



ANÁLISE NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR ESTÁTICO E DINÂMICO DE CASCAS CONOIDAIS

Renata M. Soares

msrenata@gmail.com

Universidade Federal Goiás

Av. Universitária no. 1488, 74605-220, Goiânia, Goiás.

Paulo B. Gonçalves

paulo@puc-rio.br

Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro

Av. Marquês de São Vicente no. 225, 22451-900, Rio de Janeiro, RJ.

Resumo. *Cascas conoidais são estruturas descritas por superfícies regradadas e frequentemente utilizadas na engenharia civil devido a sua estética e eficiente arranjo estrutural. Neste trabalho analisa-se o comportamento linear e não linear, estático e dinâmico de uma casca conoidal, usando o programa comercial de elementos finitos ABAQUS®. Para isso, considera-se uma casca conoidal engastada em suas bordas retas e livre nas bordas curvas, constituída de material elástico, linear e isotrópico. Uma análise paramétrica detalhada é realizada para mostrar a influência da geometria da casca nas cargas limites, frequências naturais e, em especial, no comportamento não linear das trajetórias de equilíbrio.*

Palavras-chave: *casca conoidal, superfícies regradadas, trajetórias de equilíbrio, frequência natural*

1 INTRODUÇÃO

Devido a sua eficácia em vencer grandes vãos com grande capacidade de carga, estruturas do tipo casca são bastante utilizadas em construções civis, principalmente como cobertura já que a sua curvatura e esbeltez proporcionam estética arquitetônica.

As cascas esbeltas possuem excelente eficiência estrutural como membrana, e, portanto, mesmo através de espessuras bastante reduzidas, suportarem tensões normais de grande magnitude, por outro lado, estão sujeitas ao fenômeno da flambagem. Assim, o projetista deve estar atento para evitar que tais fenômenos ocorram. Além disso, este tipo de estruturas podem apresentar baixas frequências de vibração, podendo ser excitadas com facilidade, o que enfatiza a importância da sua análise dinâmica.

Dessa forma, o comportamento estrutural de cascas conoidais é um problema de grande relevância na engenharia civil, sendo essas estruturas frequentemente usadas em modernas estruturas de coberturas. A casca conoidal é descrita por superfícies regradas e uma das soluções estruturais mais econômicas para vencer grandes vãos (Linkwitz, 1999).

As superfícies regradas são obtidas pela rotação ou translação de uma ou mais retas ao longo de uma ou mais curvas e o conóide reto pode ser definido como uma estrutura de superfície regradada não desenvolvível constituída por uma geratriz que se desloca paralelamente a um plano diretor ao longo de duas diretrizes, uma curva e uma reta não pertencentes ao mesmo plano.

Diversos artigos trabalham com a análise estrutural de cascas conoidais. Ghosh e Bandyopadhyay (1990) analisaram aproximadamente a flexão de cascas conoidais utilizando o método de Galerkin. Posteriormente, Das e Bandyopadhyay (1993) compararam os resultados numéricos obtidos via elementos finitos com os resultados experimentais obtidos para um reservatório de concreto conoidal. Nayak e Bandyopadhyay (2002) investigaram, usando o método dos elementos finitos, as vibrações livres de cascas conoidais enrijecidas enquanto Balkshi e Chakravorty (2014) investigaram a flambagem de cascas conoidais esbeltas sujeitas a cargas uniformemente distribuídas.

Recentemente, Cavalcanti e Gonçalves (2014) estudaram os flambagem e vibração características de cascas conoidais através de uma análise paramétrica detalhada para entender a influência das condições de contorno e de diferentes vãos sobre seu comportamento estrutural. Por fim, Soares e Gonçalves (2016) avaliaram via método dos elementos finitos, a influência da geometria em cascas conoidais simplesmente apoiadas em suas bordas retas nas trajetórias não lineares de equilíbrio e nas frequências naturais.

Neste trabalho analisa-se o comportamento linear e não linear, estático e dinâmico de uma casca conoidal, usando o método dos elementos finitos. Para isso, considera-se uma casca conoidal engastada em suas bordas retas e livre nas bordas curvas, constituída de material elástico, linear e isotrópico. Uma análise paramétrica detalhada é realizada para mostrar a influência da geometria da casca nas cargas limites, frequências naturais e, em especial, no comportamento não linear das trajetórias de equilíbrio.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considere uma casca conoidal com a altura do arco de parábola maior H_h , altura do arco de parábola menor H_l , espessura h , comprimento a e largura $2b$, composta de material elástico

linear com módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e peso específico ρ , como ilustrado na Fig. 1.

