



INFLUÊNCIA DO ACOPLAMENTO MODAL NA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE PAINÉIS CILÍNDRICOS

Jordana L. Morais

Frederico M. A. Silva

jordana_lopesmorais@hotmail.com

silvafma@ufg.br

Escola de Engenharia Civil e Ambiental – Universidade Federal de Goiás

Avenida Universitária no. 1488, 74605-200, Goiânia, Goiás, Brasil

Resumo. *O trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre o comportamento estático não linear de painéis cilíndricos simplesmente apoiados, submetidos a um carregamento axial distribuído ao longo de suas bordas e considerando a presença de imperfeições geométricas iniciais. As equações não-lineares de equilíbrio do painel cilíndrico são deduzidas a partir da teoria não-linear de Donnell para cascas abatidas. O campo de deslocamento transversal é determinado a partir das técnicas da perturbação, obtendo os modos não-lineares que se acoplam ao modo linear de vibração, ou de flambagem, do sistema, para em seguida, discretizar as equações de equilíbrio a partir do método de Galerkin. Consideram-se várias geometrias de painéis cilíndricos. Primeiramente, apresenta-se uma análise linear do painel a fim de encontrar os modos de flambagem que atingem menores valores para a carga crítica. Posteriormente é realizado um estudo para o comportamento não-linear, para todas geometrias de painéis, avaliando-se as influências do acoplamento modal no caminho pós-crítico dos diversos painéis. Os resultados apontam uma forte influência dos modos quadráticos, presentes na expansão modal dos deslocamentos, na trajetória de equilíbrio do painel.*

Palavras-chaves: *Painel cilíndrico, Análise estática, Acoplamento modal, Imperfeição geométrica.*

1 INTRODUÇÃO

Aperfeiçoamentos na engenharia estrutural têm alcançado a concepção de estruturas mais leves e esbeltas, capazes de atender propostas arquitetônicas mais ousadas. Cascas e painéis são bons exemplos dessas estruturas, as quais possuem sua espessura significativamente menor quando comparadas às outras dimensões. Os painéis cilíndricos são setores circulares de um cilindro e acompanham a mesma teoria das cascas esbeltas, apresentando aplicações como em estruturas de aviões, aquários e submarinos.

A geometria complexa e robusta dos painéis cilíndricos torna-os mais suscetíveis à perda de estabilidade e a vibrações excessivas que podem levar a estrutura ao colapso quando submetidos a carregamentos estáticos e dinâmicos. Esses fatores mostram a importância do estudo do seu comportamento não linear e têm motivado diversos pesquisadores.

Os painéis cilíndricos podem apresentar um comportamento não linear complexo, ao ser submetido a excitações externas, por apresentarem sensibilidade às imperfeições geométricas iniciais e não linearidade geométrica, demonstrada na relação não linear entre o campo de deformação e o campo de deslocamento. Apesar de vários progressos na área da dinâmica das estruturas e das vibrações não lineares, seu comportamento ainda não está totalmente compreendido.

Leissa e Kadi (1971) realizaram estudos sobre as vibrações livres, lineares e não lineares, em painéis rasos com dupla curvatura, a fim de estudar a influência da curvatura nas frequências de vibrações. Foram empregadas a teoria não linear de Donnell e o método de Galerkin para discretizar as equações de equilíbrio do painel cilíndrico. Como conclusão para a análise não linear, as curvas apresentaram um comportamento do tipo *softening* para pequenas amplitudes de vibrações, seguindo para o comportamento do tipo *hardening* quando a amplitude de vibração aumentava.

Hui (1984) trabalhou com a influência de imperfeições geométricas nas vibrações não lineares com grandes amplitudes em painéis cilíndricos simplesmente apoiados. A teoria não linear de Donnell e o método de Galerkin foram empregados. O autor concluiu que a imperfeição geométrica pode aumentar ou diminuir as frequências de vibrações lineares, dependendo se o número de semi-ondas axiais e circunferenciais são pares ou ímpares.

Lam e Loy (1994) desenvolveram um trabalho sobre vibrações livres de painéis cilíndricos esbeltos e a influência gerada por parâmetros geométricos, empregando a teoria de Flügge para cascas abatidas na análise linear. Suas conclusões mostraram que quanto menor o raio, maiores são as frequências, mantendo a espessura do painel.

