

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

ESTRATÉGIA COM MATRIZES EXPLÍCITAS PARA SOLUÇÃO NÃO LINEAR FÍSICA DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D

Caetano, Phillipe Gomes da Silva

Barros, Wesley Michel

Ribeiro, Paulo Marcelo Vieira

phllcaetano@yahoo.com.br

wesleymef@gmail.com

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências

Departamento de Engenharia Civil

Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 50740-530, Pernambuco, Recife, Brasil

Abstract. *Nas análises estruturais usuais adotam-se modelagens lineares que aproximam as respostas. Porém, com o advento computacional e a necessidade de obter respostas mais precisas, as análises não lineares físicas estão sendo cada vez mais empregadas. Portanto, neste trabalho é apresentado um modelo para análise não linear física, aplicado à elasticidade bidimensional através do método dos elementos finitos. Para tanto, o modelo emprega estratégias para solução da não linearidade por meio de processo iterativo, a saber: matriz constitutiva desacoplada, relação multilinear, Método de Newton Raphson com incremento de carga e módulo secante. Este processo demanda custo computacional, por isto, justifica-se o emprego das matrizes explícitas no desenvolvimento de elementos lineares tipo T6. Objetivo: Apresentar um programa desenvolvido em Matlab (2015) e validar através de exemplos e software comercial. Conclusões: Das estratégias resulta uma abordagem prática, com solução compatível em relação à software comercial. O elemento T6 obteve melhores resultados e um custo computacional menor em relação ao elemento T3.*

Keywords: *Não linearidade física, elementos finitos, elasticidade bidimensional, matrizes explícitas, multilinear.*

1 INTRODUÇÃO

Nas análises estruturais usuais adotam-se modelagens lineares que permitem determinar os deslocamentos, as deformações e as tensões, essas respostas são relevantes para os projetos de engenharia. Os modelos lineares assumem hipóteses que simplificam as análises e aproximam as respostas de forma razoável. No entanto, com o desenvolvimento computacional e a necessidade de obter respostas mais precisas para projetos condicionados ao alto desempenho da estrutura, as análises não lineares físicas ou geométricas estão sendo cada vez mais empregadas por engenheiros e demandam atenção especial.

Dito isto, neste trabalho é apresentado um modelo matemático para análise não linear física, aplicado à elasticidade bidimensional através do método dos elementos finitos. Como exemplos de pesquisas relacionadas a não linearidade física podemos citar Darwin et al. (1977), Vecchio (1989), Vecchio et al. (1997), Jagd (1997).

A não linearidade física indica que as propriedades do material consideradas nas relações constitutivas dos elementos não permanecem constantes. Assim, os valores do módulo de elasticidade se atualizam e são obtidos numericamente pelas secantes à curva tensão-deformação do material. Segundo Vecchio (1989), esta abordagem pode ser tão bem sucedida como a atualização por meio das tangentes à curva tensão-deformação, ao ser menos restritiva sobre a natureza das relações constitutivas que podem ser implementadas ou os procedimentos numéricos adotados.

Esta atualização é realizada por incrementos de carga e processo iterativo a fim de atingir o equilíbrio da estrutura através do método de *Newton-Raphson modificado* e do algoritmo adotado por Vecchio et al. (1997). Este processo iterativo demanda um custo computacional, por isto, justifica-se o emprego das matrizes explícitas no desenvolvimento de elementos lineares ou de ordem superior, que evitam as integrações numéricas das matrizes dos elementos.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um código desenvolvido em Matlab (2015) para análise não linear de problemas em elasticidade bidimensional por meio de um modelo constitutivo multilinear e desacoplado (Vecchio, 1989; Vecchio et al., 1997; Jagd, 1997), assim como validar o código através de exemplos de análise estrutural e software comercial.

2 ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos fundamentais de elasticidade bidimensional relacionados aos problemas de estado plano de tensão, a fim de compreender o desenvolvimento das equações governantes em elementos finitos triangulares.

Inicialmente será admitido que o elemento é perfeitamente elástico e constituído por um material homogêneo, dessa hipótese resulta que as propriedades físicas são as mesmas para qualquer elemento infinitesimal. Em seguida, será apresentado modelos constitutivos para material elástico com propriedades físicas não lineares.

2.1 Estado plano de tensões

De acordo com Timoshenko et al. (1980), no plano de tensões assume-se que em uma placa fina carregada por forças aplicadas no plano x - y , as componentes de tensão $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ em ambas as faces e no interior da placa (Fig. 1.a). Assim, o estado plano de tensões

é especificado somente por σ_x , σ_y e τ_{xy} . Essas tensões são funções independentes de z e representadas pelo vetor abaixo:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T \quad (1)$$

onde σ_x e σ_y são tensões normais atuando na mesma direção que a face normal correspondente e τ_{xy} é a tensão cisalhante composta por duas componentes paralelas aos eixos x - y (Fig. 1.b).

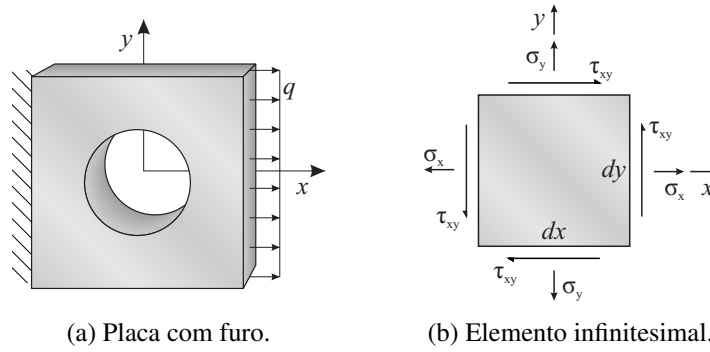


Figura 1: Exemplos de problemas de estado plano de tensão.

As tensões atuantes estão relacionadas com as deformações do elemento infinitesimal, as quais são indicadas por ε_x , ε_y e γ_{xy} , conforme o vetor:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T \quad (2)$$

onde ε_x e ε_y são deformações normais e γ_{xy} é deformação cisalhante. As duas primeiras ocasionam alterações na área através de deformações laterais e a última produz uma distorção angular no vértice do elemento.

A deformação linear em x devida à tensão normal σ_x é dada pela *Lei de Hooke*. Esta lei estabelece que a tensão é diretamente proporcional a deformação entre certos limites, assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \quad (3)$$

onde E_x é a constante elástica do material na direção do eixo x , chamada de *módulo de elasticidade*.