A superfície de um conóide parabólico é descrita por (Ghosh and Bandyopadhyay, 1990):

$$\bar{z}(x, y) = -H_h \left[1 - \left(1 - \frac{H_l}{H_h} \right) \frac{x}{a} \right] \left[1 - \frac{y^2}{b^2} \right] \quad (1)$$

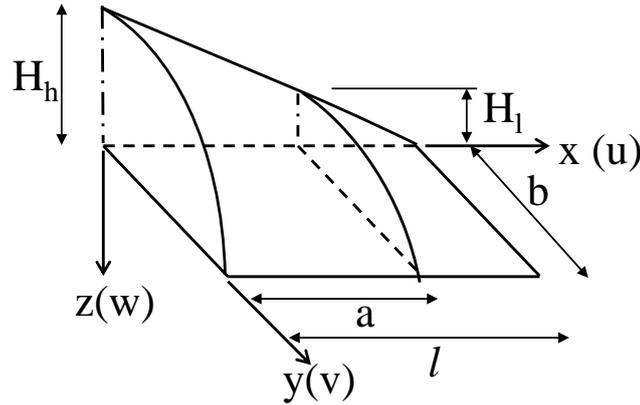


Figura 1. Geometria do conóide parabólico (metade da casca).

A carga vertical por unidade de área da superfície da casca é dada por:

$$\bar{q} = q \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

onde q é a magnitude da carga distribuída na superfície da casca.

Considerando a superfície curva e abatida da casca, a componente de deslocamento transversal (direção z) em qualquer ponto pode ser escrita da seguinte forma (Ghosh and Bandyopadhyay, 1990):

$$\bar{w} = w + \bar{z}(x, y) \quad (3)$$

Portanto, as relações deformação-deslocamento para a superfície média da casca conoidal, rotações e mudanças de curvatura podem ser descritas baseadas na teoria de placas de com Kármán, como (Brush and Almroth, 1975):

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x}^2 + 2w_{,x} \bar{z}_{,x}) & \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + 2w_{,y} \bar{z}_{,y}) \\ \gamma_{xy} &= u_{,x} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} + w_{,x} \bar{z}_{,y} + w_{,y} \bar{z}_{,x} \\ \kappa_x &= -w_{,xx} & \kappa_y &= -w_{,yy} & \kappa_{xy} &= w_{,xy} \end{aligned} \quad (4)$$

As deformações da casca conoidal ($\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y$ e $\bar{\gamma}_{xy}$) em um ponto arbitrário são dadas em termos das deformações na superfície média e das mudanças de curvatura por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + \bar{z}\kappa_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + \bar{z}\kappa_y \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \gamma_{xy} + 2\bar{z}\kappa_{xy}\end{aligned}\tag{5}$$

Para um material elástico linear e isotrópico, as componentes de tensão em um ponto qualquer ao longo da espessura da casca são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}\tag{6}$$

As resultantes de esforços e momentos são obtidas pela integração das componentes e tensão ao longo da espessura da casca conoidal, como a seguir:

$$\begin{aligned}N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_y dz & N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{xy} dz \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{z} \bar{\sigma}_x dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{z} \bar{\sigma}_y dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{z} \bar{\tau}_{xy} dz\end{aligned}\tag{7}$$

Portanto, as equações de equilíbrio, usando como referência o centro da casca são dadas por:

$$\begin{aligned}u_{,xx} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xx} + \nu \left(v_{,xy} - 2H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + 2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,xy} \right) + \\ \frac{1-\nu}{2} \left(u_{,yy} + v_{,xy} + 2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,xy} + 2H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,x} \right. \\ \left. + 2H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,y} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yy} \right) = 0\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & v_{,yy} + 2H_h \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) \left(\frac{w_{,y}}{b^2} + \frac{y w_{,yy}}{b^2}\right) + \\
 & v \left(u_{,xy} - 2H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w_{,x} + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,xy} \right) + \\
 & \frac{1-v}{2} \left(\begin{aligned} & u_{,xy} + v_{,xx} + 2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,xx} \\ & - 2H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} w + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,yx} \end{aligned} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & D \nabla^4 w - (1-\nu) C \left[\begin{aligned} & -2H_h \frac{g}{a} \frac{y}{b^2} (u_{,y} + v_{,x} + 2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,x}) \\ & + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,y} \end{aligned} \right] \\
 & - C \left[\begin{aligned} & 2H_h \frac{1}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) (v_{,y} + 2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) w_{,y} + \nu u_{,x}) \\ & + H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) w_{,x} \end{aligned} \right] \\
 & + \rho h \ddot{w} = q \left[1 + \left(H_h \frac{g}{a} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right)^2 + \left(2H_h \frac{y}{b^2} \left(1 - g \frac{2x+a}{2a}\right) \right)^2 \right]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

onde $C = E h / (1 - \nu^2)$ e $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ são, respectivamente, os parâmetros de rigidez de membrana e de flexão, e $g = 1 - (H_l / H_h)$.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Considere uma casca conoidal incompleta de concreto com espessura $h = 6\text{cm}$, $H_l = 0.5 H_h$ e com as seguintes dimensões a , $2b$ e altura H_h variável. As propriedades do material são: módulo de elasticidade $E = 14 \text{ GPa}$; coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ e peso específico $\rho = 25 \text{ kN/m}^3$. As duas extremidades curvas são livres, uma usual condição de contorno em diversas aplicações e, as duas extremidades retas são engastadas.