Popov *et al.* (1998) trabalhou com um painel cilíndrico simplesmente apoiado e submetido a uma força periódica uniformemente distribuída atuando na sua direção axial. O deslocamento transversal é composto apenas de funções harmônicas do tipo seno. Os autores utilizaram o método dos elementos finitos e demonstraram que uma adequada combinação entre métodos computacionais analíticos e numéricos pode ser usada e se conhecer em detalhes os diagramas e pontos de bifurcação do problema.

Amabili (2005) desenvolveu um estudo sobre vibrações não lineares com grandes amplitudes para um painel cilíndrico, comparando com um trabalho anterior desenvolvido por Amabili (2003) para cascas cilíndricas, levando-se em conta diferentes condições de contorno. A comparação se apresentou em relação a circunferência, pois os painéis apresentam uma não linearidade muito maior que quando comparados com as cascas cilíndricas. O campo de deslocamento transversal utilizado possui modos de vibração de funções harmônicas do tipo

coseno e seu comportamento não linear apresentou-se primeiramente do tipo *softening*, tornando-se *hardening* para amplitudes de vibração da mesma dimensão que a espessura do painel.

Moussaoui e Benamar (2002) e Amabili e Paidoussis (2003) apresentaram uma revisão da literatura sobre as vibrações não lineares de estruturas como painéis e cascas cilíndricas. Os autores comentam sobre efeitos não lineares geométricos, dificuldades na análise dinâmica não linear, importância e influência da escolha da expansão modal para descrever o deslocamento transversal e também em relação ao acoplamento modal.

Dessa forma, nota-se a importância de se representar de forma correta o campo de deslocamento transversal com seu devido acoplamento modal, visto que dependendo do acoplamento modal não linear que se desenvolve, devido as não linearidades geométricas presentes nas equações de equilíbrio do painel cilíndrico, pode gerar mudanças em seu comportamento. Será apresentado a seguir uma dedução consistente para a representação do campo de deslocamento transversal do painel cilíndrico, buscando alcançar seu comportamento não linear real. Assim, este trabalho tem como objetivo realizar análises lineares e não lineares para painéis cilíndricos esbeltos simplesmente apoiados e submetidos a um carregamento axial estático. As análises lineares visam relacionar os modos de flambagem com suas respectivas cargas de flambagem, e as análises não lineares, estuda o comportamento não linear dos painéis cilíndricos, avaliando a influência dos acoplamentos modais nas expansões modais para o campo de deslocamento obtido de forma consistente a partir do método da perturbação.

2 MODELAGEM DO PAINEL CILÍNDRICO

Considere um painel cilíndrico esbelto, simplesmente apoiado, de raio R , espessura h , comprimento L , e ângulo de abertura Θ , de material elástico linear, homogêneo, isotrópico, com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν . Na Fig.1 ilustra-se este painel com sua geometria, coordenadas cilíndricas x , θ e z e seus respectivos deslocamentos u , v e w utilizados no decorrer do presente trabalho. O painel cilíndrico possui uma imperfeição geométrica inicial na direção lateral dada por w_0 .

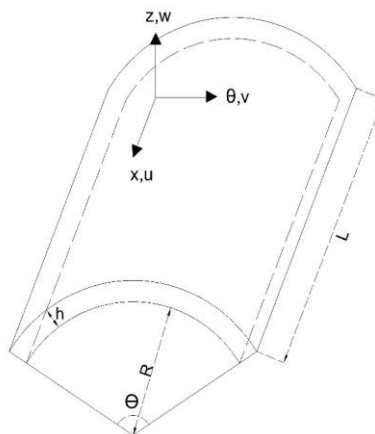


Figura 1. Geometria e campo de deslocamentos do painel cilíndrico

Seguindo a teoria não linear de Donnell (1934) para cascas abatidas, as deformações específicas estão relacionadas com os deslocamentos da superfície média que são descritas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{0,x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2} w_{,\theta}^2 + \frac{1}{R^2} w_{,\theta} w_{0,\theta} \\ \gamma_{x\theta} &= v_{,x} + \frac{1}{R} (u_{,\theta} + w_{,x} w_{,\theta} + w_{,x} w_{0,\theta} + w_{0,x} w_{,\theta})\end{aligned}\quad (1)$$

sendo ε_x , ε_θ , e $\gamma_{x\theta}$, respectivamente, as deformações específicas nas direções axial e circunferencial e a distorção angular de um ponto da superfície média. Os termos u , v e w são, respectivamente, as componentes do campo de deslocamento nas direções axial (x), circunferencial (θ) e transversal (z) do painel, por fim w_0 é a imperfeição geométrica inicial.

