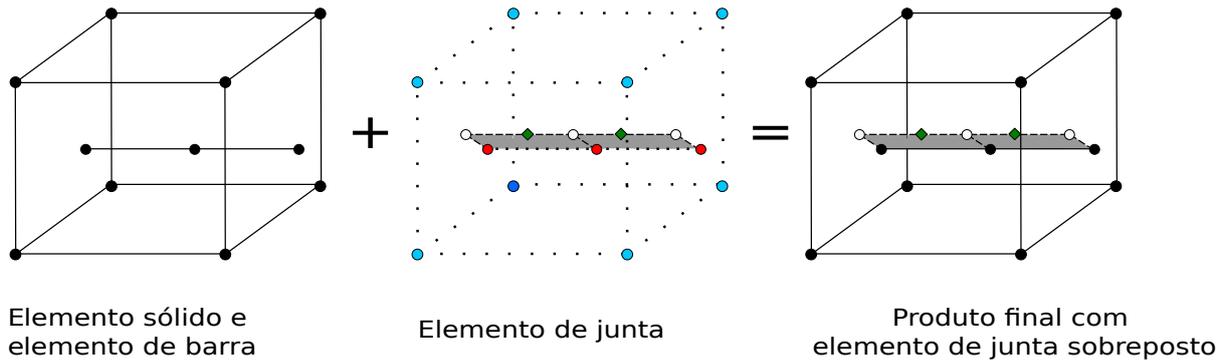


Figura 4: Representação de maneira esquemática da superposição dos elementos de junta.

## 2.4 Modelo constitutivo dos materiais

A análise em elementos finitos está ligada diretamente aos modelos constitutivos dos materiais. Estes modelos permitem aproximar o comportamento tensão-deformação do material. Assim, o emprego do modelo constitutivo do material e a seleção dos parâmetros apropriados são de suma importância para obtenção de resultados próximos da realidade.

### Concreto

Para o concreto foi utilizado um modelo constitutivo proposto por Kotsovos (2015), o qual está formulado no espaço tridimensional. A abordagem utilizada neste modelo está baseada em fissuras distribuídas com previsão de até três fissuras no mesmo ponto de integração. Neste modelo, a relação constitutiva sem fissuras é dada pela Lei de Hooke generalizada de acordo com:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2G + \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

onde  $G$  e  $\mu$  são o módulo cisalhante e o módulo volumétrico respectivamente. Quando o estado de tensão no ponto de Gauss atinge a tensão máxima é formado um plano de fissura, que é ortogonal a direção da tensão principal. Com a formação da fissura em tração em uma dada direção, parte da rigidez é perdida e os componentes da matriz no plano onde ocorreu a fissura são zerados. Sendo assim, assumindo que a primeira trinca ocorre no plano do eixo  $z'$  a matriz

constitutiva, após o surgimento da trinca, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{x'} \\ \Delta\sigma_{y'} \\ \Delta\sigma_{z'} \\ \Delta\tau_{xy'} \\ \Delta\tau_{xz'} \\ \Delta\tau_{yz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \mu & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{x'} \\ \Delta\varepsilon_{y'} \\ \Delta\varepsilon_{z'} \\ \Delta\gamma_{xy'} \\ \Delta\gamma_{xz'} \\ \Delta\gamma_{yz'} \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde  $\beta$  é um fator de retenção ao cortante e, segundo Kotsovos (2015), os valores sugeridos para o concreto são de 0.1 a 0.5. Com o aumento do carregamento se o ponto de Gauss atingir a tensão máxima em tração em uma segunda direção é formado um novo plano de fissura. Seja  $y''$  a direção paralela à linha de interseção dos planos, das duas trincas, a relação tensão-deformação para o ponto de integração agora com a segunda fissura é dado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{x''} \\ \Delta\sigma_{y''} \\ \Delta\sigma_{z''} \\ \Delta\tau_{xy''} \\ \Delta\tau_{xz''} \\ \Delta\tau_{yz''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{x''} \\ \Delta\varepsilon_{y''} \\ \Delta\varepsilon_{z''} \\ \Delta\gamma_{xy''} \\ \Delta\gamma_{xz''} \\ \Delta\gamma_{yz''} \end{bmatrix} \quad (3)$$

por fim, quando formada a terceira e última trinca, o elemento somente apresenta resistência cisalhante e a relação tensão-deformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Com este modelo é possível prever com certa precisão a carga máxima para abertura de primeira fissura. Por outro lado, por se tratar de um modelo simplificado, o mesmo não prevê a redução contínua da rigidez cisalhante após a ruptura, o que pode acarretar no aumento da resistência ao cisalhamento.