Para obter os resultados lineares e não lineares utiliza-se o programa computacional comercial de elementos finitos ABAQUS®. A convergência dos resultados pode ser obtida utilizando o elemento de casca S4R e uma malha de elementos com comprimento no plano $l_x = l_y = 0.20$, como pode ser observado na Fig. 2 para uma casca conoidal de dimensões $a = 6\text{m}$ e $2b = 8\text{m}$.

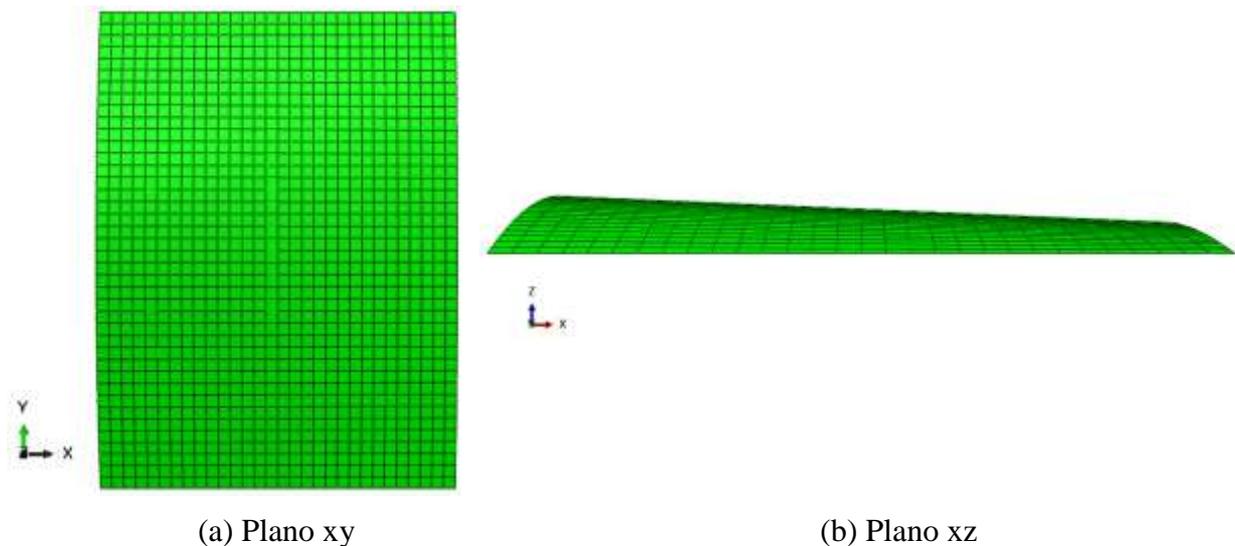


Figura 2. Malha de elementos finitos utilizada na análise da casca conoidal de dimensões $a = 6\text{m}$ e $2b = 8\text{m}$
(a) plano xy; (b) plano xz.

3.1 Análise linear

Primeiramente, a casca conoidal completa é discretizada usando o método dos elementos finitos e a carga crítica (q_{cr}) é obtida. As cargas críticas são apresentadas na Tab. 1 para cinco valores de altura maior do arco de parábola H_h , para seis valores de comprimento a , e para quatro valores de largura $2b$. Também são apresentadas na Tab. 1 as três menores frequências naturais da casca descarregada. A geometria e o carregamento são simétricos em relação ao eixo x (Fig. 1), o padrão de deformação inicial da casca é simétrico. Contudo, em alguns casos de curvatura do arco, o modo de flambagem pode ser simétrico ou assimétrico.

Os resultados mostram que a carga crítica q_{cr} aumenta com o aumento da altura maior do arco H_h e diminuem com o aumento dos parâmetros geométricos a e $2b$. O modo de flambagem da casca conoidal com $H_h = 1.5$ e $2b = 8$ são apresentados na Fig.3 para diferentes valores de comprimento a . Os modos de flambagem podem ser simétricos ou assimétricos, dependendo da geometria da casca.

Na Fig. 4 são apresentados os três primeiros modos de vibração da casca conoidal com $H_h = 1.5$ e $2b = 8$ e diferentes valores de comprimento a . A menor frequência natural está associada com um modo de vibração simétrico ou assimétrico, dependendo da geometria da casca. E seu valor apresenta um decréscimo com o aumento da dimensão a .

