



## ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS USANDO UM ELEMENTO DE VIGA COROTACIONAL

**Gabriel Costa de Oliveira**

**William Taylor Matias Silva**

bielcostadeoliveira@gmail.com

taylor@unb.br

Universidade de Brasília

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, primeiro andar, Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

**Resumo.** *Nesta pesquisa, é descrita a formulação corotacional de um elemento de viga unificado que engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, e que não apresenta bloqueio por deformação a corte. A cinemática corotacional se baseia na separação do movimento de um sólido em uma parte deformacional, e em outra, de corpo rígido. O movimento deformacional do elemento é descrito pelos modos naturais de deformação que são gerados pelos esforços axial, flexão pura e flexão simples, respectivamente. Os esforços internos gerados pelos modos de deformação naturais são autoequilibrados, o que permite obter uma matriz de rigidez tangente consistente. Neste trabalho é descrito, de forma detalhada, a obtenção das matrizes de rigidez elástica, geométrica e corotacional. Por meio de alguns exemplos numéricos, é demonstrada a habilidade do elemento em lidar com grandes rotações de corpo rígido.*

**Palavras Chave:** *Elemento de viga Bernoulli/Timoshenko, Formulação corotacional, Modos de deformação naturais.*

## 1 INTRODUÇÃO

A análise não-linear de estruturas vem se tornando cada dia mais importante para o estudo real de problemas encontrados na engenharia. Devido à evolução dos materiais, constroem-se estruturas cada vez mais esbeltas e, a partir disso, torna-se imprescindível um melhor entendimento do comportamento da não-linearidade geométrica.

Conforme Reddy (2006) a formulação cinemática corotacional tem origem no Teorema da Decomposição Polar, desenvolvido no âmbito da mecânica dos meios contínuos, e que sugere a separação dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) dos deformacionais. Utilizada, preferivelmente, para elementos submetidos a pequenas deformações e grandes deslocamentos de corpo rígido, a separação dos movimentos foi o grande trunfo da formulação corotacional, o que facilitou o entendimento do significado físico da decomposição de movimentos, além de gerar simplificações importantes nas formulações matemáticas.

Segundo Silva (2011) grandes avanços dessa descrição cinemática se deram na indústria aeronáutica e aeroespacial nas décadas de 50 e 60 do século passado. Um histórico completo da formulação corotacional pode ser visto em Felippa e Haugen (2005), enquanto que, em Matias et al. (2016), pode ser encontrado um breve histórico, porém, mais atual da formulação corotacional e seus recentes avanços.

Na formulação em questão, equações do Método dos Elementos Finitos (MEF) são formuladas a partir de dois sistemas de referência: um sistema base, que permanece fixo ao longo de toda a análise, e outro móvel, localizado no eixo do elemento que o acompanha durante toda a análise e é utilizado para medir os movimentos deformacionais.

Deslocamentos e rotações relacionados ao sistema de referência móvel ou local são pequenos ou ao menos moderados, o que confere a vantagem de a deformação da viga poder ser modelada por uma teoria aproximada de viga. Outra vantagem é que a formulação permite, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes.

No que diz respeito a formulação corotacional, são combinados dois modelos matemáticos baseados na hipótese de comportamento elástico e isotrópico do material. Estes modelos são bastante utilizados na mecânica estrutural para discretizar elementos de viga que compõem as estruturas. O primeiro deles refere-se à teoria clássica de viga e é conhecido como modelo de Euler-Bernoulli. O segundo é conhecido como teoria de vigas de Timoshenko. Embora amplamente utilizados, em certas situações esses modelos apresentam falhas.

No decorrer do trabalho, será apresentada a formulação corotacional desenvolvida por Krenk (2009), que utilizou os modos de deformação natural propostos por Argyris et al. (1979), para buscar simplificações consideráveis que pudessem ser obtidas por meio da representação da deformação dos modos naturais, desde que em termos adequados. Em relação a esses termos, existem diferentes formas para selecioná-los, mas, nesse contexto, convém utilizar, além do modo de deformação axial, outros dois modos de deformação: o simétrico e o antissimétrico. O primeiro faz referência ao modelo de Euler-Bernoulli, e o segundo, ao modelo de Timoshenko. Esses combinados formam uma robusta ferramenta para cálculo de pórticos, e a essa combinação dá-se o nome de teoria de viga unificada Bernoulli-Timoshenko. Essa teoria tem como trunfo evitar o *shear locking*, problema recorrente no cálculo de vigas, como pode ser visto em Matias et al. (2015).

## 2 DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO COROTACIONAL

Assim como supracitado, a formulação corotacional apresenta como grande vantagem comparativa o fato de possibilitar a decomposição da rigidez tangente em duas parcelas: uma associada à rotação do sistema de elemento base e a outra associada à deformação do elemento dentro desse sistema de elemento base. Esta seção trata de detalhar os processos, etapas e considerações que envolvem a formulação corotacional, e que possibilitarão a formulação da matriz de rigidez de um elemento de viga unificado Bernouli-Timoshenko no espaço 2D.

### 2.1 Descrição cinemática

Para o desenvolvimento da formulação corotacional proposta, será utilizado um elemento de viga genérico de dois nós submetido a deslocamentos de corpo rígido e deformacionais (Fig. 1).

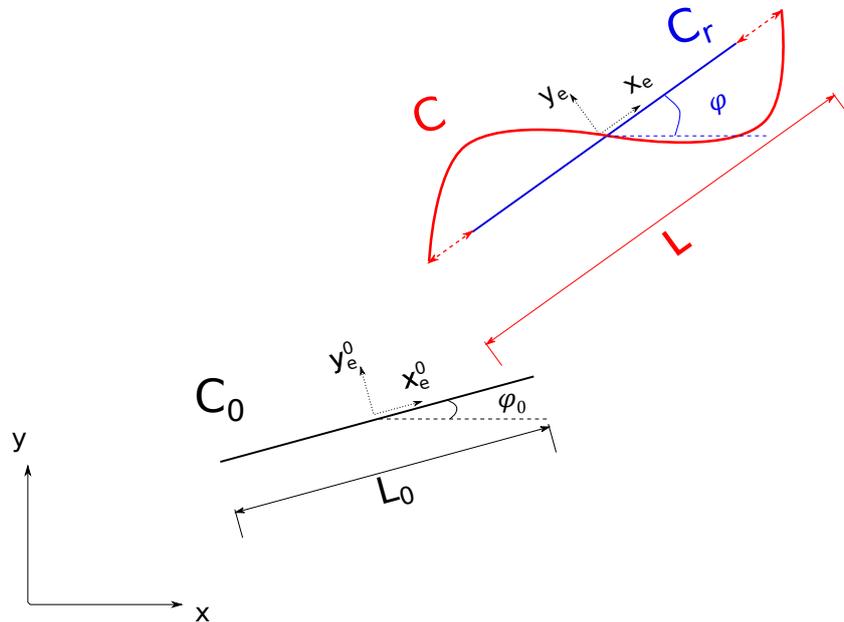


Figura 1: Cinemática corotacional do elemento tipo viga.