Ao mesmo tempo, a deformação linear em x é acompanhada por uma deformação lateral, de forma que a razão entre a deformação lateral e axial é dada pela expressão:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \therefore \varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x = -\nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x} \quad (4)$$

onde ν_{xy} é constante entre certos limites elásticos e chamado de *coeficiente de Poisson*. De forma análoga, obtemos as deformações normal e lateral devido à tensão σ_y :

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_x = -\nu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y} \quad (5)$$

Do mesmo modo que $\varepsilon = \sigma/E$, a deformação cisalhante é diretamente proporcional a tensão cisalhante através da relação:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (6)$$

onde G_{xy} é uma constante que depende das propriedades físicas do material, chamada de *módulo de elasticidade transversal* e dada por:

$$\frac{1}{G_{xy}} \simeq \frac{1 + \nu_{yx}}{E_x} + \frac{1 + \nu_{xy}}{E_y} \quad (7)$$

Agora, rescrevendo as Eqs. (3), (4), (5) e (6) na forma matricial $\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}$, temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Finalmente, considerando a matriz inversa de $[S]$ obtemos a expressão em função das tensões, a saber:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx}E_x & 0 \\ \nu_{xy}E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde a matriz quadrática é chamada de matriz do material elástico ou constitutiva, com propriedades físicas lineares e designada por $[D]$. No caso do material isotrópico temos que $E_x = E_y = E$ e $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$.

2.2 Equações governantes

Além da matriz constitutiva, os problemas de elasticidade bidimensional são solucionados por meio de equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade. Em primeiro lugar, consideramos o equilíbrio de um elemento infinitesimal submetido a componentes de tensão e força de corpo (Fig. 2.a). Em seguida, apresentamos a relação entre deformações e deslocamentos e a condição de compatibilidade que precisa ser satisfeita (Fig. 2.b).

Na Figura 2.a consideramos o elemento de espessura unitária, assim como as tensões constante ao longo da espessura. Isto posto, efetuando o somatório das forças atuantes na direção x obtemos a equação de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \therefore \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{xy} dx + f_x dx dy = 0 \quad (10)$$

onde $f_x dx dy$ é a força de corpo por unidade de volume.

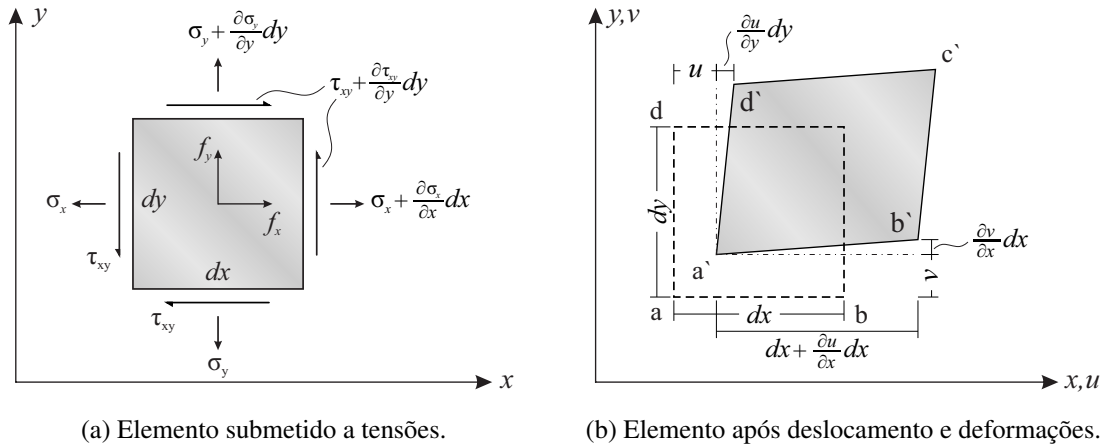


Figura 2: Equações diferenciais de equilíbrio e compatibilidade. Adaptado de Logan (2009)

Agora, simplificando e dividindo a Eq. (10) por $dx dy$, temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \tag{11}$$

Do mesmo modo, obtemos a equação de equilíbrio das forças atuantes na direção y , a saber:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \tag{12}$$

Assim sendo, temos um sistema com duas equações de equilíbrio e três componentes de tensões, o que caracteriza um sistema estaticamente indeterminado. Dito isto, precisamos adicionar uma equação ao sistema para resolução do problema a partir da relação entre deslocamento e deformação do elemento. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{13}$$

Agora, derivando a primeira das Eqs. (13) duas vezes em relação a y , a segunda duas vezes em relação a x e a terceira uma vez em relação a x e a outra em relação a y , obtemos:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \tag{14}$$

Em seguida, relacionando as Eqs. (14) encontramos a expressão abaixo:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{15}$$

onde a Eq. (15) é a *condição de compatibilidade* que precisa ser satisfeita para assegurar a existência de funções u e v relacionadas com as componentes de deformação (Timoshenko et al., 1980).

2.3 Material elástico não linear

Nesta seção, será considerado material homogêneo com propriedades físicas não lineares de tal forma que os termos E_x e E_y não permanecem constantes. Portanto, esses termos serão atualizados durante a análise por meio do modelo multilinear da relação tensão-deformação obtido mediante ensaios experimentais ou curvas conhecidas dos materiais.

Deste modo, a matriz constitutiva da Eq. (9) deverá estar em função apenas do módulo de elasticidade secante à curva do modelo multilinear. Para tanto, será considerado um modelo constitutivo desacoplado obtido através de $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0$, conforme Vecchio (1989), Jagd (1997), a saber:

$$[D] = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Agora, substituindo $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0$ na Eq. (7), obtemos a expressão para atualização do G_{xy} , a saber:

$$G_{xy} \simeq \frac{E_x E_y}{E_x + E_y} \quad (17)$$

Segundo CSI (2015), este modelo simplificado é adequado para muitas aplicações, tais como vigas, colunas, paredes de cisalhamento, tabuleiros de pontes, túneis, muros de contenção, entre outras. Desta forma, este modelo é empregado na análise estrutural de software comerciais, tais como SAP2000 (2009), MIDAS (1996), DIANA (2003).

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo será desenvolvido a formulação do método dos elementos finitos aplicada em problemas de elasticidade bidimensional, através do método de *Galerkin*. Assim como, a formulação básica dos elementos finitos de base triangular para discretização da placa, onde cada nó do elemento possui dois graus de liberdade.