Já que a casca conoidal possui um comportamento não linear quando submetida a carregamento linearmente distribuído sobre sua superfície, o problema de autovalor linear para análise da flambagem nos fornece somente uma aproximação da carga crítica, como pode ser verificado na análise não linear. Um melhor resultado pode ser obtido usando um problema de autovalor quadrático, mas essa solução é geralmente bastante complicada (Tisseur and Meerbergen, 2001).

Tabela 1. Carga crítica e frequências naturais para diferentes geometrias da casca conoidal.

H_h (m)	a (m)	2b (m)	q_{cr} (kPa)	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)	ω_3 (rad/s)
0.5	2	8	20.586	47.784	64.827	86.076
1.0			45.433	52.459	65.201	116.21
1.5			63.216	54.468	58.900	108.29
2.0			73.996	51.985	54.677	98.187
2.5			78.830	45.621	53.576	88.075
0.5	4	8	16.608	43.650	64.649	76.128
1.0			33.500	44.798	68.783	89.851
1.5			50.875	44.807	64.884	93.401
2.0			67.110	43.855	59.602	94.476
2.5			81.174	42.201	53.941	92.911
0.5	6	8	15.058	42.117	63.539	67.461
1.0			29.244	42.067	69.544	80.120
1.5			43.209	41.267	66.148	81.743
2.0			55.839	39.820	61.277	81.810
2.5			66.423	37.888	55.853	80.930
0.5	8	8	14.329	41.458	59.475	62.592
1.0			27.361	40.839	69.824	75.984
1.5			39.748	39.571	66.526	76.440
2.0			50.641	37.808	61.730	75.602
2.5			59.499	35.695	56.335	74.091
0.5	10	8	13.909	41.129	54.290	61.904
1.0			26.361	40.211	69.948	72.180
1.5			37.885	38.650	66.611	73.790
2.0			47.768	36.650	61.785	72.394
2.5			55.610	34.382	56.354	70.381
0.5	12	8	13.631	40.948	50.827	61.391
1.0			25.765	39.862	65.419	69.999
1.5			36.789	38.118	66.569	72.362
2.0			46.038	35.947	61.686	70.649
2.5			53.206	33.547	56.208	68.309
1.5	12	4	430.31	115.00	151.65	196.27
		8	36.789	38.118	66.569	72.362
		12	8.2886	18.526	31.165	35.087
		16	2.9019	11.072	17.792	21.484
1.5	6	4	452.59	119.99	202.80	230.50
		8	43.209	41.267	66.148	81.743
		12	10.572	20.973	30.707	43.397
		16	3.9382	12.974	17.495	28.261