## Aço

O modelo constitutivo empregado para simulações de fibras foi o modelo uniaxial perfeitamente elasto-plástico. A curva idealizada de tensão-deformação é apresentada na Figura 5.

Nesta figura é possível observar duas regiões. A primeira delas (zona elástica), dar-se quando  $\sigma < \sigma_p$  onde  $\sigma$  é a tensão normal e  $\sigma_p$  é a tensão de escoamento do material. Quando a tensão atuante atinge o valor da tensão de escoamento ( $\sigma = \sigma_p$ ) começa a região plástica.

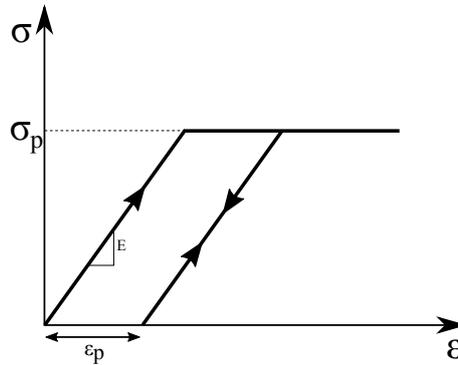


Figura 5: Curva tensão-deformação

A relação entre tensão e deformação específica para este modelo é dada pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (5)$$

### Interface aço-concreto

O modelo constitutivo utilizado para a interface aço-concreto foi um "Modelo Multilinear", baseado na relação "Tensão de aderência versus deslizamento", sugerida no Código CEB-FIP (2010). Neste código as tensões de aderência locais ( $\tau$ ) são obtidas em função do deslizamento ( $S$ ). A curva padrão do modelo CEB-FIP e a curva utilizada nas simulações são apresentadas na Figura 6. Os deslizamentos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são valores representativos onde se tem mudança significativa no comportamento tensão-deformação. O modelo proposto pelo Código foi aproximado em retas, pelo fato da região inicial até ( $S_1$ ) ser muito pequena e pela facilidade de implementação.

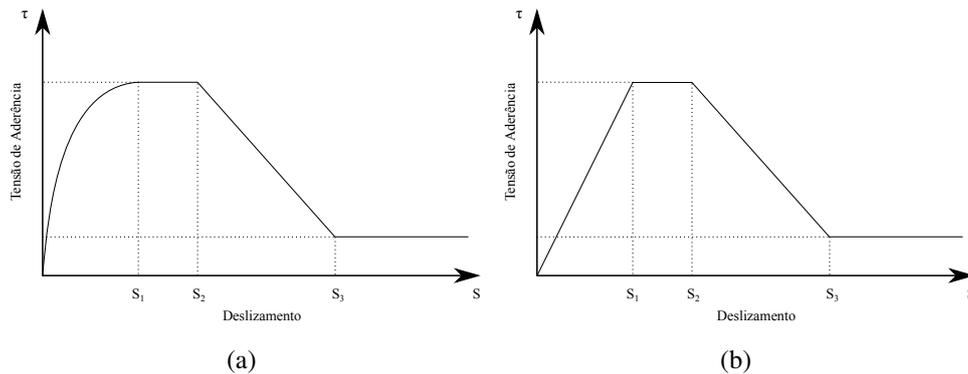


Figura 6: (a) Curva do Código Modelo CEB-FIP; (b) Modelo multilinear utilizado

O modelo CEB-FIP descreve a tensão de aderência em função do deslizamento dividido em quatro estágios. O primeiro estágio da curva é dada pela parte ascendente onde  $0 \leq S \leq S_1$

sendo que a relação de tensão é dada por:

$$\tau = \tau_{max} \left( \frac{S}{S_1} \right)^\alpha \quad (6)$$

onde:  $\tau$  é a tensão cisalhante no contato aço-concreto,  $\tau_{max}$  é a tensão cisalhante máxima e  $\alpha$  é uma constante utilizada para calibrar o ramo ascendente. Para casos onde  $S_1 < S \leq S_2$  a tensão é dada por:

$$\tau = \tau_{max} \quad (7)$$

por sua vez, em casos onde  $S_2 < S \leq S_3$  a tensão é dada por:

$$\tau = \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left( \frac{S - S_2}{S_3 - S_2} \right) \quad (8)$$

onde  $\tau_f$  é a tensão cisalhante última.