Também segundo a teoria de Donnell, as mudanças de curvatura da superfície média são definidas como:

$$\chi_x = -w_{,xx} \quad \chi_\theta = -\frac{1}{R^2} w_{,\theta\theta} \quad \chi_{x\theta} = -\frac{1}{R} w_{,x\theta} \quad (2)$$

em que χ_x , χ_θ e $\chi_{x\theta}$ são, respectivamente, as mudanças de curvatura nas direções axial, circunferencial e no plano.

A imperfeição geométrica inicial, w_0 , possui a forma do modo fundamental de flambagem, ou de vibração, do painel cilíndrico, como apresenta a Eq. (3):

$$w_0 = \overline{w_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\theta}{\Theta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3)$$

sendo $\overline{w_0}$ a amplitude da imperfeição geométrica inicial, n o número de semi-ondas circunferenciais e m o número de semi-ondas longitudinais no painel cilíndrico.

Para as deformações específicas de um ponto qualquer do painel cilíndrico localizado a uma distância z da superfície média ($-h/2 \leq z \leq h/2$) tem-se:

$$\overline{\varepsilon_x} = \varepsilon_x + z\chi_x \quad \overline{\varepsilon_\theta} = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta \quad \overline{\gamma_{x\theta}} = \gamma_{x\theta} + 2z\chi_{x\theta} \quad (4)$$

sendo $\overline{\varepsilon_x}$, $\overline{\varepsilon_\theta}$ e $\overline{\gamma_{x\theta}}$ são, respectivamente, as deformações específicas nas direções axial e circunferencial e angular de um ponto qualquer do painel cilíndrico.

Sendo o painel cilíndrico constituído de material homogêneo, isotrópico e elástico linear, e definidos o seu módulo de elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν), para um estado plano de tensões, as tensões axiais, circunferenciais e cisalhantes ($\overline{\sigma_x}$, $\overline{\sigma_\theta}$ e $\overline{\tau_{x\theta}}$) de um ponto qualquer do painel cilíndrico, obedecem às seguintes relações constitutivas:

$$\overline{\sigma_x} = \frac{E}{1-\nu^2} (\overline{\varepsilon_x} + \nu\overline{\varepsilon_\theta}) \quad \overline{\sigma_\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\overline{\varepsilon_\theta} + \nu\overline{\varepsilon_x}) \quad \overline{\tau_{x\theta}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \overline{\gamma_{x\theta}} \quad (5)$$

Partindo das relações tensão-deformação, Eq. (5), encontra-se os esforços internos de membrana (N_x , N_θ e $N_{x\theta}$) e os momentos internos (M_x , M_θ e $M_{x\theta}$):

$$\begin{aligned}
 N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{\sigma_x} dz & N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{\sigma_\theta} dz & N_{x\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{\tau_{x\theta}} dz \\
 M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \overline{\sigma_x} dz & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \overline{\sigma_\theta} dz & M_{x\theta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \overline{\tau_{x\theta}} dz
 \end{aligned} \tag{6}$$

Os funcionais de energia do sistema são dados pela energia cinética (T), trabalho das forças de dissipação (RE), energia interna de deformação (Ui), e o trabalho das forças externas (VE) que será considerado nas condições de contorno do problema, suas equações são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho h R}{2} \int_0^L \int_0^L \dot{w}^2 dx d\theta & RE &= \frac{1}{2} \beta_1 R \int_0^L \int_0^L \dot{w}^2 dx d\theta + \frac{1}{2} \beta_2 R \int_0^L \int_0^L \nabla^4 \dot{w}^2 dx d\theta \\
 Ui &= \frac{R}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \int_0^L (\overline{\sigma_x} \varepsilon_x + \overline{\sigma_\theta} \varepsilon_\theta + \overline{\tau_{x\theta}} \gamma_{x\theta}) dx d\theta dz
 \end{aligned} \tag{7}$$

As equações não lineares de movimento do painel cilíndrico, são obtidas a partir dos funcionais de energia do sistema, aplicando-se o princípio de Hamilton juntamente com as ferramentas do cálculo variacional, obtendo:

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} &= 0 \\
 N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} &= 0 \\
 \rho h \ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} - \\
 \frac{1}{R^2} \left[RM_{x,xx} + 2M_{x\theta,x\theta} + \frac{M_{\theta,\theta\theta}}{R} + RN_x(w_{,xx} + w_{0,xx}) + N_\theta \left(\frac{(w_{,\theta\theta} + w_{0,\theta\theta})}{R} - 1 \right) + 2N_{x\theta}(w_{,x\theta} + w_{0,x\theta}) \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