3.1 Solução numérica das equações governantes

Segundo Kwon et al. (1996), aplicando o método dos resíduos ponderados nas Eqs. (11) e (12) obtemos o sistema abaixo:

$$\int_{\Omega} \left\{ w_1 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ w_2 \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (18)$$

Na Equação (18) podemos modificar o domínio da integração de $d\Omega$ para $dx dy$. Desta forma, alterando o domínio do primeiro termo referente à primeira equação:

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} w_1 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} w_1 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} w_1 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dx \quad (19)$$

Em seguida, aplicando integração por partes na Eq. (19) e simplificando os termos, obtemos a expressão:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega + \int_{y_1}^{y_2} w_1 \sigma_x \Big|_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_1}^{x_2} w_1 \tau_{xy} \Big|_{y_1}^{y_2} dx \quad (20)$$

Substituindo a Eq. (20) na Eq. (18) e procedendo de forma semelhante para a segunda equação do sistema, temos:

$$- \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} \right) \\ \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y \right) \end{array} \right\} d\Omega + \left\{ \begin{array}{l} \left(\int_{y_1}^{y_2} w_1 \sigma_x \Big|_{x_1}^{x_2} dy + \int_{x_1}^{x_2} w_1 \tau_{xy} \Big|_{y_1}^{y_2} dx \right) \\ \left(\int_{x_1}^{x_2} w_2 \sigma_y \Big|_{y_1}^{y_2} dx + \int_{y_1}^{y_2} w_2 \tau_{xy} \Big|_{x_1}^{x_2} dy \right) \end{array} \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} w_1 f_x \\ w_2 f_y \end{array} \right\} d\Omega = 0 \quad (21)$$

Na Equação (21), os três termos podem ser designados por forças internas, forças nodais equivalentes e força de corpo, respectivamente. Kwon et al. (1996) apresenta uma forma alternativa desta expressão, a saber :

$$- \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_1}{\partial y} \tau_{xy} \right) \\ \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \sigma_y \right) \end{array} \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ \begin{array}{l} w_1 \phi_x \\ w_2 \phi_y \end{array} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{l} w_1 f_x \\ w_2 f_y \end{array} \right\} d\Omega = 0 \quad (22)$$

na qual w_i é a função peso, Γ são as condições de contorno naturais e ϕ é dado por:

$$\phi_x = \sigma_x \eta_x + \tau_{xy} \eta_y \quad (23a)$$

$$\phi_y = \sigma_y \eta_y + \tau_{xy} \eta_x \quad (23b)$$

onde η_x e η_y são cossenos diretores de Γ .

Agora, reescrevendo o termo das forças internas na forma matricial e empregando as relações constitutivas das Eqs.(9) e (13), obtemos a expressão final do termo associado a matriz de rigidez e vetor de deslocamento:

$$[K]\{d\} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial y} & \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} d\Omega \quad (24)$$

3.2 Noções básicas e matriz de rigidez do elemento T3

Neste trabalho, o elemento triangular plano com três nós e deformações constantes é designado por T3 (Fig. 3). Segundo Logan (2009), este elemento básico é amplamente aplicado por causa da simplicidade das equações e da discretização de placas com forma irregular. Por outro lado, tem precisão limitada devido à aproximação linear do deslocamento produzindo deformações constantes (Oñate, 2009).

Na Figura 3.b, tanto o deslocamento u como v são interpolados por polinômios do primeiro grau utilizando as mesmas funções de forma, a saber:

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (25a)$$

$$v(x,y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \quad (25b)$$

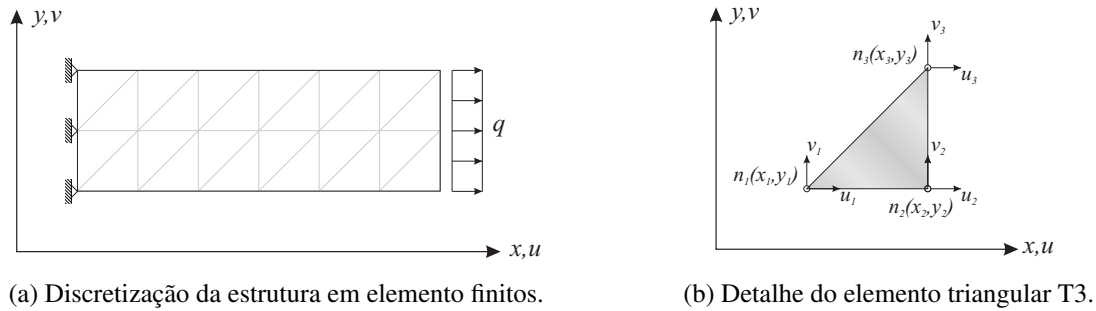


Figura 3: Exemplo de aplicação de elemento triangular plano tipo T3.

Agora, aplicando a relação entre deslocamentos e deformações da Eq. (13) na Eq. (25) e reescrevendo a expressão na forma matricial $\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Segundo Logan (2009), a matriz $[B]$ depende unicamente das coordenadas nodais do elemento e é dada pela expressão:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde A é a área do elemento triangular e determinada de acordo com as coordenadas dos vértices:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad \therefore A = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_1 (y_2 - y_3) + y_1 (x_3 - x_2)] \quad (28)$$

Considerando a função peso do método de *Galerkin* igual às funções de forma do elemento, ou seja, $w_1 = N_i$ e $w_2 = N_i$, com $i = 1, 2, 3$. Aplicando esta relação na Eq. (24) e substituindo o vetor de deformações conforme a Eq. (26) obtemos a expressão $[K_e]d$, na qual a matriz de rigidez do elemento:

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (29)$$

onde as matrizes $[B]$ e $[D]$ são constantes e independentes das coordenadas x e y .

Desta forma, considerando a espessura t constante e integrando em função da área A do elemento, obtemos a matriz explícita:

$$[K_e] = tA[B]^T [D] [B] \quad (30)$$

3.3 Noções básicas e matriz de rigidez do elemento T6

Neste trabalho, o elemento triangular plano com seis nós e deformações linear é designado por T6. Segundo Logan (2009), este elemento de ordem superior é aplicado em muitos programas comerciais e possui vantagens com relação ao elemento T3, tais como melhores resultados para tensões e deslocamentos para um dado número de nós.

Apesar da formulação matemática deste elemento ser compatível com o procedimento empregado no T3, será considerado a formulação de acordo com as coordenadas triangulares ou homogêneas (Fig. 4). Segundo Assan (2003), é necessário transformar as coordenadas de cartesianas para homogêneas e em seguida, deduzir as funções de forma em função destas coordenadas.

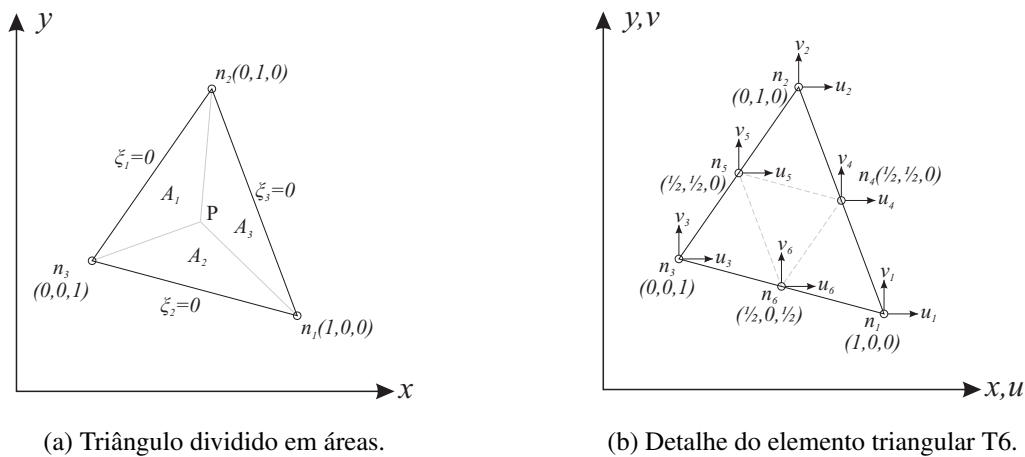


Figura 4: Elemento triangular plano tipo T6 em coordenadas homogêneas. Adaptado de Assan (2003)