A Fig. 1 apresenta o elemento submetido a três configurações. Inicialmente, o elemento se encontra na configuração inicial ( $C_0$ ). Em seguida, por meio da aplicação dos movimentos de corpo rígido, o elemento passa à configuração corotacionada ( $C_r$ ). Por fim, a partir das deformações no elemento corotacionado ( $C_r$ ), chega-se a configuração final ( $C$ ) do elemento.

### 2.2 Graus de liberdade do elemento

Os graus de liberdade do elemento relativos aos deslocamentos da viga podem ser descritos tanto em relação ao sistema global,

$$\mathbf{u}^T = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}, \quad (1)$$

quanto ao local,

$$\mathbf{u}^{eT} = \{u_i^e \quad v_i^e \quad \theta_i^e \quad u_j^e \quad v_j^e \quad \theta_j^e\}, \quad (2)$$

em que  $\theta$  e  $\theta^e$  equivalem aos graus de liberdade referente às rotações. Enquanto os graus de liberdade relativos aos movimentos de translação no sentido horizontal são representados por  $u$  e  $u^e$ , e os graus de liberdade relativos ao movimento de translação no sentido vertical são representados por  $v$  e  $v^e$ .

Os seis componentes de deslocamento citados requerem a existência de seis componentes de força correspondentes. Logo os vetores de força local e global são respectivamente

$$\mathbf{f}^{eT} = \left\{ f_{x_i}^e \quad f_{y_i}^e \quad m_i^e \quad f_{x_j}^e \quad f_{y_j}^e \quad m_j^e \right\}, \quad (3)$$

e

$$\mathbf{f}^T = \left\{ f_{x_i} \quad f_{y_i} \quad m_i \quad f_{x_j} \quad f_{y_j} \quad m_j \right\}. \quad (4)$$

### 2.3 Movimentos de corpo rígido

A primeira etapa do processo da formulação corotacional consiste em descrever os deslocamentos de corpo rígido, em que os movimentos de translação e rotação são considerados (Fig. 2).

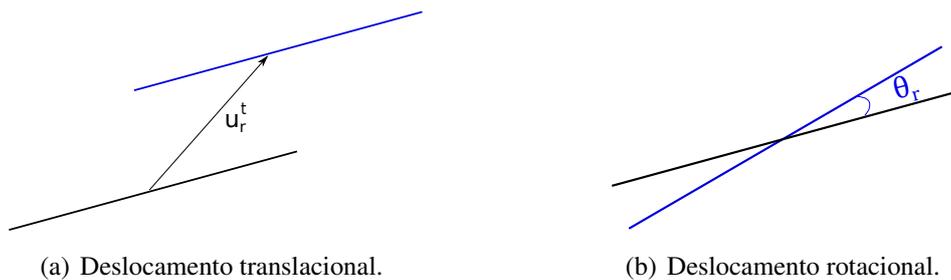


Figura 2: Deslocamento translacional e rotacional do elemento de viga.

A combinação dos movimentos rotacional e translacional pode ser melhor entendida por meio da Fig. 3, em que a configuração  $C_0$  do elemento refere-se ao estado em que a viga ainda se encontra indeformada e não deslocada. Nesse momento, o comprimento e o ângulo inicial do elemento são representados por  $L_0$  e  $\varphi_0$ , respectivamente.

Partindo da configuração inicial  $C_0$ , a aplicação dos movimentos de corpo rígido implica um vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}_r$ , referente ao eixo do elemento

$$\mathbf{u}_r = \begin{Bmatrix} \frac{x_j+x_i}{2} - \frac{X_j+X_i}{2} \\ \frac{y_j+y_i}{2} - \frac{Y_j+Y_i}{2} \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{u_j+u_i}{2} \\ \frac{v_j+v_i}{2} \\ \varphi - \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ \theta_r \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

em que as duas primeiras linhas do vetor representam os graus de liberdade referentes a translação  $\mathbf{u}_r^t$ , sendo os subíndices  $i$  e  $j$  referentes aos nós do elemento; enquanto a terceira linha representa a rotação adicional ( $\theta_r$ ) que ocorreu da posição inicial para a corotacionada formando o ângulo final ( $\varphi$ ).

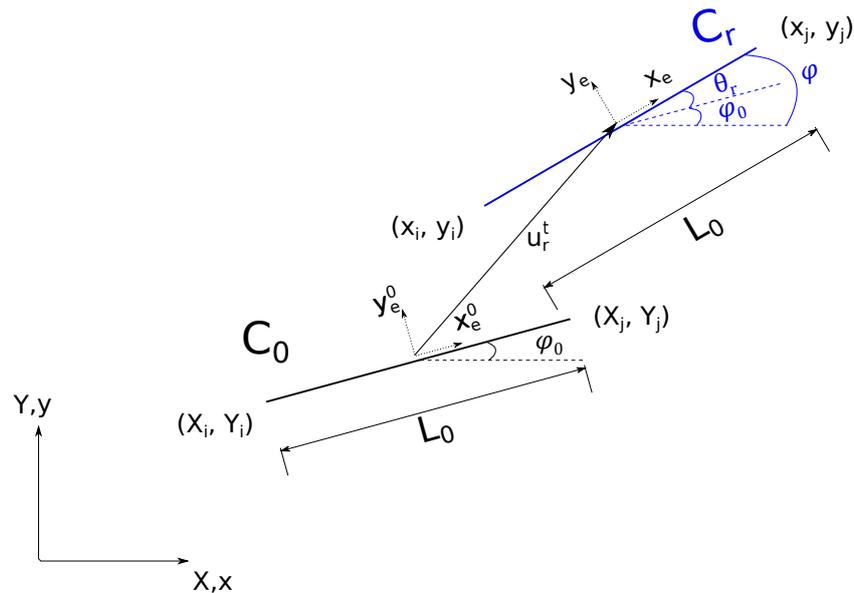


Figura 3: Deslocamentos de corpo rígido.

## 2.4 Movimentos deformacionais

A descrição inteira do movimento do elemento de viga requer seis componentes, em que três são usados para descrever os movimentos de corpo rígido e os outros três, para descrever a deformação da viga. Os três últimos definem três modos de deformação do elemento estudado.

Para passar da configuração  $C_r$  para a  $C$ , à configuração corotacionada somam-se as três configurações de deformação. A essas três configurações de deformação relacionam-se três pares de forças internas equivalentes.

Na primeira configuração deformada apresentada, Fig. 4, as deformações horizontais ( $\frac{1}{2}u$ ) relacionam-se a duas forças internas axiais ( $N$ ), presentes nas bordas do elemento de dois nós apresentado.

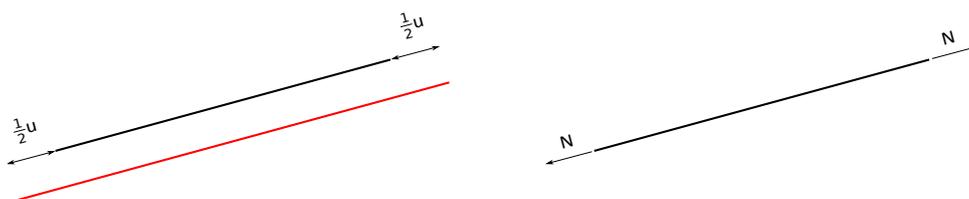


Figura 4: Deformação axial e força normal de referência.