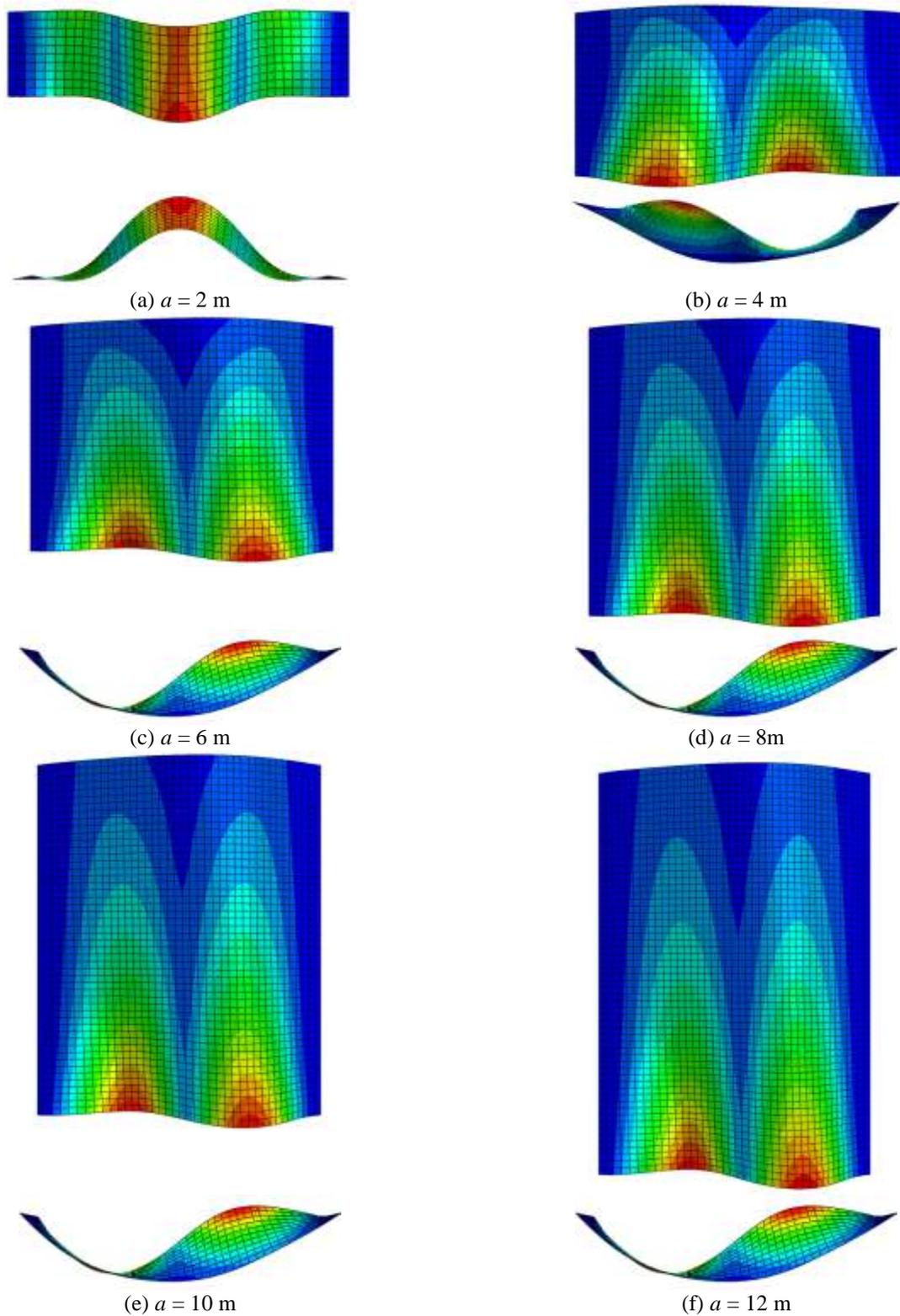


Figura 3. Modos de flambagem da casca conoidal: (a) $a = 2$ m, (b) $a = 4$ m, (c) $a = 6$ m, (d) $a = 8$ m, (e) $a = 10$ m, (f) $a = 12$ m ($H_h = 1.5$ m e $2b = 8$ m).