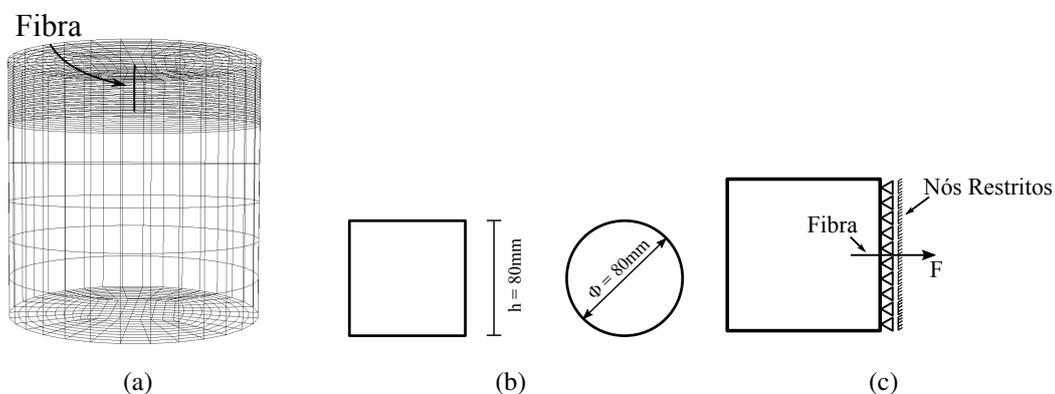
Por fim, se  $S_3 < S$  a equação é dada por:

$$\tau = \tau_f \quad (9)$$

### 3 METODOLOGIA

Neste trabalho são estudados ensaios experimentais de dois autores que trabalharam com concreto reforçado com fibras. Inicialmente foram realizados ensaios de arrancamento de uma fibra simples inserida no sólido para a verificação dos parâmetros de contato. Neste, os parâmetros, assim como as dimensões do corpo de prova, foram retirados de Cunha (2010). Neste ensaio foram utilizados três tipos de fibra com propriedades mecânicas diferentes e seções transversais diferentes.

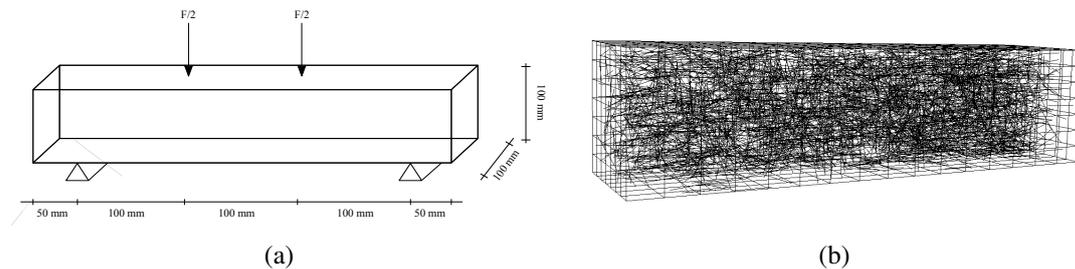
A Figura 7 apresenta as dimensões dos corpos de prova simulados numericamente. Além disso, a figura apresenta, de maneira esquemática, as condições de contorno aplicadas ao modelo e o corpo de prova simulado. Observa-se, na figura, que a fibra se encontra ao longo do eixo central do corpo de prova.



**Figura 7: (a) Corpo de prova ensaiado com a malha de elementos finitos; (b) Dimensão do corpo de prova ensaiado; (c) Representação esquemática das condições de contorno**

O ensaio de arrancamento auxiliou na obtenção de parâmetros para a realização do segundo ensaio que se trata de uma viga bi apoiada sujeita a flexão. A simulação realizada foi um ensaio de quatro pontos. As características da viga são as mesmas do ensaio experimental de Yoo et al. (2015). No estudo o volume de fibras usado foi de 0.5% totalizando 3395 fibras inseridas no volume da viga.