Já na segunda representação, Fig. 5, a configuração deformada, relacionada a flexão simétrica (ou pura) ( $\frac{1}{2}\theta_s$ ), se desenhará de forma a introduzir dois momentos internos simétricos ( $M_s$ ), nos nós da barra, cada qual com um sentido, sendo um, horário (nó  $i$ ) e outro, anti-horário (nó  $j$ ).

Por fim, a deformação por flexão antissimétrica (ou simples) ( $\frac{1}{2}\theta_a$ ), apresentada na Fig. 6, resultará em momentos internos antissimétricos ( $M_a$ ) gerados nas extremidades do elemento, com sentidos anti-horários. Destaca-se que, para que essa configuração satisfaça as equações de equilíbrio estáticas do elemento, deverá apresentar duas forças verticais ( $Q$ ) de sentidos opostos.

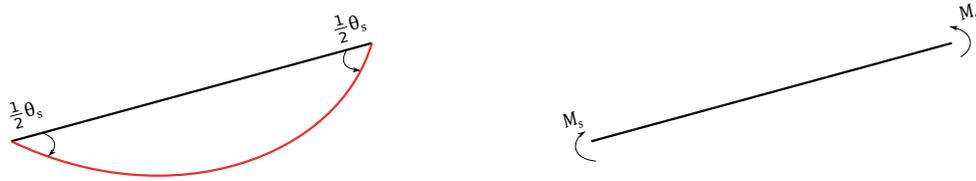


Figura 5: Flexão simétrica e momentos simétricos de referência.

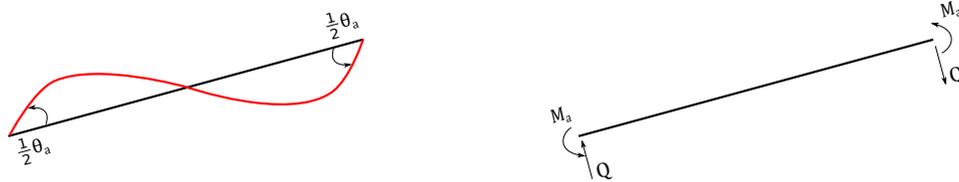


Figura 6: Flexão antissimétrica e momentos antissimétricos de referência.

Devido aos movimentos deformacionais considerados para a análise da devida conjuntura, sendo eles deformação axial, por flexão simétrica e antissimétrica; o elemento em questão possuirá, respectivamente, os seguintes vetores de deslocamento e de força relacionados entre si

$$\mathbf{u}_d^T = \left\{ u \quad \theta_s \quad \theta_a \right\}; \quad \mathbf{f}_d^T = \left\{ N \quad M_s \quad M_a \right\}. \quad (6)$$

A configuração final do elemento, resultado das três configurações apresentadas, resulta na Fig. 7.

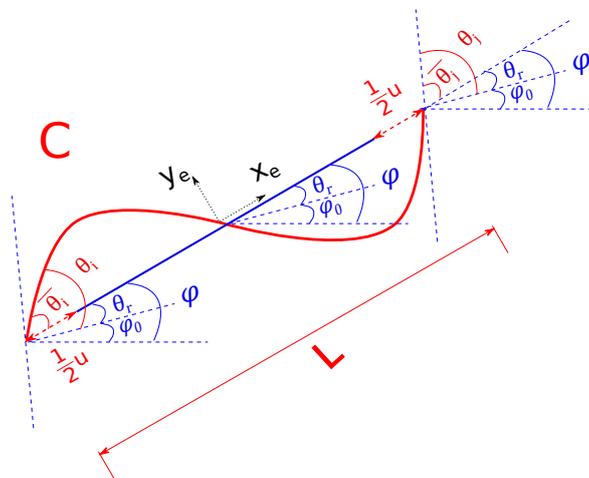


Figura 7: Configuração final.

A deformação axial, por rotação simétrica e antissimétrica equivalem, respectivamente, a

$$u = L - L_0; \quad \theta_s = \theta_j - \theta_i; \quad \theta_a = (\theta_i + \theta_j) - 2\frac{(v_j - v_i)}{L}, \quad (7)$$

em que, para pequenas rotações, tem-se  $\theta_r = \frac{v_j - v_i}{L}$ .

As variáveis  $\bar{\theta}_i$  e  $\bar{\theta}_j$  denotam o ângulo formado pela resultante das deformações por flexão simétrica e antissimétrica dos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente, enquanto  $\theta_i$  e  $\theta_j$  representam aqueles ângulos somados ao ângulo corotacional.

### 3 FORMULAÇÃO COROTACIONAL

#### 3.1 Matriz de transformação S

Na formulação corotacional, para determinar a matriz de rigidez tangente global do elemento estudado, são necessárias duas transformações. Transformações estas que partem do Princípio dos Trabalhos Virtuais, apresentado pela Eq. (8) a seguir

$$\delta V = \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e = \delta \mathbf{u}_d^T \mathbf{f}_d = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}. \quad (8)$$

Como visto pela Eq. (8), é possível relacionar um sistema referente às forças locais generalizadas ( $\mathbf{f}^e$ ) a outro, relacionado às forças internas ( $\mathbf{f}_d$ ), decorrentes dos módulos naturais de deformação do elemento. Para que essa relação ocorra, os dois sistemas de coordenadas devem estar alinhados. Nesse processo, por meio de uma matriz de transformação  $\mathbf{S}$  (matriz  $6 \times 3$ ), ocorre a transformação de um conjunto reduzido de variáveis de forças internas (matriz  $3 \times 1$ ) para um conjunto completo de variáveis de forças generalizadas locais (matriz  $6 \times 1$ ), como pode ser visto pela Eq. (9).

$$\begin{bmatrix} f_{x_i}^e \\ f_{y_i}^e \\ m_i^e \\ f_{x_j}^e \\ f_{y_j}^e \\ m_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/L \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/L \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_s \\ M_a \end{bmatrix}, \quad (9)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{f}_d. \quad (10)$$

A segunda transformação consiste em, por meio da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , transformar a matriz de forças generalizadas locais ( $\mathbf{f}^e$ ) em um conjunto de forças generalizadas globais ( $\mathbf{f}$ ), resultando na expressão

$$\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{f}^e = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d. \quad (11)$$

De maneira semelhante às forças, os deslocamentos também podem ser relacionados. Dessa forma, ao relacionar os deslocamentos deformacionais ( $\mathbf{u}_d$ ) com o sistema de deslocamento local generalizado do elemento ( $\mathbf{u}^e$ ), surge a transposta da matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta_s \\ \theta_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/L & 1 & 0 & -2/L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \theta_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \theta_j^e \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Este sistema pode ser reescrito como

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \mathbf{u}^e. \quad (13)$$

Nesse caso, em vez de utilizar a matriz de transformação para expandir a quantidade de termos, como realizado no caso das forças, utilizou-se a transposta da matriz de transformação, que tem o papel de retirar as componentes dos modos naturais de deformação ( $\mathbf{u}_d$ ) do deslocamento local generalizado ( $\mathbf{u}^e$ ), como expresso pela Eq. (12).