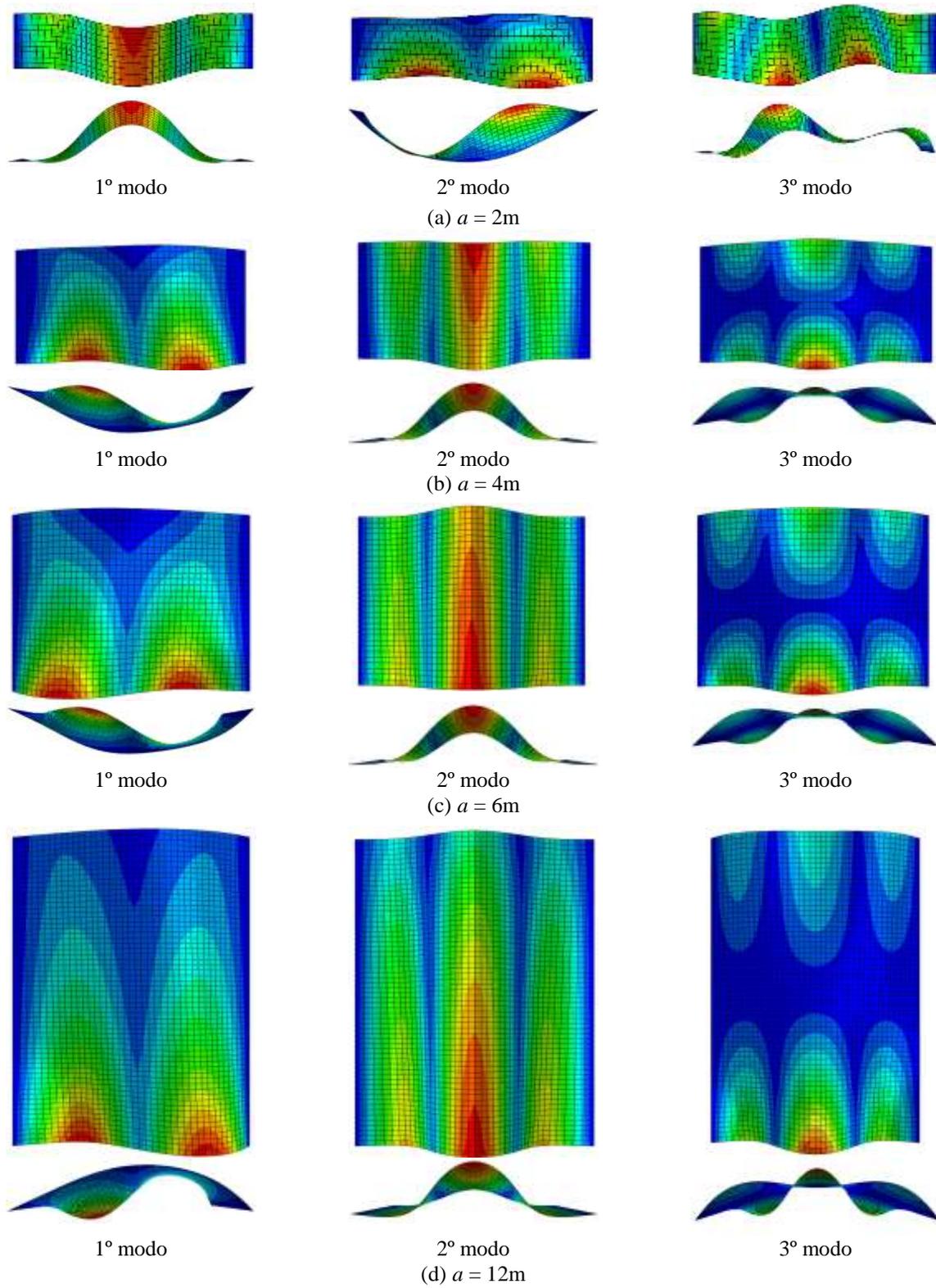
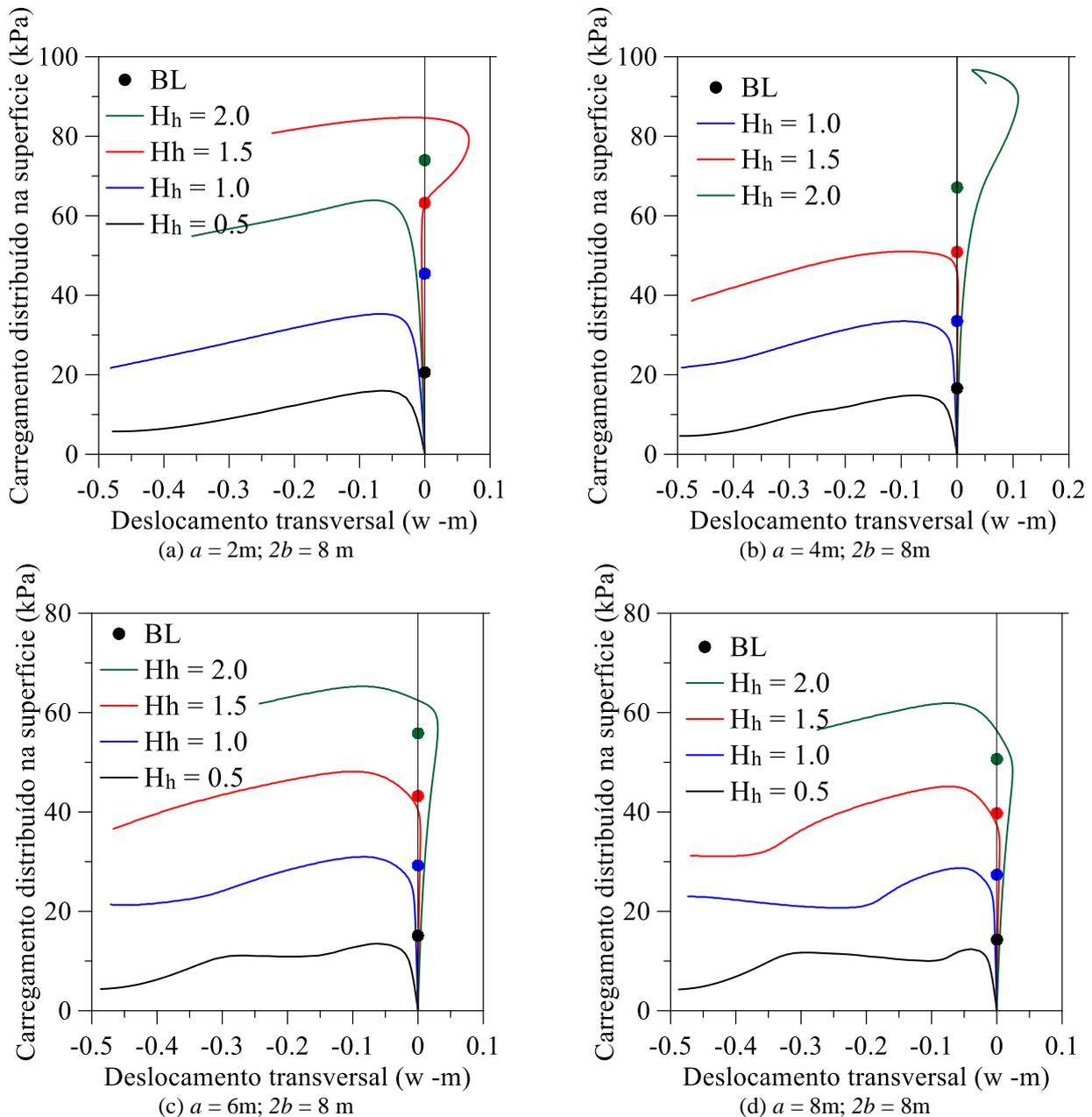