A Figura 8(a) apresenta as dimensões da viga ensaiada numericamente, assim como, as condições de contorno aplicadas ao domínio. Observa-se na figura o afastamento de 50 mm das faces até os apoios e que a distância entre apoios é de 300 mm. As forças aplicadas ao modelo foram impostas a um terço do vão como mostrado na figura. Por sua vez, a Figura 8(b) apresenta a viga discretizada em 7 divisões na direção do eixo  $x$ , 16 divisões no eixo  $y$  e 7 divisões no eixo  $z$ .



**Figura 8: (a) Representação esquemática do ensaio de flexão; (b) Visualização no ParaView da viga ensaiada à flexão**

Para as análises, foi utilizada uma biblioteca de elementos finitos programada em uma linguagem de alto desempenho chamada *Julia*. A biblioteca é chamada de *FemLab*. A *FemLab* possui diversas funções, dentre elas a criação de malhas e soluções por meio dos MEF. Esta biblioteca é capaz de resolver problemas de elementos finitos tridimensionais, como os propostos neste trabalho. Os modelos constitutivos implementados, nesta biblioteca, permitem que sejam feitas análises de materiais com comportamentos não lineares. O programa para visualização das análise pós processamento utilizado foi o *ParaView*, de acesso gratuito e diversos recursos.

Por fim, o método utilizado nas análises foi o método dos elementos finitos (MEF), onde a inclusão foi por meio do método semi-embutido. Com estes métodos é possível a análise em domínios onde se tem inclusões de fibras.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados de dois ensaios numéricos. Inicialmente um ensaio de arrancamento de uma fibra simples. Em seguida, a simulação do ensaio de quatro pontos de uma viga reforçada com fibras.

### 4.1 Simulação de ensaios de arrancamento de fibra

O ensaio de arrancamento foi realizado com três tipos de fibras variando as áreas da seção transversal e resistência última. Os parâmetros necessários para o modelo do concreto proposto por Kotsovos e utilizado para cada análise estão apresentados na Tabela 1. Esta tabela apresenta as propriedades necessárias para utilização do modelo. Com estes parâmetros a ferramenta

computacional *FemLab* determina as tensões no modelo e, conseqüentemente, o surgimento de trincas. Ainda nesta tabela,  $f_t$  representa a resistência a tração do concreto,  $\beta$  é o fator de redução ao cortante,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do concreto e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

**Tabela 1: Parâmetros necessários para o modelo de Kotsovos.**

$E_c$ [GPa]	$\nu$	$\beta$	$f_t$ [MPa]
28.7	0.2	0.3	3.91

Para simular a fibra inserida, foi utilizado o modelo perfeitamente elasto-plástico, com propriedades mecânicas e geométricas apresentadas na Tabela 2, para cada tipo de fibra. Nesta tabela,  $f_y$  é a resistência última da fibra e ( $E$ ) o módulo de elasticidade.

**Tabela 2: Propriedades mecânicas das fibras usadas.**

Tipo de Fibra	$E_s$ [GPa]	Área [ $mm^2$ ]	$f_y$ [Mpa]
A	200	0.43	1313
B	200	0.899	1153
C	200	0.43	1184

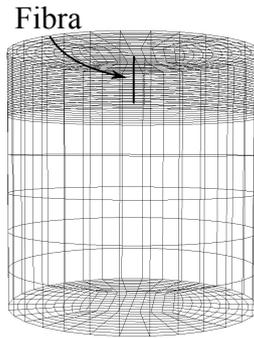
Os parâmetros utilizados para o modelo de interface entre aço-concreto estão apresentados na Tabela 3. Com tais parâmetros apresentados, o modelo é capaz de prever a decréscimo da tensão de aderência entre o concreto e a fibra.