Utilizando-se do mesmo procedimento empregado anteriormente para relacionar forças globais a partir de forças locais por meio da matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , para os deslocamentos, tem-se que

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{u}^e. \quad (14)$$

Logo, por meio das equações (13) e (14), os deslocamentos deformacionais podem ser expressos por

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T \mathbf{u} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{S}^T \mathbf{u} \mathbf{R}^T \quad (15)$$

enquanto os deslocamentos globais podem ser apresentados por

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^{T^{-1}} \mathbf{u}_d \mathbf{R}. \quad (16)$$

### 3.2 Matriz de rigidez tangente do elemento

A matriz de rigidez do elemento de viga estudado ( $\mathbf{K}_e$ ) consiste na soma de duas parcelas. Uma parcela ( $\mathbf{K}_r$ ), pertencente a uma contribuição de rigidez tangente da configuração corotacional, caracteriza a não-linearidade geométrica do elemento. E outra parcela ( $\mathbf{K}_d$ ), decorrente dos modos naturais de deformação e conhecida como a matriz de rigidez constitutiva do elemento. Esta ainda, pode ser decomposta em rigidez material ( $\mathbf{K}_{d,mat}$ ) e rigidez geométrica local ( $\mathbf{K}_{d,geo}$ ).

Segundo Krenk (2009), o procedimento padrão para obtenção da rigidez tangente consiste em considerar o incremento do trabalho virtual usado para expressar equilíbrio. No caso de elementos corotacionais, somente o trabalho virtual externo é utilizado. Portanto, isso conduz à consideração do incremento de trabalho virtual externo aplicado a ( $\delta V = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}$ ). No cálculo desse incremento, o vetor de deslocamento virtual ( $\delta \mathbf{u}$ ) pode ser considerado constante, e assim

$$d(\delta V) = d(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}) = \delta \mathbf{u}^T d\mathbf{f}. \quad (17)$$

A rigidez tangente surgirá da relação incremental das forças generalizadas encontradas na Eq. (11)

$$d\mathbf{f} = d(\mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d) = \mathbf{R} \mathbf{S} d\mathbf{f}_d + \mathbf{R} d\mathbf{S} \mathbf{f}_d + d\mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d. \quad (18)$$

A variação do vetor de forças internas ( $d\mathbf{f}_d$ ) possui uma relação com a variação do vetor de deformação interna ( $d\mathbf{u}_d$ ), o que pode ser expresso pela seguinte equação de equilíbrio

$$d\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d d\mathbf{u}_d, \quad (19)$$

em que  $\mathbf{K}_d$  representa a matriz de rigidez relacionada aos modos naturais de deformação do elemento. Diferenciando a Eq. (13), relacionando-a com a Eq. (19), e substituindo o resultado encontrado na Eq. (18), determina-se, após algum algebrismo, a seguinte expressão

$$d\mathbf{f}_e = [ \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{f}_d (d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} \mathbf{S}) ] d\mathbf{u}_e^{-1} \quad (20)$$

Dada a variação da equação de equilíbrio local

$$d\mathbf{f}_e = \mathbf{K}_e d\mathbf{u}_e, \quad (21)$$

depreende-se das equações (20) e (21) que a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}_e$ ) é igual a

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{f}_d (d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} \mathbf{S}) d\mathbf{u}_e^{-1}. \quad (22)$$

Dessa forma, nota-se que a matriz de rigidez do elemento pode ser representada em duas parcelas. A primeira, relacionada à matriz constitutiva ( $\mathbf{K}_d$ ) e a segunda, à matriz de rigidez geométrica corotacional ( $\mathbf{K}_r$ ), que pode, dessa maneira ser descrita como

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{f}_d (d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} \mathbf{S}) d\mathbf{u}_e^{-1} \quad (23)$$

Logo, tem-se que a matriz de rigidez local é igual a

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r. \quad (24)$$

### 3.3 Matriz de rigidez corotacional

A resolução da Eq. (23) resulta na matriz de rigidez corotacional que, escrita em forma de matriz em bloco, pode ser expressa por

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^r & -\mathbf{K}_{12}^r \\ -\mathbf{K}_{21}^r & \mathbf{K}_{22}^r \end{bmatrix}, \quad (25)$$

em que

$$\mathbf{K}_{11}^r = \mathbf{K}_{22}^r = -\mathbf{K}_{12}^r = -\mathbf{K}_{21}^r = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

### 3.4 Matriz de rigidez material

Para os cálculos que se seguem, será considerada uma viga linear, homogênea e elástica; considerações essas que terão efeito de simplificação da formulação. A presença de três formas de deformação implica uma matriz de rigidez material com dimensão  $3 \times 3$ . Portanto, como a rigidez dos modos de deformação não possuem relação entre si, a matriz de rigidez material será uma matriz diagonal.

Baseando-se no Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares, encontra-se o primeiro termo da diagonal da matriz de rigidez, que representa a rigidez relacionada ao módulo de deformação axial

$$\frac{1}{2}Nu = \int_0^L \frac{N(x)^2}{2AE} dx. \quad (27)$$

Partindo da igualdade entre  $N(x)$  e  $N$ , evidenciada por meio da equação de equilíbrio estático para o primeiro modo de deformação; supondo  $E$ ,  $A$  e  $L$  constantes; isolando a força axial; e diferenciando a Eq. (27); encontra-se a rigidez referente à deformação axial

$$dN = \frac{EA}{L} du \rightarrow k_{1,1} = \frac{EA}{L}. \quad (28)$$

O segundo termo da matriz de rigidez material do elemento também advém do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares, e está relacionado a deformação por flexão simétrica, que pode ser expressa por

$$\frac{1}{2}M_s\theta_s = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx. \quad (29)$$

Partindo da igualdade entre  $M(x)$  e  $M$ , evidenciada por meio da equação de equilíbrio estático para o segundo modo de deformação; supondo  $E$ ,  $A$  e  $L$  constantes; isolando o momento simétrico; e diferenciando a Eq. (29); encontra-se a rigidez referente à deformação por flexão simétrica

$$dM_s = \frac{EI}{L} d\theta_s \rightarrow k_{2,2} = \frac{EI}{L}. \quad (30)$$

O terceiro termo da matriz de rigidez material, referente ao par de momentos antissimétricos e equilibrado por forças cortantes presentes nas extremidades do elemento, também pode ser determinado a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares, dado por

$$\frac{1}{2}M_a\theta_a = \int_0^L \left( \frac{M(x)^2}{2EI} + \frac{Q(x)^2}{2GA_0} \right) dx. \quad (31)$$

Na Eq. (31),  $A_0$  é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma, que leva em conta o efeito da distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal. Partindo das igualdades  $M(x) = M_a(2x/L - 1)$  e  $Q = 2M_a/L$ , evidenciada por meio da equação de equilíbrio estático para o terceiro modo de deformação; supondo  $E$ ,  $A$  e  $L$  constantes; isolando o momento antissimétrico; encontra-se a deformação por flexão antissimétrica igual a

$$M_a = \left( \frac{3EI\psi_a}{L} \right) \theta_a, \quad (32)$$

em que

$$\psi_a = \frac{1}{1 + \Phi}; \quad \Phi = \frac{12EI}{GA_0L^2}. \quad (33)$$

Desse modo, observa-se a presença do parâmetro de cisalhamento ( $\Phi$ ), que considera o efeito de deformação cisalhante na flexão de vigas.