Da Figura 4.a podemos deduzir as seguintes expressões a cerca das áreas do triângulo:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (31)$$

Portanto, as coordenadas homogêneas ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 estão relacionadas com as coordenadas cartesianas por meio da razão entre a área parcial e a área total. Assim, calculando A_1 , A_2 e A_3 de forma semelhante a Eq. (28) e substituindo as áreas parciais na Eqs. (31), temos:

$$\xi_1 = \frac{1}{2A} [x_2y_3 - x_3y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] \quad (32a)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2A} [x_3y_1 - x_1y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] \quad (32b)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2A} [x_1y_2 - x_2y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] \quad (32c)$$

Na Figura 4.b, os deslocamento u e v são interpolados por polinômios completos do segundo grau conforme o triângulo de *Pascal*, a saber:

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (33a)$$

$$v(x,y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 \quad (33b)$$

Agora, transformando as coordenadas cartesianas x e y em homogêneas ξ_1 e ξ_2 , obtemos as funções abaixo:

$$u(x,y) = c_1 + c_2\xi_1 + c_3\xi_2 + c_4\xi_1^2 + c_5\xi_1\xi_2 + c_6\xi_2^2 \quad (34a)$$

$$v(x,y) = c_7 + c_8\xi_1 + c_9\xi_2 + c_{10}\xi_1^2 + c_{11}\xi_1\xi_2 + c_{12}\xi_2^2 \quad (34b)$$

De acordo com Assan (2003), determinando os coeficientes $c_i (i = 1, 2, 3, \dots, 12)$, substituindo-os nas Eqs. (34) e explicitando as funções em relação aos deslocamentos nodais, obtemos:

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 \quad (35a)$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 + N_5v_5 + N_6v_6 \quad (35b)$$

onde N_i são funções de forma quadráticas, a saber:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1), & N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1), & N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1), & N_6 &= 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \quad (36)$$

Em seguida, reescrevendo a relação entre deslocamentos e deformações da Eq. (13) temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \quad (37a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \quad (37b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) \quad (37c)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (32) e (35) na Eqs. (37) e expressando o resultado na forma matricial $\{\varepsilon\} = [B]\{d\}$, obtemos a matriz $[B]$:

$$[B]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (4\xi_1 - 1) b_1 & 0 & (4\xi_1 - 1) a_1 \\ 0 & (4\xi_1 - 1) a_1 & (4\xi_1 - 1) b_1 \\ (4\xi_2 - 1) b_2 & 0 & (4\xi_2 - 1) a_2 \\ 0 & (4\xi_2 - 1) a_2 & (4\xi_2 - 1) b_2 \\ (4\xi_3 - 1) b_3 & 0 & (4\xi_3 - 1) a_3 \\ 0 & (4\xi_3 - 1) a_3 & (4\xi_3 - 1) b_3 \\ 4(\xi_2 b_1 + \xi_1 b_2) & 0 & 4(\xi_2 a_1 + \xi_1 a_2) \\ 0 & 4(\xi_2 a_1 + \xi_1 a_2) & 4(\xi_2 b_1 + \xi_1 b_2) \\ 4(\xi_3 b_2 + \xi_2 b_3) & 0 & 4(\xi_3 a_2 + \xi_2 a_3) \\ 0 & 4(\xi_3 a_2 + \xi_2 a_3) & 4(\xi_3 b_2 + \xi_2 b_3) \\ 4(\xi_1 b_3 + \xi_3 b_1) & 0 & 4(\xi_1 a_3 + \xi_3 a_1) \\ 0 & 4(\xi_1 a_3 + \xi_3 a_1) & 4(\xi_1 b_3 + \xi_3 b_1) \end{bmatrix} \quad (38)$$

onde $a_i = x_k - x_j$ e $b_i = y_j - y_k$ para $i, j, k = 1, 2, 3$.

Da formulação do elemento T3, sabemos que a matriz de rigidez é dada pela integral abaixo:

$$[K_e] = t \int [B]^T [D] [B] dA \quad (39)$$

Segundo Assan (2003), a integral da Eq. (39) requer muito tempo de processamento e uma estratégia para superar esse problema é a expressão para integral de elementos triangulares em coordenadas homogêneas, a saber:

$$\beta \int \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n dA = \beta \frac{l! m! n!}{(l + m + n + 2)!} \quad (40)$$

onde β é constante. Desta forma, obtemos os termos da matriz de rigidez explicita do elemento T6.

4 PROCEDIMENTOS E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção serão apresentados os procedimentos e aspectos computacionais empregados no desenvolvimento da solução numérica de problemas bidimensionais, com não linearidade física. Para tanto, desmembramos os procedimentos em pré-processamento, processamento e pós-processamento a fim de compreender o desenvolvimento do programa, com base no software comercial Matlab (2015).

4.1 Pré-processamento

Na fase de pré-processamento, o engenheiro introduzirá os dados do modelo referente ao problema bidimensional. Além disto, o programa definirá as variáveis globais e a pré-alocação de memória para o processamento, conforme os dados do modelo que abrange a geometria, as propriedades do material, a curva de tensão-deformação, as forças externas e as restrições aplicadas à geometria.

No caso da geometria, será empregado o software comercial Gid (2008) para discretização da placa em elementos finitos triangulares tipo T3 ou T6, a fim de obter o arquivo de texto (.msh), com as tabelas de coordenadas nodais e de conectividade dos elementos.

4.2 Processamento

Nesta fase do processamento, o programa analisará a solução numérica para o modelo definido na etapa precedente. No caso da análise não linear, o programa possui procedimentos e aspectos computacionais específicos em comparação à análise linear, na qual as etapas básicas são montagem da matriz de rigidez global e solução do sistema de equações lineares $[K_g]\{d\} = \{F\}$.

Para clarificar o processo da análise não linear, a Fig. (5) ilustra o fluxograma do programa, onde o processo será dividido em montagem da matriz de rigidez global, solução do sistema de equações não lineares, atualização dos parâmetros para próxima iteração.