**Tabela 3: Parâmetros para o modelo da interface aço-concreto.**

Tipo	$K_s$ [GPa/mm]	Diâmetro[mm]	$S_1$ [mm]	$S_2$ [mm]	$S_3$ [mm]	$\tau_{res}$ [MPa]
A	31.5	0.74	0.15	0.180	0.2	4.30
B	17.1	1.07	0.40	0.401	1.0	3.96
C	8.60	0.74	0.50	1.250	2.0	2.86

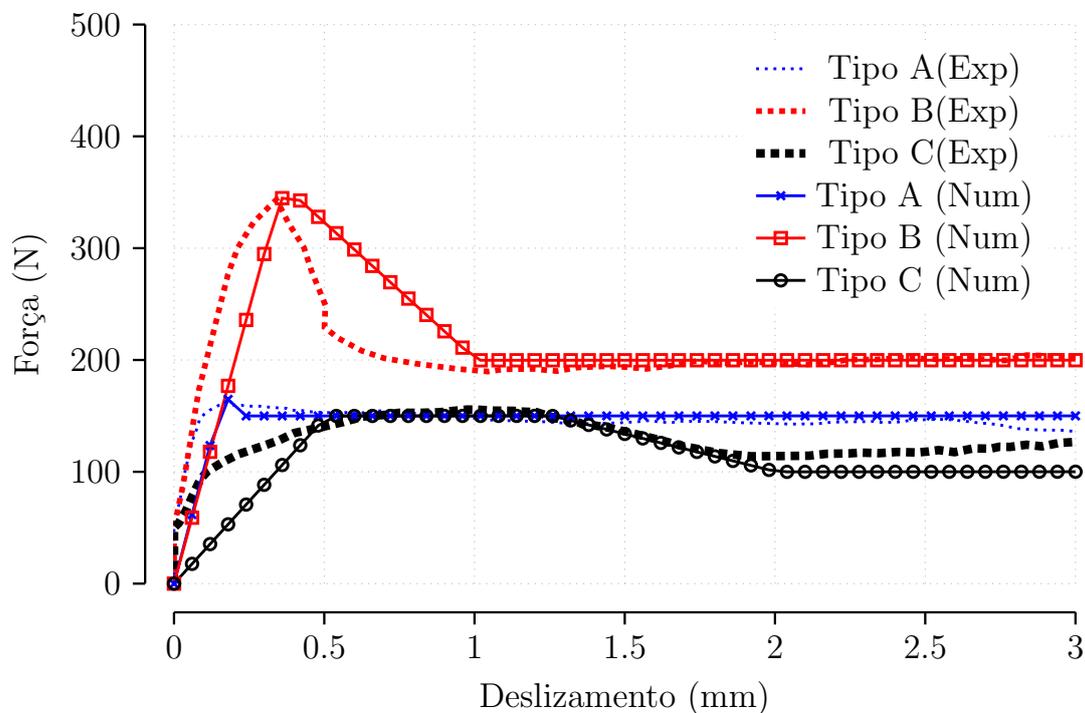
O corpo de prova ensaiado está apresentado na Figura 9. Nesta figura o corpo de prova possui 10578 elementos e 11478 nós. Dentre os elementos estão os elementos sólidos, de barra e de interface. A fibra está localizada ao longo do eixo central do corpo de prova, com comprimento embutido de 15 mm. Na região onde está localizada a fibra o corpo de prova foi melhor discretizado, para melhor acurária dos resultados.

No último nó da fibra localizado na extremidade superior foi aplicado um deslocamento prescrito de 2 mm. Os nós dos elementos sólidos na face superior tiveram o deslocamento restrito em todas as direções, permitindo assim o deslizamento da fibra. A representação esquemática do ensaio, assim como as condições de contorno podem ser vistas na Figura 7. Com a definição dos parâmetros e condições de contorno aplicadas o ensaio de arrancamento foi realizado.



**Figura 9: Vista frontal da malha do corpo para o ensaio de arrancamento.**

Os resultados obtidos nesta simulação numérica foram comparados com os resultados experimentais de Cunha (2010). A Figura 10 apresenta os resultados da força de arrancamento versus deslizamento obtidos de maneira experimental e numérica para os três tipos de fibra. Além disto, nota-se que as curvas numéricas aproximam-se das curvas experimentais. A curva para a fibra Tipo C foi a que apresentou os resultados mais discrepantes, dado que o modelo utilizado não se ajusta apropriadamente ao ensaio. A curva para a fibra Tipo B foi a que apresentou resultados mais próximos, visto que o pico para os resultados experimentais não oscila como no caso da fibra Tipo C. A fibra Tipo A apresentou a curva razoavelmente próxima a curva numérica, tendo os com resultados na parte inicial um pouco mais divergentes, enquanto que na parte final as duas curvas ficam próximas. Com a comparação dos resultados pode ser verificado o modelo e os parâmetros utilizado dado que os valores obtidos são próximos dos reais.