Diferenciando a Eq. (32), tem-se que a rigidez referente à deformação por flexão antissimétrica é expressa por

$$dM_a = \frac{3EI\psi_a}{L}d\theta_a \rightarrow k_{3,3} \frac{3EI\psi_a}{L}. \quad (34)$$

Por não haver relação entre os modos de deformação natural, os demais termos da matriz de rigidez material serão zeros, portanto, de posse das Eq. (28), (30) e (34), tem-se

$$\mathbf{K}_{d,mat} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 3EI\psi_a \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

### 3.5 Matriz de rigidez geométrica local

A matriz de rigidez geométrica local ( $\mathbf{K}_{d,geo}$ ) está associada à matriz constitutiva do elemento. Seu cálculo é realizado a partir da equação diferencial (36), que governa o comportamento de uma viga-coluna submetida a flexão e sujeita a esforços normais. Para efeito de cálculo, não será utilizada a força cortante, pois, segundo Krenk (2009) a contribuição geométrica para a rigidez dos modos de deformação local pode ser avaliada sob a hipótese simplificadora de desaparecimento da deformação cortante, em que os resultados tornam-se muito simples e geralmente bastante representativos.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} - p = 0 \quad (36)$$

A variável  $p$  é igual a zero por não haver carregamento transversal distribuído. Assim, a contribuição de rigidez geométrica local será obtida por meio de incrementos de trabalhos virtuais. Desse modo, aplica-se um deslocamento virtual ( $\delta w$ ), seguido da integração por partes da equação diferencial (36).

$$\delta V = \int_0^L \delta w \left( EI \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx = 0 \quad (37)$$

Posteriormente, algumas conhecidas relações de condições de contorno, como rotação da viga, momento fletor e força cortante são aplicadas. Além disso, há a desconsideração de rotações espaciais, portanto  $d(\delta w)$  e suas derivadas são iguais a zero. Por fim, a Eq. (37) resulta em

$$\int_0^L \left\{ \frac{d\delta w}{dx} N d \left( \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} EI d \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \right\} dx = [\delta \theta d(M) + \delta w d(Q)]_0^L. \quad (38)$$

Para simplificação das equações que se seguem, as deformações em  $x$  serão transformadas para um espaço normatizado  $\xi$ , de  $-1$  a  $1$ . Logo,

$$x = \frac{L}{2}(1 + \xi). \quad (39)$$

De posse da Eq. (38), calcula-se a rigidez geométrica local para a deformação por flexão simétrica e antissimétrica.

a) Flexão simétrica:

As equações de rotação e da linha elástica da viga são respectivamente

$$\theta(x) = \frac{M_s}{EI} \left( x - \frac{L}{2} \right); \quad w(x) = -\frac{\theta_s}{2L} (x^2 - Lx). \quad (40)$$

Aplicando as condições de contorno (nó  $i$ ,  $x = 0$ ; nó  $j$ ,  $x = L$ ) para o cálculo da rotação simétrica, tem-se que

$$\frac{1}{2}\theta_s = -\frac{M_s L}{2EI} \quad (41)$$

Substituindo as Eq. (39) e (41) na equação da linha elástica (40), encontra-se  $w$  em função de  $\xi$ . Aplicando à equação encontrada um incremento de deslocamento da linha elástica em relação a rotação simétrica, encontra-se

$$dw = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2) d\theta_s. \quad (42)$$

As equações diferenciais relativas a Eq. (42) podem ser expressas por

$$d\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{1}{2}\xi d\theta_s; \quad d\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0. \quad (43)$$

Para os deslocamento virtual, tem-se

$$\delta w = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2)\delta\theta_s. \quad (44)$$

Diferenciando a Eq. (44), tem-se que

$$\frac{d\delta w}{dx} = \frac{1}{2}\xi\delta\theta_s; \quad \frac{d^2\delta w}{dx^2} = 0. \quad (45)$$

Doravante, substituindo as Eqs. (43) e (45) na Eq. (38), encontra-se a seguinte expressão

$$dM_s = \frac{1}{12} NL d\theta_s. \quad (46)$$

Logo, conclui-se que a rigidez por rotação simétrica é igual a

$$k_s = \frac{1}{12} NL. \quad (47)$$

b) Flexão antissimétrica:

A equação de rotação e da linha elástica da viga são dadas respectivamente por

$$\theta(x) = \frac{M_a}{EI} \left( \frac{x^2}{L} - x + \frac{L}{6} \right); \quad w(x) = \frac{M_a}{EI} \left( \frac{x^3}{3L} - \frac{x^2}{2} + \frac{xL}{6} \right). \quad (48)$$

Aplicando as condições de contorno (nó  $i$ ,  $x = 0$ ; nó  $j$ ,  $x = L$ ) para o cálculo da rotação antissimétrica, tem-se que

$$\frac{1}{2}\theta_a = \frac{M_a L}{6EI}. \quad (49)$$

Do mesmo modo que foram elaboradas as relações no espaço normatizado para os incrementos de flexão simétrica, desenvolvem-se as formulações para o incremento e deslocamento virtual para a flexão antissimétrica, respectivamente, resultando em

$$dw = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2) \xi d\theta_a; \quad \delta w = -\frac{L}{8}(1 - \xi^2) \xi \delta\theta_a. \quad (50)$$

Para as primeiras derivadas, apresentam-se as expressões

$$d\left(\frac{dw}{dx}\right) = -\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)d\theta_a; \quad \frac{d\delta w}{dx} = -\frac{1}{4}(1 - 3\xi^2)\delta\theta_a \quad (51)$$

e para as segundas derivadas,

$$d\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = 0; \quad \frac{d^2\delta w}{dx^2} = 0. \quad (52)$$

Por conseguinte, substituindo as equações (51) e (52) na equação (38), tem-se

$$dM_a = \frac{1}{20} NL d\theta_a. \quad (53)$$

Logo, conclui-se que a rigidez por rotação antissimétrica é dada por

$$k_a = \frac{1}{20} NL. \quad (54)$$

Por fim, obtém-se a matriz de rigidez pertinente à rigidez geométrica local com uma contribuição de rigidez referente à deformação por flexão simétrica Eq. (47), e outra, referente à deformação por flexão antissimétrica Eq. (54)

$$\mathbf{K}_{d,geo} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} NL & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} NL \end{Bmatrix}. \quad (55)$$

### 3.6 Montagem da matriz de rigidez do elemento

A montagem da matriz de rigidez do elemento se dá a partir das matrizes de rigidez tangente (26), (35) e (55) encontradas. Assim, separando a parcela de rigidez material das parcelas de rigidez geométrica, obtém-se

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{S}(\mathbf{K}_{d,mat} + \mathbf{K}_{d,geo})\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r = (\mathbf{S}\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}^T) + (\mathbf{S}\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r). \quad (56)$$

Generalizando a Eq. (56), tem-se

$$\mathbf{K}_e = (\mathbf{S}_i\mathbf{K}_{d,mat}\mathbf{S}_j^T) + (\mathbf{S}_i\mathbf{K}_{d,geo}\mathbf{S}_j^T + \mathbf{K}_{ij}^T) \quad (57)$$

sendo  $i = 1, 2$ ; e  $j = 1, 2$ .