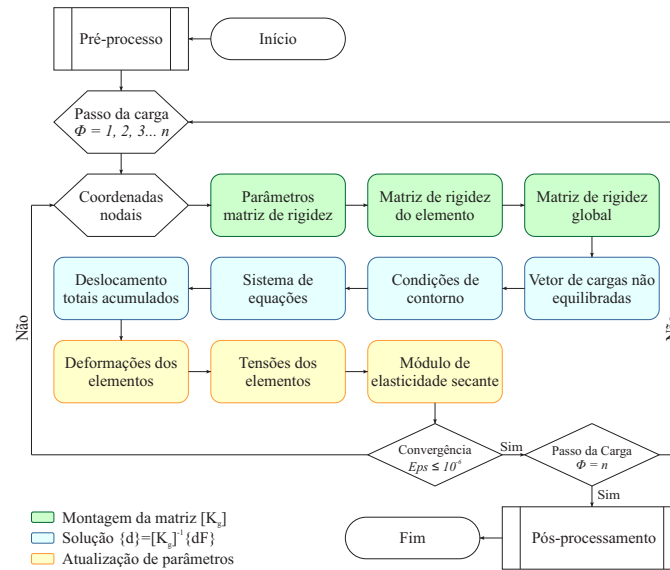


Figura 5: Fluxograma de processo do programa para análise não linear física.

Os procedimentos para análise não linear física consiste na solução do sistema de equações não lineares por meio do método de *Newton-Raphson*. Desta forma, o método será implementado por incrementos de carga e processo iterativo a fim de atingir o equilíbrio da estrutura mediante a atualização da relação constitutiva do material, até a obtenção da convergência do vetor de forças aplicadas. Sendo que a atualização da relação constitutiva será dada pelo módulo de elasticidade secante a curva tensão-deformação do material inerente à deformação do elemento em cada interação.

4.3 Pós-processamento

Após a solução do sistema de equações, o vetor de deslocamento globais será desmembrado nos vetores de deslocamentos nos eixos x e y e em seguida, por elementos a fim de obter os componentes de tensões nodais mediante a média aritmética das tensões no nó comum a todos os elementos (Assan, 2003). Desta forma, obtemos a tabela de resultados, com os componentes de deslocamentos e de tensões na forma nodal.

Com relação aos gráficos, serão dados os gráficos do deslocamento *versus* número de passos da solução e das componentes de tensões. O primeiro é obtido através de um nó de controle fornecido pelo engenheiro no pré-processamento e o segundo por meio da tabela das componentes de tensões por meio da triangularização e interpolação dos resultados nodais. Ainda, para validar os resultados obtidos no programa será permitido o *input* do deslocamento para o nó de controle obtidos através de software comercial.

5 ESTUDO DE CASOS

No estudo de caso, serão considerados problemas clássicos da engenharia estrutural a fim de avaliar a aplicabilidade do programa no desenvolvimento da solução não linear. Para tanto, os resultados do programa serão confrontados pelas respostas obtidas por software comercial. Além disso, será considerado o mesmo modelo multilinear da relação tensão-deformação do material para todos os casos, conforme a Figura (6) e obtido pelas expressões:

Tabela 2: Deslocamentos e tensões nodais para análise não linear.

Caso	# Nó	# Elem.	d_x (mm)	d_y (mm)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)	Erro (%)	Acrésc. (%)
T3-M01	51	64	-4.10E-04	-4.89E-01	-1.54E-03	-3.74E-01	-2.04E-03	-66.29	-33.45
T3-M02	165	256	-5.62E-04	-8.67E-01	-2.37E-03	-3.75E-01	-1.02E-03	-40.27	17.92
T3-M03	585	1024	-3.90E-04	-1.19E+00	-2.96E-03	-3.75E-01	-3.60E-04	-17.97	61.93
T3-M04	891	1600	-2.85E-04	-1.26E+00	-2.80E-03	-3.75E-01	-2.57E-04	-12.92	71.92
T3-M05	3381	6400	-6.35E-05	-1.39E+00	-2.29E-03	-3.75E-01	-7.08E-05	-4.47	88.60
T3-M06	13161	25600	-5.56E-06	-1.42E+00	-2.11E-03	-3.75E-01	-1.77E-05	-1.87	93.72
T6-M01	51	16	2.35E-06	-7.67E-01	1.97E-04	-3.75E-01	-2.73E-04	-47.15	4.33
T6-M02	165	64	3.00E-03	-9.77E-01	-4.65E-04	-3.75E-01	-2.55E-04	-32.66	32.95
T6-M03	585	256	1.15E-03	-1.24E+00	-2.56E-03	-3.75E-01	-5.06E-05	-14.51	68.78
T6-M04	891	400	5.65E-04	-1.32E+00	-3.25E-03	-3.75E-01	-1.35E-05	-9.35	78.97
T6-M05	3381	1600	3.17E-04	-1.40E+00	-2.47E-03	-3.75E-01	1.86E-05	-3.45	90.61
T6-M06	13161	6400	1.15E-04	-1.43E+00	-2.17E-03	-3.75E-01	5.73E-06	-1.56	94.34
SAP2000	13161	12800	4.81E-17	-1.45E+00	-3.28E-03	-3.75E-01	0.00E+00	-	97.41

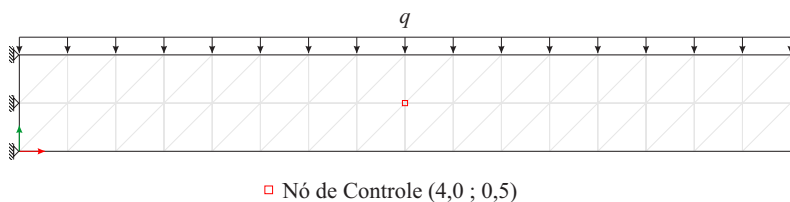


Figura 7: Discretização da viga em balanço do caso T3-M01.

Sendo importante observar que o erro apresentado é para o deslocamento na direção dos eixos do y com relação ao valor de referência do SAP2000 (2009), pois, os demais erros não são representativos para análise deste caso. Com relação ao critério de convergência, adotamos um erro para vetor de forças de 10^{-3} devido ao custo computacional elevado para erros menores, conforme Tabela 3:

Tabela 3: Verificação do critério de convergência das análises

Descrição	Convergência	Dy (mm)	Tempo (s)	Iterações (n)	Erro (%)
T3 - M06	10^{-1}	-1.01E-03	40.02	12	-30.56
T3 - M06	10^{-2}	-1.41E-03	123.28	69	-2.72
T3 - M06	10^{-3}	-1.42E-03	319.99	203	-1.87
T3 - M06	10^{-4}	-1.42E-03	576.23	379	-1.86
T3 - M06	10^{-5}	-1.42E-03	839.09	558	-1.86
T6 - M06	10^{-1}	-1.01E-03	16.67	12	-30.43
T6 - M06	10^{-2}	-1.42E-03	57.98	79	-2.16
T6 - M06	10^{-3}	-1.43E-03	135.11	205	-1.56
T6 - M06	10^{-4}	-1.43E-03	218.91	341	-1.55
T6 - M06	10^{-5}	-1.43E-03	304.80	478	-1.55
SAP2000	-	-1.45E-03	3468.26	-	-

A Figura 8 ilustra o gráfico de isovalores da componente de tensão σ_x para o caso T6-M05, onde podemos observar as tensões máxima e mínima na viga bi-engastada que estão relacionadas com o diagrama de momentos fletores da viga bi-engastada.