O problema sugerido do painel cilíndrico simplesmente apoiado deve atender as seguintes condições de contorno e antimetria:

$$\begin{aligned}
 w(0, \theta) = w(L, \theta) &= 0 & w(x, 0) = w(x, \Theta) &= 0 \\
 M_x(0, \theta) = M_x(L, \theta) &= 0 & M_\theta(x, 0) = M_\theta(x, \Theta) &= 0 \\
 N_x(0, \theta) = N_x(L, \theta) &= P(t) & u(L/2, \theta) &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

É comum na literatura de painéis cilíndricos substituir os esforços de membrana pela função de tensão de Airy, $f(x, \theta)$. Dessa forma, é possível perceber que as duas primeiras equações do sistema não linear, Eq. (8), são satisfeitas e a terceira equação pode ser reescrita, reduzindo o sistema para uma única equação definida em termos do deslocamento transversal w e da função de tensão de Airy, $f(x, \theta)$, a saber:

$$\begin{aligned}
 \rho h \ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} - \\
 \frac{1}{R^2} \left[RM_{x,xx} + 2M_{x\theta,x\theta} + \frac{M_{\theta,\theta\theta}}{R} + R(f_{,\theta\theta} - P(t))(w_{,xx} + w_{0,xx}) + f_{,xx} \left(\frac{(w_{,\theta\theta} + w_{0,\theta\theta})}{R} - 1 \right) + 2f_{,x\theta}(w_{,x\theta} + w_{0,x\theta}) \right] &= 0 \tag{10}
 \end{aligned}$$

Para resolver essa terceira equação reduzida composta de duas incógnitas, w e $f(x,\theta)$, precisa-se de uma nova equação, na qual seja composta dessas mesmas duas incógnitas. Essa nova equação pode ser encontrada na teoria da elasticidade, nomeada como equação de compatibilidade geométrica, e também está em função das variáveis w e f :

$$\nabla f^4(x, \theta) = \frac{Eh}{R^4} (w_{,x\theta}^2 - w_{,xx}w_{,\theta\theta} + R w_{,xx} + 2w_{,x\theta}w_{,0,x\theta} - w_{,xx}w_{,0,\theta\theta} - w_{,\theta\theta}w_{,0,xx}) \quad (11)$$

2.1 Campo de deslocamento transversal do painel cilíndrico através do método da perturbação

O campo de deslocamento transversal que representa o comportamento não linear do painel cilíndrico com seus devidos acoplamentos modais, foi obtido neste trabalho através da técnica da perturbação, apresentada no trabalho de Gonçalves (1987). A solução geral para o campo de deslocamento transversal do painel cilíndrico simplesmente apoiado, atendendo as condições de contorno da Eq. (9), é dada por:

$$\begin{aligned} w = & \sum_{i=1,3,5} \sum_{j=1,3,5} A_{ij}(t) \operatorname{sen}\left(\frac{im\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{jn\pi\theta}{\Theta}\right) \\ & + \sum_{\alpha=0,1,2,3,\dots} \sum_{\beta=0,1,2,3,\dots} B_{(2+6\alpha)(2+6\beta)}(t) \left\{ \left[\frac{3+6\alpha}{4+12\alpha} \cos\left(\frac{6\alpha m\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(2+6\alpha)m\pi x}{L}\right) \right] \right. \\ & + \left. \frac{1+6\alpha}{4+12\alpha} \cos\left(\frac{(4+6\alpha)m\pi x}{L}\right) \right] \left[\frac{3+6\beta}{4+12\beta} \cos\left(\frac{6\beta n\pi\theta}{\Theta}\right) - \right. \\ & \left. \left. \cos\left(\frac{(2+6\beta)n\pi\theta}{\Theta}\right) + \frac{1+6\beta}{4+12\beta} \cos\left(\frac{(4+6\beta)n\pi\theta}{\Theta}\right) \right] \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

em que, $A_{ij}(t)$ e $B_{(2+6\alpha)(2+6\beta)}(t)$ são as amplitudes modais do campo de deslocamento transversal do painel cilíndrico. O termo $A_{ij}(t)$ refere-se a amplitude dos modos formados por funções harmônicas do tipo seno, chamados de termos ímpares e o termo $B_{(2+6\alpha)(2+6\beta)}(t)$ é a amplitude para modos que apresentam apenas funções harmônicas do tipo cosseno, denominados de termos pares.