A contribuição de rigidez material pode ser escrita em formato de matriz em bloco, como

$$\mathbf{K}_{ij_{mat}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11_{mat}}^e & \mathbf{K}_{12_{mat}}^e \\ \mathbf{K}_{21_{mat}}^e & \mathbf{K}_{22_{mat}}^e \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Sendo,

$$\mathbf{K}_{11_{mat}}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_1^T = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & 6\psi_a EIL \\ 0 & 6\psi_a EIL & (3\psi_a + 1)EIL^2 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

$$\mathbf{K}_{12_{mat}}^e = \mathbf{K}_{21_{mat}}^e{}^T = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} -EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\psi_a EI & 6\psi_a EIL \\ 0 & -6\psi_a EIL & (3\psi_a - 1)EIL^2 \end{bmatrix}, \quad (60)$$

$$\mathbf{K}_{22_{mat}}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,mat} \mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} EAL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a EI & -6\psi_a EIL \\ 0 & -6\psi_a EIL & (3\psi_a + 1)EIL^2 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

A contribuição de rigidez geométrica também pode ser apresentada em forma de matriz em bloco por

$$\mathbf{K}_{ij_{geo}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11_{geo}}^e & \mathbf{K}_{12_{geo}}^e \\ \mathbf{K}_{21_{geo}}^e & \mathbf{K}_{22_{geo}}^e \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Sendo,

$$\mathbf{K}_{11_{geo}}^e = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_1^T + \mathbf{K}_{11}^r = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -Q & 0 \\ -Q & \frac{6}{5}N & \frac{1}{10}NL \\ 0 & \frac{1}{10}NL & \frac{2}{15}NL^2 \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_{12_{geo}}^e = \mathbf{K}_{21_{geo}}^e{}^T = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_2^T + \mathbf{K}_{12}^r = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 \\ Q & -\frac{6}{5}N & \frac{1}{10}NL \\ 0 & -\frac{1}{10}NL & -\frac{1}{30}NL^2 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\mathbf{K}_{22_{geo}}^e = \mathbf{S}_2 \mathbf{K}_{d,geo} \mathbf{S}_2^T = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -Q & 0 \\ -Q & \frac{6}{5}N & -\frac{1}{10}NL \\ 0 & -\frac{1}{10}NL & \frac{2}{15}NL^2 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

### 3.7 Matriz de rigidez Global

Para encontrar a matriz de rigidez global, basta multiplicar a equação de equilíbrio local pela matriz de rotação

$$\mathbf{R} df^e = \mathbf{R} \mathbf{K}^e du^e \quad (66)$$

e, em seguida, substituir a derivada da Eq. (14), que relaciona deslocamentos locais e globais, na Eq. (66), resultando em

$$df = \mathbf{R} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^T du. \quad (67)$$

Com isso, a matriz de rigidez tangente global do elemento pode ser expressa por

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^T. \quad (68)$$

Para  $i = 1, 2$ ; e  $j = 1, 2$ ; a Eq. (68) pode ser reescrita em forma de notação indicial, como

$$K_{i,j} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{i,j}^e \mathbf{R}^T. \quad (69)$$

## 4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A formulação corotacional desenvolvida foi implementada junto ao Método de Comprimento de Arco proposto por Crisfield (1981), em uma rotina elaborada em linguagem FORTRAN para a resolução dos exemplos propostos a seguir: Pórtico de Lee e o Arco de grande altura, ambos discretizados em vinte elementos idênticos de vinte e um nós. Atualmente, tais exemplos continuam sendo largamente discutidos por diversos autores na literatura a fim de analisar efeitos significativos da não-linearidade geométrica em estruturas.

### 4.1 Pórtico de Lee

O primeiro exemplo a ser analisado é conhecido como Pórtico de Lee, inicialmente estudado e proposto por Lee em 1968. Esse consiste em um pórtico bidimensional, com apoios de segundo gênero, composto por duas barras e com uma carga concentrada aplicada na barra horizontal a uma distância de  $1/5$  do nó rígido, o qual faz a ligação entre as barras, Fig. 8. Juntamente com a figura encontram-se as propriedades do material e as dimensões do problema.

Para a solução do problema, o sistema foi discretizado em 20 elementos, 10 referentes à barra vertical e outros 10 referentes à barra horizontal. Os nós foram enumerados de 1 – 21 e ordenados de forma crescente, partindo-se do apoio da coluna até o apoio da viga. A carga aplicada localiza-se no nó de número 13, em que foram aplicados 62 passos de carga com comprimento de arco constante de 10, 5 e uma tolerância relativa às normas residuais de  $10^{-5}$ .

A Fig. 9 apresenta as configurações deformadas obtidas pelo programa para a configuração inicial e para os passos 17, 29, 40, 49 e 62; sendo os passos 17, 29, 40 e 49 propositalmente escolhidos por representarem os pontos críticos da curva de equilíbrio da estrutura.

A Fig. 10 ilustra dois gráficos "fator de carga x deslocamentos verticais  $v$ " e "fator de carga x deslocamentos horizontais  $u$ ", que se referem ao caminho de equilíbrio da estrutura com relação ao nó 13 (nó de referência). Nessa figura, os caminhos de equilíbrio foram comparados

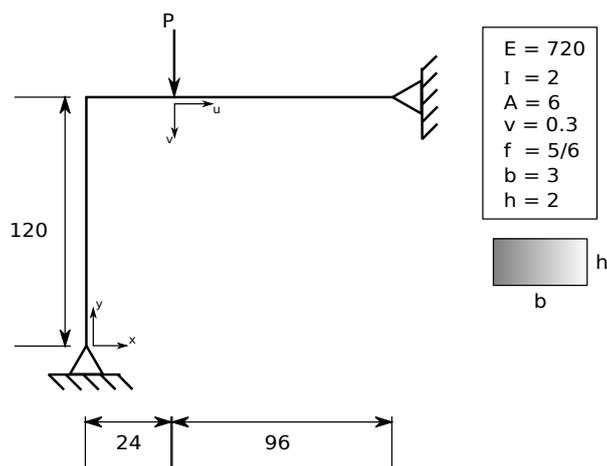


Figura 8: Pórtico de Lee com as propriedades do material e as dimensões do problema.

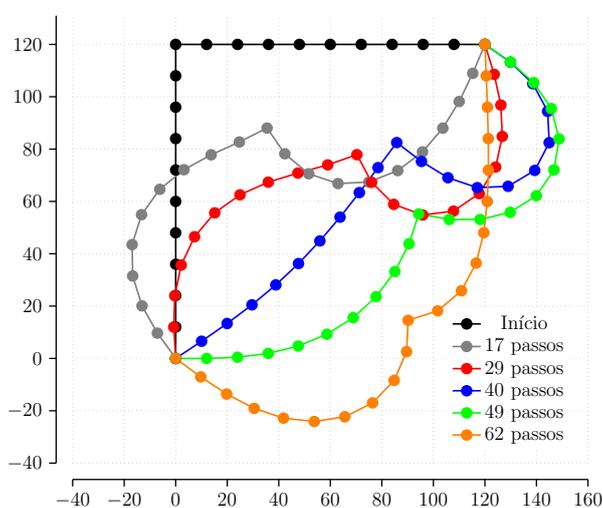


Figura 9: Configuração deformada do Pórtico de Lee.