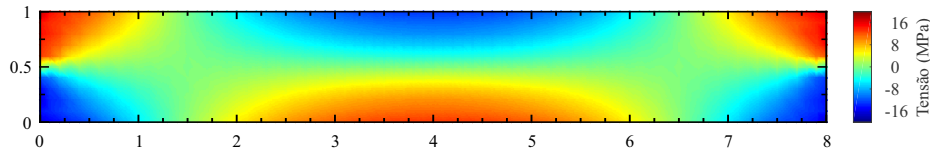


Figura 8: Gráfico de isovalores da componente de tensão σ_x .

A Figura 9 ilustra o comportamento não linear do deslocamento na direção dos eixos y, com acréscimo de aproximadamente 94,0%, conforme as etapas de incrementos de carga e a convergência entre as análises do programa.

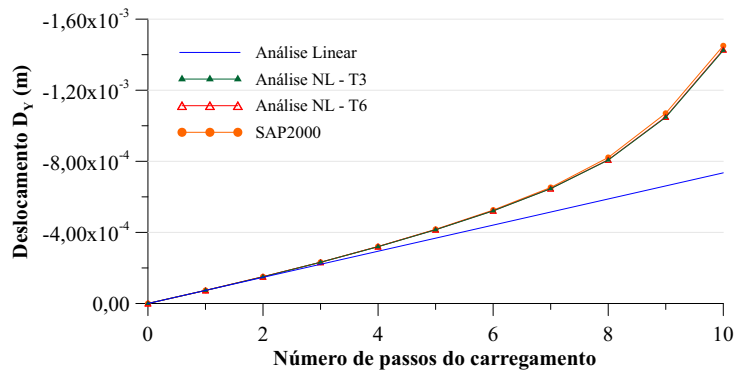


Figura 9: Deslocamento no eixo dos y em função das etapas de incremento de carga.

A Figura 10 ilustra a convergência das análises com relação valor de referência do SAP2000 (2009). No caso da análise não linear, podemos observar a aproximação da curva de convergência dos elementos T3 e T6, isto ocorre devido ao processo iterativo da análise por meio do número de passos do carregamento e do critério de convergência.

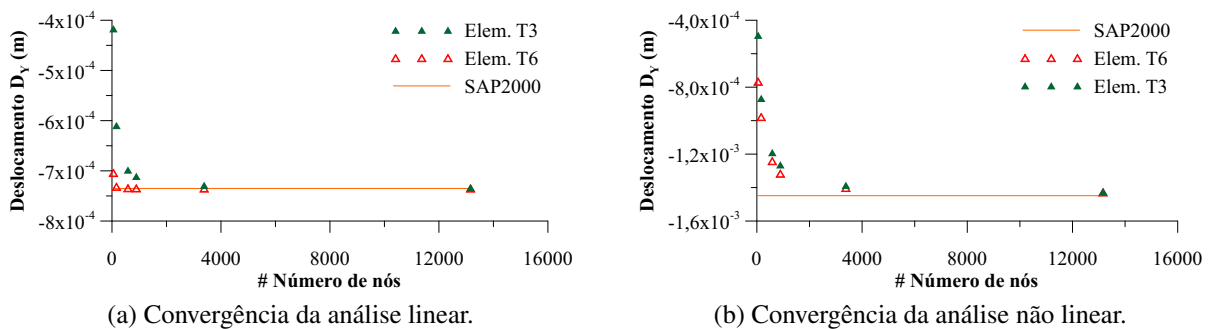


Figura 10: Deslocamento em y da análise linear e não linear.

A Tabela 4 apresenta o custo computacional da análise não linear, o número de iterações para critério de convergência de 10^{-3} e a razão entre o tempo total e o número de iterações. Neste caso, observamos que o tempo total do elemento T6 é menor que do T3 considerando o mesmo número de nós para discretização. Isto ocorre por causa de um menor número de elementos para montagem da matriz de rigidez global e atualização dos parâmetros, da matriz explícita do elemento e um número menor de iterações.

Tabela 4: Custo computacional e número de iterações da análise não linear.

Descrição	Tempo de Processamento (s)						Iter. (n)	Tempo/n
	Pré-Proc.	Montagem	Solução	Atual.	Pós-Proc.	Total		
T3 - M01	0.18	0.06	0.01	0.09	1.59	1.93	40	0.048
T3 - M02	0.18	0.39	0.04	0.41	1.58	2.59	63	0.041
T3 - M03	0.20	2.67	0.18	2.51	1.68	7.24	106	0.068
T3 - M04	0.21	5.01	1.04	4.58	1.73	12.58	125	0.101
T3 - M05	0.22	27.76	7.41	25.15	3.17	63.70	171	0.373
T3 - M06	0.39	134.88	45.36	117.25	22.12	319.99	203	1.576
T6 - M01	0.04	0.04	0.02	0.04	1.54	1.68	29	0.058
T6 - M02	0.04	0.19	0.04	0.13	1.56	1.97	55	0.036
T6 - M03	0.06	1.16	0.19	0.64	1.60	3.64	87	0.042
T6 - M04	0.07	2.07	0.34	1.09	1.66	5.22	99	0.053
T6 - M05	0.13	11.99	2.32	6.09	2.31	22.84	136	0.168
T6 - M06	0.30	73.01	18.18	34.50	9.12	135.11	205	0.659
SAP2000	-	-	-	-	-	3468.26	-	-

Finalmente, a Fig. 11 ilustra a eficiência do elemento T6 em relação ao T3 para análise não linear em termos de custo computacional e menor erro nos resultados obtidos para o deslocamento no eixo dos y.

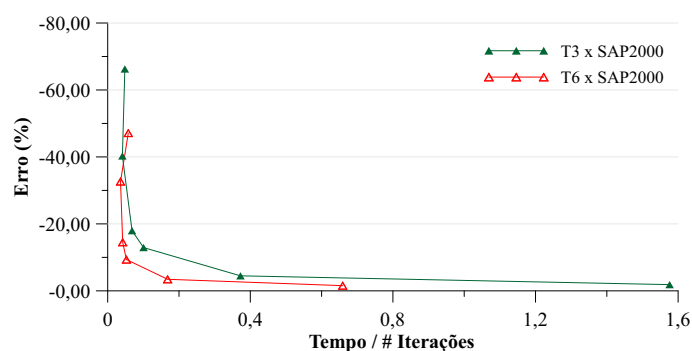


Figura 11: Relação entre erro da análise e custo computacional.

5.2 Exemplo 02: Pórtico transversal

Neste exemplo, consideramos uma pórtico transversal do Centro de Convenções de João Pessoa - PB, conforme ilustração da Figura (12). Neste caso, consideramos carga gravitacional de $6,0 \cdot 10^6 \text{ N}$ aplicada de forma nodal e as seguintes propriedades físicas e geométricas:

- Comprimento do pórtico: 97,90 m;
- Altura máxima do pórtico: 23,10 m;
- Vão livre da viga: 68,00 m;
- Altura da viga: 2,00 m;
- Largura da viga: 1,00 m;
- Módulo de elasticidade: $1,50 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$;
- Módulo de elasticidade transversal: $7,50 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$;
- Coeficiente de *Poisson* nulo.