Figura 4. Modos de vibração da casca conoidal: (a) $a = 2\text{ m}$, (b) $a = 4\text{ m}$, (c) $a = 6\text{ m}$ (d) $a = 12\text{ m}$ ($Hh = 1.5\text{ m}$ e $2b = 8\text{ m}$).

3.2 Análise não-linear

O caminho não linear de equilíbrio é obtido através do método dos elementos finitos. Os resultados são apresentados na Fig. 5 para uma casca conoidal com diferentes geometrias. Nestas figuras a magnitude do carregamento (Eq. 2) é plotada como uma função do deslocamento transversal em um ponto de coordenadas $(x, y) = (a/2, 0)$.

Os pontos ao longo do eixo vertical (BL) correspondem a carga crítica linear apresentada na Tab. 1. Para algumas geometrias de casca, com o aumento da carga a rigidez efetiva diminui e torna-se nula ao atingir o primeiro ponto limite de carga, onde a casca perde sua estabilidade. Posteriormente, a casca exhibe caminhos de equilíbrio altamente não-lineares. Como pode ser observado, análise da estabilidade linear pode subestimar ou superestimar a capacidade de carga da casca. Assim, para esta classe de estruturas de cascas as cargas críticas obtidas através de uma análise linear pode levar a resultados equivocados.