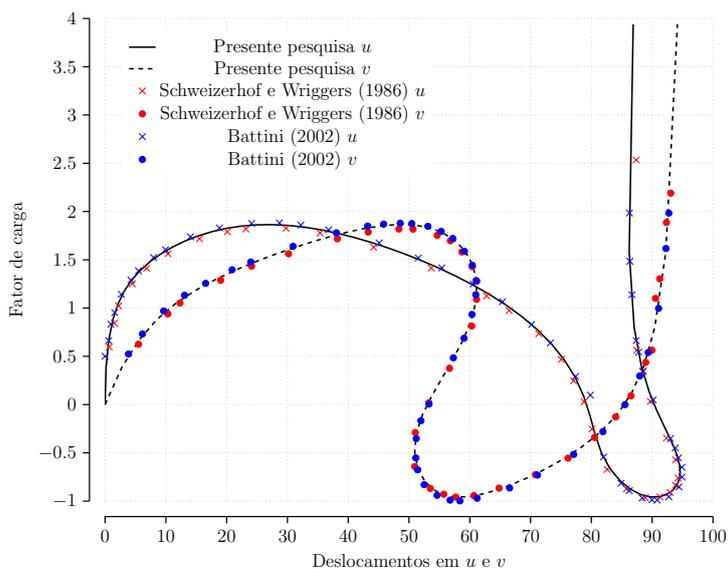
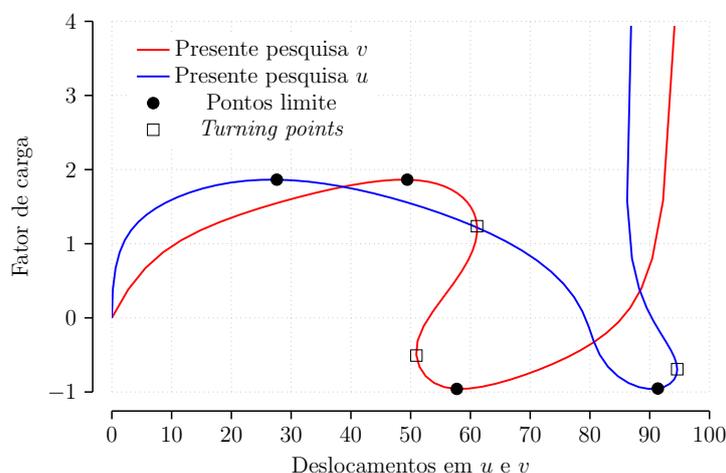


Figura 10: Comparativo entre os caminhos de equilíbrio obtidos para o exemplo do Pórtico de Lee.

a exemplos apresentados por Schweizerhof e Wriggers (1986) e Battini (2002), verificando-se boa concordância entre os resultados.

Os pontos críticos (limites de carga e de deslocamento), apresentados na Fig. 11, foram identificados pelo critério do parâmetro de rigidez CSP (*Current Stiffness Parameter*), proposto por Bergan (1978) e Bergan (1980).



**Figura 11: Pontos críticos obtidos para o exemplo do Pórtico de Lee.**

Caracterizado por quatro pontos críticos, sendo dois pontos limites de carga, e dois pontos limites de deslocamento (*turning points*), o *snap-back* para a curva carga-deslocamento em relação a  $v$  é claramente observado na Fig. 11. Em vista disso, o caminho de equilíbrio chega a um ponto máximo (limite) de carga 1,86410, no passo 17, em que inicia um período de instabilidade estrutural até encontrar o ponto mínimo (limite) de carga, passo 45, de valor  $-0,958602$ , momento em que a estrutura retoma sua estabilidade. Os dois pontos limites de deslocamento localizam-se nos passos 29 e 40, com deslocamentos 61,1082 e 50,9561, respectivamente. O ponto limite máximo de carga detectado, 1,86410, pela atual pesquisa, se comparado ao valor de 1,855 encontrado por Lee et al. (1968), apresenta uma diferença de apenas 0,48%.

Diferentemente do que se observa para a curva dos deslocamentos verticais, para os deslocamentos horizontais em  $u$ , ocorre o fenômeno de *snap-through*. Este, como observado pela Fig. 11, também apresenta dois pontos limites de carga, nos passos 17 e 46, em que o fator de carga é igual a 1,86410 e  $-9,53246$ , respectivamente. Para essa curva de deslocamentos horizontais, ocorre apenas um *tuning point*, no passo 51, com valor de fator de carga de  $-0,692939$ .

## 4.2 Arco circular de grande altura

O sistema consiste em um arco circular rotulado-engastado submetido a uma carga vertical concentrada localizada em seu ápice, com sentido voltado para baixo, como apresentado na Fig. 12. Os demais dados referentes ao sistema, tais como a geometria e as propriedades materiais, se encontram descritos na própria Fig. 12.

Para resolução do sistema, a estrutura foi discretizada em 20 elementos, possuindo consequentemente 21 nós, e em seu topo, nó 11, localiza-se a carga vertical concentrada. Uma condição de contorno rotulada localizada à esquerda da estrutura impede seus movimentos translacionais, permitindo que a estrutura apenas rotacione no local. À direita do arco, encontra-se um apoio engastado, o que restringe qualquer movimento de translação ou rotação.

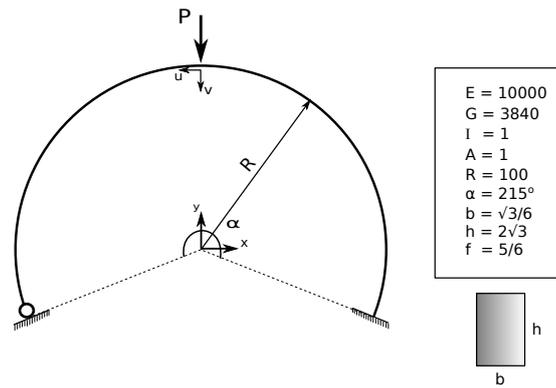


Figura 12: Arco circular de grande altura com as propriedades do material e as dimensões do problema.

A seguir foram aplicados 40 passos de carga com um comprimento de arco constante de 12,0 e uma tolerância relativa às normas residuais de  $10^{-5}$ . A Fig. 13 apresenta sua configuração inicial e as configurações deformadas do arco nos passos 10, 20, 30, 36, 40, 50, 65, 80 e 100. Os passos 36 e 65 representam, respectivamente, o ponto máximo (limite) de carga, equivalente a 9,0861, e o ponto mínimo (limite) de carga igual a  $-0,8095$ , determinados a partir do critério CSP. Para validação dos resultados encontrados, o ponto limite de carga máxima pode ser comparado à solução analítica encontrada por Da Deppo e Schmidt (1975), em que o autor apresentou um limite de carga máxima de 8,97, diferindo de 1,01% da solução encontrada pela presente pesquisa. Pode-se ainda, comparar o resultado ao valor de carga máxima de 9,24, encontrado por Wood e Zienkiewicz (1977), que difere de 0,98% para atual pesquisa.

13.