**Figura 10: Forças de arrancamentos versus deslocamentos**

## 4.2 Simulação do ensaio de quatro pontos

Os parâmetros usados na simulação do ensaio de arrancamento das fibras de aço foram utilizados para a simulação numérica do ensaio de uma viga bi apoiada. Neste ensaio as dimensões são de 100 x 400 x 100 mm, conforme Figura 8(a) com volume de fibras igual a 0.5%, este volume foi o mesmo utilizado por Yoo et al. (2015) e totaliza 3395 fibras inseridas ao longo da viga. Nesta viga foi aplicado um deslocamento prescrito de 0.2 mm nos nós localizados a um terço do vão, como mostrado na Figura 8(a). Os nós da base, localizados a 50 mm e 350 mm, foram restritos em todas as direções. Na Figura 8(b) o número de divisões nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$  são de 7, 16, 7, respectivamente, gerando um total de 23908 elementos sendo eles elementos sólidos, de barra e de interface. Com isso, o número total de nós é de 27607, com mais 100000 graus de liberdade. A posição das fibras foram distribuídas ao longo da viga de maneira aleatória por meio de uma estrutura de repetição. O modelo utilizado para as fibras foi o modelo perfeitamente elasto-plástico.

As propriedades mecânicas e geométricas das fibras utilizadas neste ensaio podem ser vistos na Tabela 4, onde são apresentados o módulo de elasticidade ( $E$ ), o comprimento ( $L$ ), o diâmetro ( $\phi$ ) e, por fim, a resistência última ( $f_y$ ) da fibra. Estes parâmetros foram obtidos experimentalmente por Yoo et al. (2015).

**Tabela 4: Propriedades das fibras utilizadas.**

$E_s$ [GPa]	$L$ [mm]	$\phi$ [mm]	$f_y$ [MPa]
200	30	0.5	1195.5

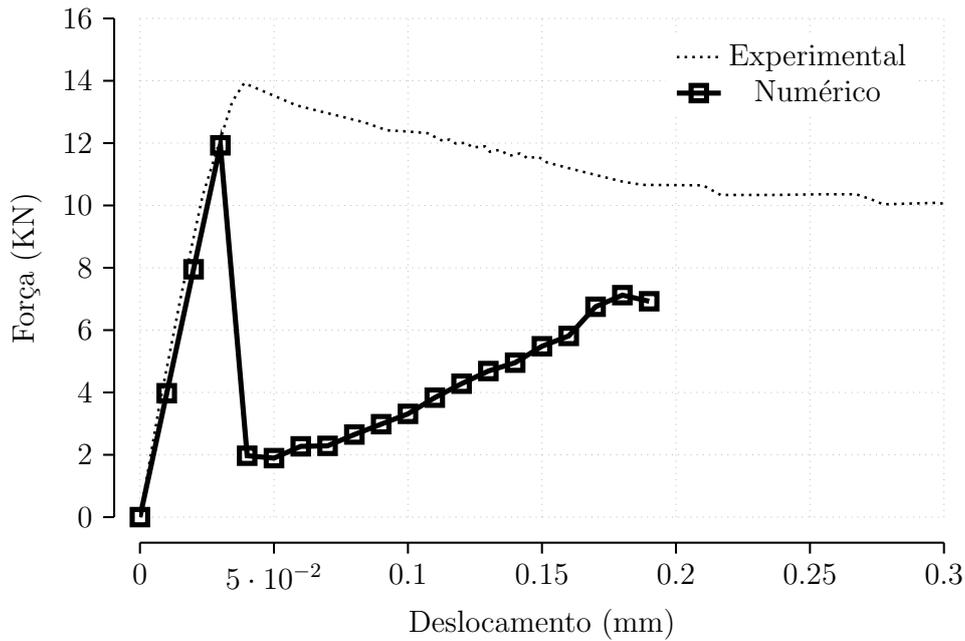
O modelo usado para o concreto foi o modelo proposto por Kotsovos. Os parâmetros necessários são apresentados na Tabela 5. Esta tabela apresenta o módulo de elasticidade tangente  $E$ , obtido experimentalmente, o coeficiente de Poisson  $\nu$  do concreto, o fator de retenção ao cortante  $\beta$  e resistência última à tração do concreto  $f_t$ .