Figura 12: Centro de Congressos de João Pessoa - PB. Fonte: Governo da Paraíba (2016).

As Tabelas 5 e 6 apresentam os resultados das análises linear e não linear para o nó (37,4; 19,8) das malhas obtidas no pré-processamento por meio do Gid (2008), conforme ilustração da Figura (13).

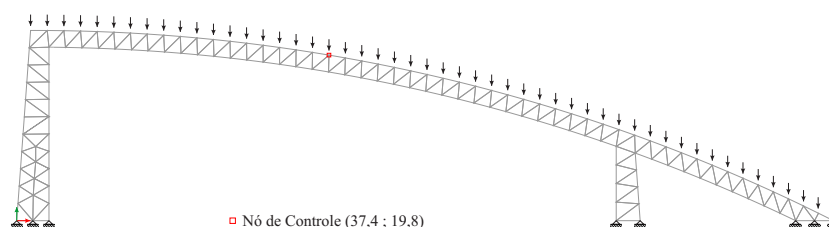


Figura 13: Geometria e discretização do pórtico.

Tabela 5: Deslocamentos e tensões nodais para análise linear.

Caso	# Nó	# Elem.	d_x (mm)	d_y (mm)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)	Erro (%)	
								d_y	σ_x
T3-M01	396	527	-5.37	-21.26	-7.40	0.16	1.27	-34.94%	-53.56%
T3-M02	1432	2336	-7.35	-28.76	-11.88	-0.11	2.00	-11.99%	-25.45%
T3-M03	5568	10089	-8.18	-31.91	-14.59	-0.29	2.49	-2.38%	-8.43%
T6-M01	400	135	-8.15	-31.84	-15.86	-0.47	2.63	-2.58%	-0.49%
T6-M02	1318	527	-8.33	-32.52	-16.00	-0.51	2.69	-0.50%	0.38%
T6-M03	5199	2336	-8.39	-32.73	-16.04	-0.51	2.70	0.15%	0.63%
SAP2000	5277	4753	-8.38	-32.68	-15.94	-0.44	2.51	-	-

Tabela 6: Deslocamentos e tensões nodais para análise não linear.

Caso	# Nó	# Elem.	d_x (mm)	d_y (mm)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	τ_{xy} (MPa)	Erro (%)		Acrésc./Red. (%)	
								d_y	σ_x	d_y	σ_x
T3-M01	396	527	-8.48	-33.30	-7.76	0.34	1.45	-55.78%	-40.69%	1.88%	-51.30%
T3-M02	1432	2336	-13.79	-53.49	-11.91	0.07	2.14	-28.97%	-8.99%	63.66%	-25.28%
T3-M03	5568	10089	-18.29	-70.58	-13.01	-0.05	2.29	-6.28%	-0.56%	115.95%	-18.35%
T6-M01	400	135	-9.30	-36.32	-16.21	-0.48	2.69	-51.76%	23.90%	11.14%	1.73%
T6-M02	1318	527	-14.74	-57.10	-17.15	-0.75	2.81	-24.18%	31.06%	74.69%	7.61%
T6-M03	5199	2336	-17.96	-69.46	-14.44	-0.79	2.34	-7.76%	10.40%	112.54%	-9.36%
SAP2000	5277	4753	-19.55	-75.31	-13.08	-0.33	2.55	-	-	130.41%	-17.90%

As Figuras 14 e 15 ilustram o gráfico de isovalores da componente de tensão σ_x e σ_y para o caso T6-M03, onde observamos comportamento semelhante ao da viga bi-engastada. No entanto, devido ao deslocamento na horizontal da viga obtemos momento fletor na base do pilar (Figura 15).

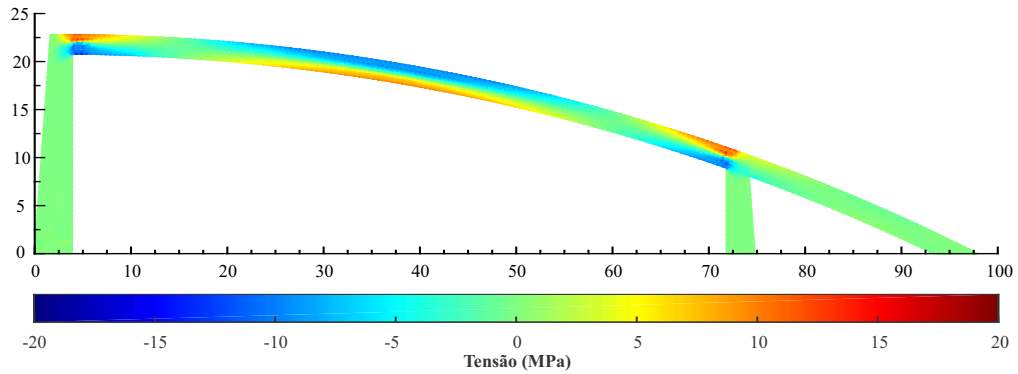


Figura 14: Gráfico de isovalores da componente de tensão σ_x .

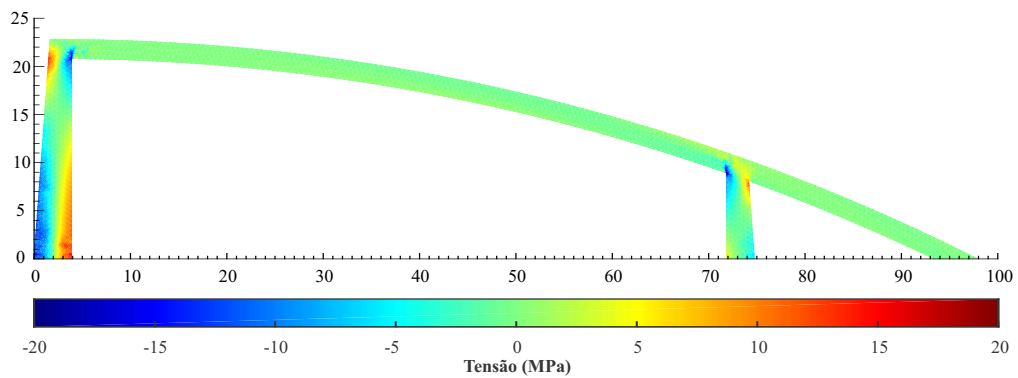


Figura 15: Gráfico de isovalores da componente de tensão σ_y .

A Figura 16 ilustra o acréscimo do deslocamento na direção dos eixos y de aproximadamente 116,0%, conforme as etapas de incrementos de carga e a convergência entre as análise do programa.