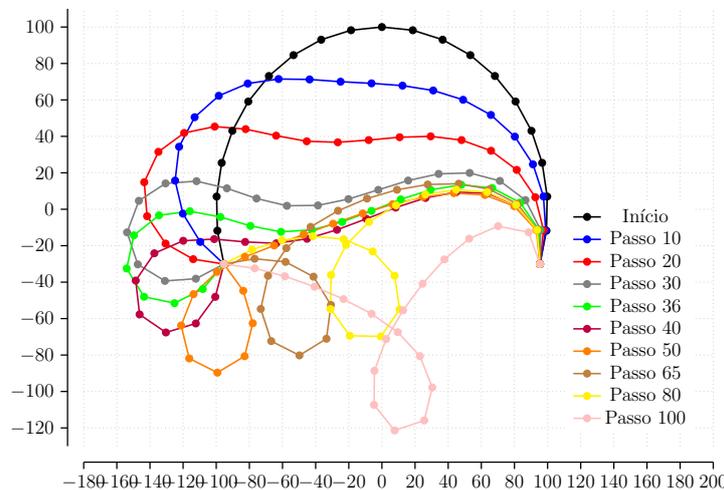


Figura 13: Configuração deformada do arco circular de grande altura.

O caminho de equilíbrio da estrutura no espaço carga-deslocamento referente aos movimentos de translação ( $u$  e  $v$ ) do nó 11 (nó de referência) foram traçados conforme a Fig. 14, na qual a instabilidade ocorre de forma abrupta após o ponto limite de carga máxima, apresentando o fenômeno de *snap-back* para os deslocamentos em  $v$ . Essas trajetórias de equilíbrio ainda foram comparadas às encontradas por Simo e Vu-Quoc (1986) e Fujii (1989), observando-se boa

concordância entre os resultados.

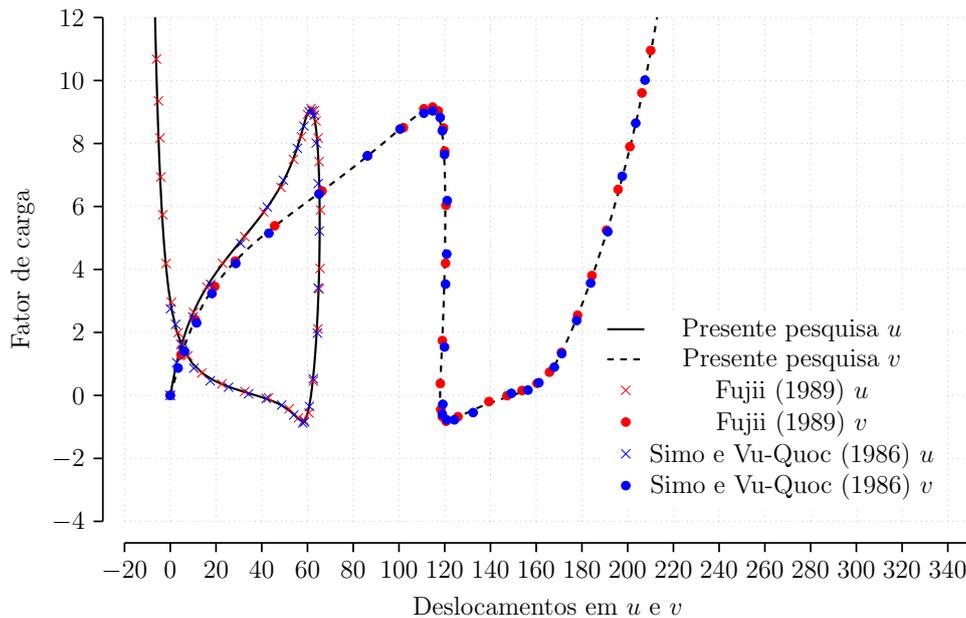


Figura 14: Comparativo entre os caminhos de equilíbrio para o exemplo do arco circular de grande altura.

## 5 CONCLUSÕES

A separação do movimento do elemento de viga em movimentos de corpo rígido e deformacional, por meio da descrição cinemática corotacional, permitiu a decomposição da matriz de rigidez em duas parcelas: material e geométrica; possibilitando, de maneira simples, a inclusão dos efeitos da não-linearidade geométrica.

A definição dos modos deformacionais simétrico e antissimétrico (adicionado a uma força cortante) permitiu gerar esforços internos autoequilibrados, em que, por meio da aplicação dos Trabalhos Virtuais Complementares, propiciou-se a obtenção da matriz de rigidez, que leva em consideração as hipóteses de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Ressalta-se, nesse ponto, que a adição de uma força cortante levou a matriz de rigidez a apresentar o parâmetro de rigidez referente ao cisalhamento de vigas submetidas à flexão.

Por fim, os resultados numéricos obtidos apresentaram boa concordância se comparado a exemplos extraídos da literatura. Conclui-se, dessa maneira, que a formulação corotacional proposta apresenta bons resultados na descrição de estruturas sujeitas a grandes não-linearidades geométricas.

## REFERÊNCIAS

- Argyris, J., H. Balmer e J. Doltsinis (1979). “Finite element method - The natural approach”. Em: *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.* 17/18, pp. 1–106.
- Battini, J.M. (2002). “Co-rotational beam elements in instability problems”. Tese de doutorado. Stockholm / Sweden: Royal Institute of Tecnology-Departament of Mechanics, p. 180.

- Bergan, P. G. (1980). “Solution algorithms for non-linear structural problems”. Em: *Computers & Structures* 12, pp. 497–509.
- Bergan, P.G. et al (1978). “Solution techniques for non-linear finite element problems”. Em: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 12, pp. 1677–1696.
- Crisfield, M.A. (1981). “A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"”. Em: *Computers & Structures* 13, pp. 55–62.
- Da Deppo, D. A. e R. Schmidt (1975). “Instability of Clamped-Hinged Circular Arches Subjected to a Point Load”. Em: *Trans. ASME*, pp. 894–896.
- Felippa, C. A. e B. Haugen (2005). “A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory”. Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 194, pp. 2285–2335.
- Fujii, F. (1989). “Scheme for elasticas with snap-back and looping”. Em: *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 115, pp. 2166–2181.
- Krenk, S. (2009). *Nonlinear Modeling and Analysis of Solids and Structures*. Cambridge University Press.
- Lee, S. L., Manuel F. S. e E. C. Rossow (1968). “Large deflection analysis and stability of elastic frames”. Em: *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 94 EM2, pp. 521–547.
- Matias, W. T., A. A. Cunha e M. P. D. Gutierrez (2015). “Obtenção de um elemento de viga unificado utilizando o princípio dos trabalhos virtuais complementares”. Em: *XXXVI Ibero Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* 1, pp. 1–17.
- (2016). “Análisis no lineal de pórticos planos usando la formulación corrotacional con elemento de viga Timoshenko”. Em: *int. métodos numé. cálc. diseño ing.* 32.
- Reddy, N. (2006). *An introduction to the Finite Element Method*. 3<sup>a</sup> ed. Vol. 3. McGraw-Hill, p. 761.
- Schweizerhof, K. e P. Wriggers (1986). “Consistent linearization for path following methods in nonlinear F.E. Analysis”. Em: *Computer Meth. Appl. Mech. Engrg.* 59, pp. 261–279.
- Silva, S. S. (2011). “Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação corrotacional e plasticidade por camadas”. Diss. de mestrado. Brasil: Universidade de Brasília, p. 164.
- Simo, J. C. e L. Vu-Quoc (1986). “A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: computation aspects”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58, pp. 79–116.
- Wood, R.D. e O.C. Zienkiewicz (1977). “Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells”. Em: *Computers & Structures* 7, pp. 725–735.