**Tabela 5: Parâmetros para o modelo de Kotsovos.**

$E_c$ [GPa]	$\nu$	$\beta$	$f_t$ [MPa]
28.7	0.2	0.3	3.91

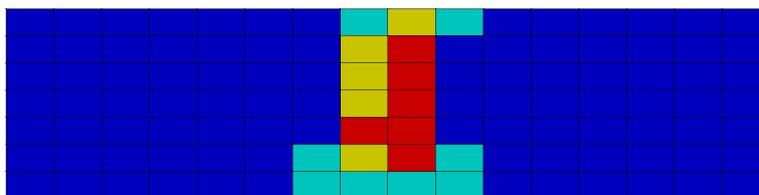
Os resultados da análise numérica e experimental são mostrados na Figura 11. Esta apresenta o gráfico de força versus deslocamento de um nó localizado na parte inferior e no meio do vão. Nesta figura pode-se observar que as forças para o pico do ensaio numérico e experimental são razoavelmente próximas. Os deslocamentos onde ocorre a força máxima também são próximos. Com isso, o modelo para o concreto usado neste artigo prevê, razoavelmente, bem a força máxima para abertura da primeira fissura. Além disto, no ensaio numérico observa-se um aumento na força após a abertura da primeira fissura. Este fato ocorre devido às limitações do modelo que não é capaz de prever a redução contínua da rigidez cisalhante após o início da fissuração.

O método semi-embutido utilizado nestas análises permite a estimativa das tensões axiais das fibras no local da abertura das fissuras. Para o ensaio de flexão o carregamento provocou o



**Figura 11: Curva força versus deslocamento**

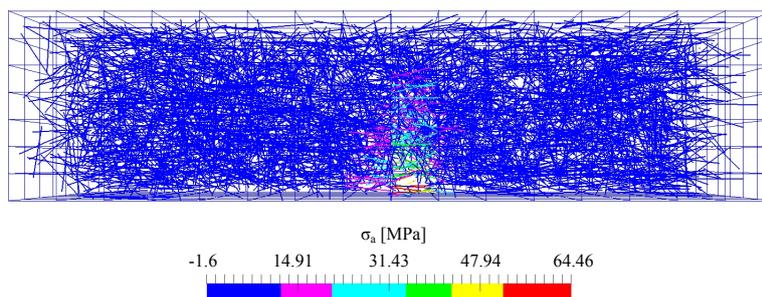
surgimento de fissuras nos pontos de integração de alguns elementos. A Figura 12 apresenta os elementos onde os pontos de Gauss atingiram a tensão máxima admissível e, com isso, apresentaram fissuras. Nesta figura os elementos em cor ciano representam elementos com apenas uma trinca em pelo menos um ponto de integração. Já os elementos de cor amarela representa duas trincas em pelo menos um ponto de integração devido ao carregamento aplicado. Por sua vez, os elementos em cor vermelha representam os elementos com três trincas. Por fim, os elementos em cor azul escuro representa os elementos que não apresentaram fissuras em seus pontos de Gauss.



**Figura 12: Vista frontal da malha de elementos finitos destacando os elementos com trinca: 3 trincas cor vermelha, 2 trincas cor amarela e 1 trinca cor ciano.**