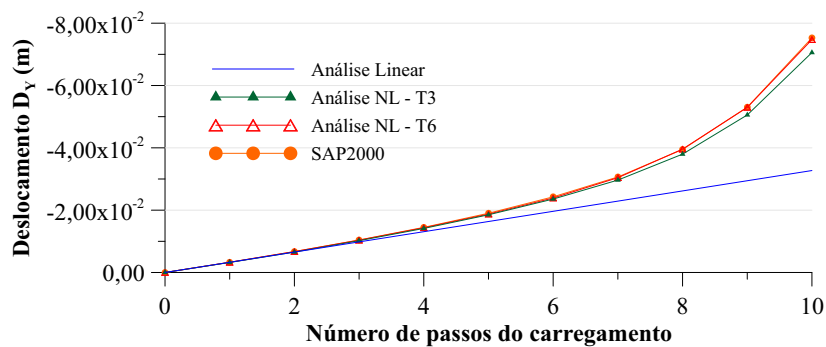


Figura 16: Deslocamento no eixo dos x em função das etapas de incremento de carga.

A Figura 17 ilustra a convergência das análises com relação valor de referência do SAP2000 (2009). Onde podemos observar comportamento semelhante da convergência em relação ao caso da viga bi-engastada.

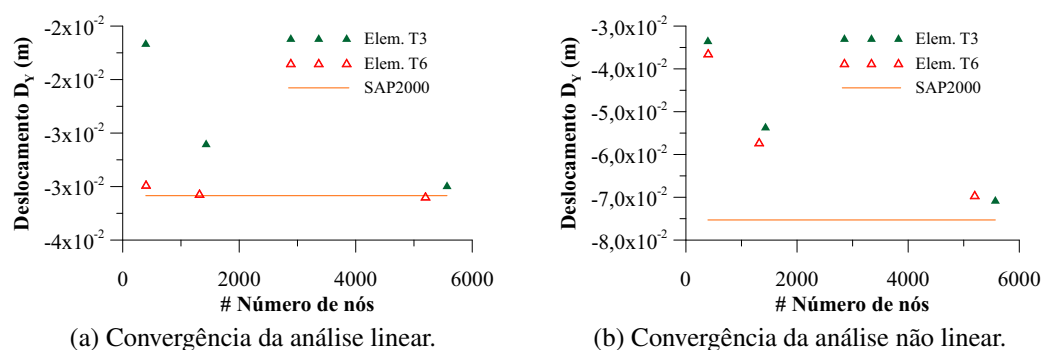


Figura 17: Deslocamento em y da análise linear e não linear.

A Tabela 7 apresenta o custo computacional das análises não lineares, o número de iterações da análise para um critério de convergência de 10^{-3} e a razão entre o tempo total e o número de iterações.

Tabela 7: Custo computacional e número de iterações da análise não linear.

Descrição	Tempo de Processamento (s)						Iter. (n)	Tempo/n
	Pré-Proc.	Montagem	Solução	Atual.	Pós-Proc.	Total		
T3 - M01	0.22	1.54	0.29	1.44	1.71	5.21	117	0.04
T3 - M02	0.20	9.32	2.07	8.26	2.03	21.89	158	0.14
T3 - M03	0.30	52.92	13.23	45.64	5.56	117.65	202	0.58
T6 - M01	0.07	0.34	0.13	0.21	1.70	2.45	47	0.05
T6 - M02	0.12	5.13	2.24	2.50	1.84	11.84	178	0.07
T6 - M03	0.22	25.71	12.78	12.11	3.19	54.01	192	0.28
SAP2000	-	-	-	-	-	1350.92	-	-

CONCLUSÕES

As estratégias e os aspectos computacionais apresentados fazem parte do desenvolvimento de um código dedicado à análise não linear física de problemas em elasticidade bidimensional, onde a matriz constitutiva desacoplada associada ao modelo multilinear da relação tensão-deformação é uma forma prática de resolver o problema da não linearidade do material. Assim como, o método de Newton-Raphson modificado por meio de incremento de carga e módulo secante é uma forma menos restritiva para atualização das relações constitutivas.

Com relação ao emprego de matrizes explícitas na solução não linear, considerando o mesmo número de nós, o elemento T6 obteve melhores resultados para os deslocamentos e uma redução de até 58% no custo computacional em relação ao elemento T3, devido ao menor número de elementos e iterações na atualização da matrizes explícitas.

Na validação do código foram obtidos bons resultados no estudo de caso em comparação ao software comercial SAP2000 (2009), com erro de 1,87% e de 7,76% para análise não-

linear dos deslocamento em y , respectivamente, no caso da viga bi-engastada e do pórtico transversal. Assim como, uma redução significativa no custou computacional em relação ao software comercial. Sendo importante ressaltar o acréscimo de aproximadamente 94,0% e 116,0% no deslocamento em y para os nós de controle da viga bi-engastada e do pórtico transversal, evidenciando a importância da análise não linear na avaliação dos deslocamentos.

BIBLIOGRAFIA

- Assan, A. E., 2003. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 2. ed. Campinas, SP: Unicamp.
- Computers & Structures Inc., 2015. *CSI Analysis Reference Manual: For SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge*. Califórnia. 488 p.
- Darwin, D.; Pecknold, D. A., 1977. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Reston, VA, v. 103, n. 02, p. 229 – 241.
- DIANA, 2003. *Displacement Analyzer*. Delft: TNO Building and Construction Research Institute.
- Gid, 2008. *The personal pre and postprocessor: version 12.0.9*. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering.
- Governo da Paraíba, 2016. *Página do Governo da Paraíba*. Disponível em: <<http://paraiba.pb.gov.br/centro-de-convencoes-de-joao-pessoa-tem-eventos-agendados-ate-2016/>>. Acesso em: Set. 2016.
- Jagd, L. K., 1997. *Non-linear FEM Analysis of 2D Concrete Structures*. 202 p. Tese (at the Structural Engineering and Materials) — Danmarks Tekniske Universitet, Lyngby.
- Kwon, Y. K.; Bang, H., 1996. *The Finite Element Method using Matlab*. 1. ed. Flórida: CRC Press.
- Logan, D. L., 2009. *A First Course in the Finite Element Method*. 4. ed. Ontário: Thomson.
- Matlab, 2015. *Matlab: version r2015a*. Massachusetts: MathWorks.
- MIDAS, 1996. *Advanced Nonlinear and Detail Analysis System*. New York: MIDAS Information Technology Company, Ltd.
- Oñate, E., 2009. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids*. 1. ed. Barcelona: Springer Science & Business Media.
- SAP2000, 2009. *Structural Analysis Program: version 14.0.0*. California: Computers and Structures, Inc.
- Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N., 1980. *Teoria da elasticidade*. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois.
- Vecchio, F. J., 1989. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes. *ACI: Structural Journal*, Michigan, v. 86, n. 04, p. 26 – 35.
- Vecchio, F. J.; Selby, R. G., 1997. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Ottawa, v. 24, n. 03, p. 460 – 470.