Continua

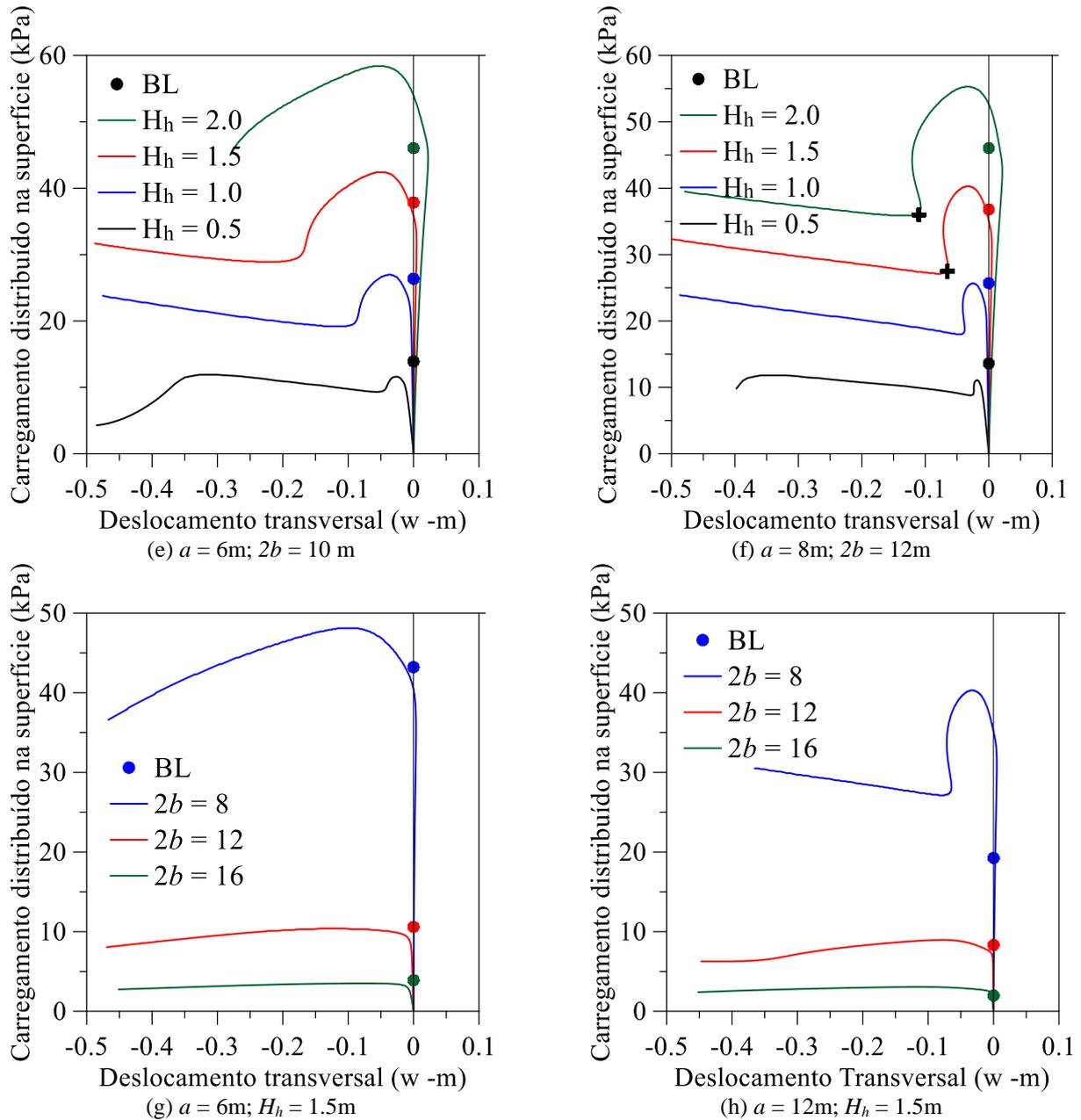


Figura 5. Caminhos não lineares e equilíbrio da casca conoidal para selecionados valores de parâmetros geométricos; ponto $(x, y) = (a/2, 0)$.

A capacidade de carga no caminho não-linear de equilíbrio é fortemente dependente dos parâmetros geométricos da casca, portanto uma análise não linear criteriosa é necessária para a obtenção de projetos seguros. Além disso, como mostrado por Cavalcanti e Gonçalves (2014), as condições de contorno desempenham um papel importante no comportamento da casca.

4 CONCLUSÕES

Apresenta-se neste trabalho uma análise não linear de cascas conoidais abatidas através do método dos elementos finitos utilizando o programa comercial ABAQUS®. Os resultados mostram uma forte influência da geometria nas cargas críticas e frequências naturais do problema. O primeiro modo de vibração e o modo de flambagem linear dependem da

geometria da casca, podendo ser simétricos ou assimétricos. A casca apresenta uma resposta altamente não linear devido a suas altas não-linearidades quadráticas e cúbicas, sendo que a análise de flambagem linear pode subestimar ou superestimar a capacidade de carga de carga da casca.

Além disso a carga transversal linearmente distribuída sobre a superfície da casca aumenta sua rigidez efetiva e tornando-se nula nos pontos limite, onde a casca perde sua estabilidade. Os resultados enfatizam a necessidade de uma análise não linear cuidadosa para projetos seguros desta classe de estruturas.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível devido ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq, FAPERJ-CNE e FAPEG.

REFERÊNCIAS

- Balkshi, K., Chakravorty, D., 2014. "First ply failure study of thin composite conoidal shells subjected to uniformly distributed load". *Thin-Walled Structures* Vol. 76, pp. 1-7.
- Brush, D.O., Almroth, B. O., 1975. *Buckling of bars, plates and shells*. McGraw-Hill.
- Cavalcanti, L.V., Gonçalves, P.B., 2014. "Buckling and vibration analysis of conoidal shell roofs". In *Proceedings of the Symposium Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints - IASS-SLTE 2014*. Brasília, Brazil.
- Cavalcanti, L.V., 2014. *Análise dinâmica, vibração e estabilidade de cascas conoidais abatidas*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Das, A. K., Bandyopadhyay, J. N., 1993. "Theoretical and experimental studies on conoidal shells". *Computers and Structures*. Vol. 49, pp. 531-536.
- Ghosh, B., Bandyopadhyay, J. N., 1990. "Approximate bending analysis of conoidal shells using the Galerkin Method". *Computers and Structures*. Vol. 36, pp. 801-805.
- Linkwitz, K., 1999. "About form finding of double-curved structures". *Engineering Structures*. Vol. 21(8), pp. 709-718.
- Nayak A.N., Bandyopadhyay, J. N., 2002. "Free vibration analysis and design aids of stiffened conoidal shells". *Journal of Engineering Mechanics/DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399 (2002) 128: 4 (419) pp. 419-427*.
- Sahoo, S., 2013. "Dynamic characters of stiffened composite conoidal shell roofs with cutouts: design aids and selection guidelines". *Hindawi Publishing Corporation Journal of Engineering*. Vol. 2013 Article ID 230120.
- Soares, R. M., Gonçalves, P.B., 2016. "Buckling and non-linear analysis of conoidal shell". In *Proceedings of the ASME 2016 International Design & Engineering Technical Conferences and Computers & Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2016 - Charlotte, USA*.
- Tisseur, F., Meerbergen, K., 2001. "The quadratic eigenvalue problem", *SIAM Rev.*, Vol. 43, pp. 235–286.