A Figura 13 apresenta a distribuição das tensões axiais nas fibras. Nota-se na figura que as fibras são solicitadas a medida que ocorrem as fissuras nos pontos de integração. Com isso, observa-se que as fibras mais solicitadas, em cor vermelha, estão localizadas na região central da viga onde ocorreram as fissuras. Estas apresentam tensão máxima de tração de 64.46 MPa. Estes valores mostram que mesmo as fibras mais solicitadas apresentaram tensão inferior à

tensão de ruptura que é de 1195.5 MPa



**Figura 13: Distribuição de tensão axial nas fibras da viga em MPa**

## 5 CONCLUSÃO

Com o trabalho realizado pode-se concluir que o método dos elementos finitos com a inclusão de reforço por meio do método semi-embutido apresentam resultados satisfatórios com previsão de carga máxima no arrancamento e flexão. Uma das vantagens na utilização do método semi-embutido é que este permite calcular o deslizamento relativo da fibra em relação ao concreto. Isto é, o método semi-embutido não considera uma aderência perfeita entre a fibra e o concreto, o que proporciona uma simulação mais próxima da realidade, uma vez que pode ocorrer o rompimento da interface formada entre fibra-concreto. Uma desvantagem do método é o aumento no grau de liberdade do sistema global, uma vez que são considerados todos os nós dos elementos de barra (fibras). Este inconveniente gera limitações computacionais devido ao tempo de processamento. Além disso, foi verificado que o método semi-embutido permite facilmente a aplicação de condições de contorno diretamente nos nós dos elementos de reforço e com isso a realização de ensaios como o de arrancamento. Os resultados das simulações e arrancamento das fibras simples apresentaram boa coerência quando comparados com os resultados experimentais. Por outro lado, no ensaio de flexão o modelo utilizado para o concreto apresentou algumas limitações, dentre elas o aumento da tenacidade pós fissuração. Além disto, outra limitação deste modelo é que pode apresentar muitos problemas de convergência, uma vez que ocorre quedas súbitas na resistência do compósito. Por outro lado, este é capaz de prever razoavelmente bem a carga máxima resistente da peça estrutural. Por fim, conclui-se que para obtenção de resultados mais próximos da realidade, no ensaio de flexão pós carga máxima, é necessário a utilização de modelos constitutivos mais precisos para o concreto.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos órgãos de fomento CAPES/CNPq pelo auxílio financeiro.

## REFERÊNCIAS

Cunha, V. M. C. F. (2010). "Steel fibre reinforced self-compacting concrete - from micro-mechanics to composite behaviour". Tese de doutorado. University of Minho, p. 365.

- Cunha, V. M. C. F, J. A. O. Barros e J. M. Sena-Cruz (2011). “An integrated approach for modelling the tensile behaviour of steel fibre reinforced self-compacting concrete”. Em: *Cement and Concrete Research* 41.1, pp. 64–76.
- Durand, F. R. D. (2008). “Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem”. Tese de doutorado. Universidade de Brasília, p. 176.
- Durand, R e M. M Farias (2012). “Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement bars using finite elements”. Em: *Blucher Mechanical Engineering Proceedings* 1.1, pp. 3253–3268.
- Kotsovos, M. D. (2015). *Finite-element Modelling of Structural Concrete: Short-term Static and Dynamic Loading Conditions*. CRC Press.
- Li, Victor C., Youjiang Wang e Stanley Backer (1991). “A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites”. Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39.5, pp. 607–625.
- Mihai, Iulia C, Anthony D Jefferson e Paul Lyons (2016). “A plastic-damage constitutive model for the finite element analysis of fibre reinforced concrete”. Em: *Engineering Fracture Mechanics*.
- Mohamed, Maalej, Victor C. Li e Toshiyuki Hashida (1995). “Effect of fiber rupture on tensile properties of short fiber composites”. Em: *Journal of engineering mechanics* 121.8, pp. 903–913.
- Sena-Cruz, J. M. (2005). “Strengthening of concrete structures with near-surface mounted CFRP laminate strips”. Tese de doutorado. University of Minho, p. 216.
- Van Hauwaert, A e J.G.M. Van Mier (1998). “Computational modelling of the fibre-matrix bond in steel fibre reinforced concrete”. Em: *Fracture mechanics of concrete structures, Freiburg, Germany*, pp. 561–71.
- Yoo, Doo-Yeol, Young-Soo Yoon e Nemkumar Banthia (2015). “Flexural response of steel-fiber-reinforced concrete beams: Effects of strength, fiber content, and strain-rate”. Em: *Cement and Concrete Composites* 64, pp. 84–92.
- Zienkiewicz, Olgierd Cecil e Robert Leroy Taylor (2000). *The finite element method: The Basis*. Vol. 1. Butterworth-heinemann.