Esta solução modal também foi utilizada por Sattler *et. al.* (2014) em seu trabalho sobre painéis cilíndricos simplesmente apoiado. O autor concluiu que dependendo da escolha para os termos da expansão modal dos deslocamentos transversais, o painel cilíndrico pode ter relações frequência – amplitude com diferentes comportamentos, podendo estes ser com ganho de rigidez ou inicialmente com perda de rigidez seguido de um comportamento com ganho de rigidez. As análises para os painéis cilíndricos, neste trabalho, utilizam esta solução modal, na qual possui grande importância por apresentar diferentes comportamentos dependendo da combinação dos termos citados na Eq. (12). O objeto de estudo deste trabalho é saber quais os termos da solução modal são necessários para descrever de forma correta o campo de deslocamento transversal do painel cilíndrico.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Realizam-se análises lineares e não lineares para painéis cilíndricos perfeitos e imperfeitos que se diferenciam entre si quanto ao raio R ou o comprimento circunferencial $a\theta$,

mantendo-se um dos parâmetros fixo e variando o outro. As variações realizadas foram para os seguintes casos: $a_{\theta} = 1.00\text{m}$ fixo e R variando para os valores: 8.333m, 4.1665m e 2.083m; e fixando o raio em $R = 8.333\text{m}$ e variando a_{θ} em: 2.00m, 3.00m e 4.00m. Os painéis cilíndricos em estudo estão simplesmente apoiados e submetidos a um carregamento axial estático.

3.1 Painéis cilíndricos perfeitos

Os resultados numéricos, apresentados a seguir, são para análises lineares que relacionam os modos de flambagem com suas respectivas cargas de flambagem. Já as análises não lineares, estuda-se o comportamento não linear dos painéis cilíndricos, avaliando a influência dos acoplamentos modais nas expansões modais para o campo de deslocamento.

O painel cilíndrico simplesmente apoiado com uma força estática atuando na direção axial possui as seguintes propriedades: comprimento axial $L = 1.00\text{m}$, espessura $h = 0.01\text{m}$, módulo de elasticidade $E = 2.1 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, sendo o mesmo material e geometria utilizado no painel cilíndrico do trabalho de Popov *et al.* (1998), no qual possui comprimento circunferencial $a_{\theta} = 1.00\text{m}$, e raio de curvatura $R = 8.333\text{m}$.

Foram realizadas análises para se encontrar a combinação modal (m, n) que possuem a menor carga crítica para todos os painéis com variações do raio de curvatura R e do comprimento circunferencial a_{θ} . Os resultados estão apresentados na Tabela 1.

Analisando-se a Tabela 1, pode-se notar que com a diminuição do raio de curvatura R e, conseqüentemente, o aumento no ângulo de abertura Θ , para manter o mesmo comprimento circunferencial a_{θ} do painel cilíndrico, ocorre um aumento no valor da carga crítica. No trabalho de Lam e Loy (1994), os autores desenvolveram uma pesquisa sobre vibrações livres de painéis cilíndricos esbeltos e a influência gerada pelos parâmetros geométricos, concluindo que quanto menor for o raio de curvatura do painel maiores serão as frequências naturais. Frequência natural e carga crítica axial são autovalores de seus respectivos sistemas lineares de equilíbrio que apresentam como característica comum a mesma rigidez, portanto pode-se relacionar a conclusão do aumento da carga crítica com o aumento da frequência natural.

Tabela 1. Relação da Carga Crítica (P_{CR}) com o modo de flambagem (m, n), para os painéis cilíndricos

R	a_{θ}	m	n	P_{CR} . (N)
$R=8.333\text{m}$		1	1	1.5253×10^6
$R=4.166\text{m}$	1.00m	2	1	3.1473×10^6
$R=2.083\text{m}$		2	2	6.1017×10^6
	2.00m	1	2	1.5252×10^6
$R=8.333\text{m}$	3.00m	1	3	1.5252×10^6
	4.00m	1	4	1.5252×10^6

Quando o raio de curvatura foi mantido constante, variando-se o comprimento circunferencial a_θ do painel cilíndrico observou-se que o aumento no ângulo de abertura Θ , devido ao aumento de a_θ , gerou um aumento no número de semi-ondas circunferenciais (n), mantendo as cargas críticas praticamente iguais (SATTLER, 2015).

O estudo para o comportamento não linear dos painéis cilíndricos foi realizado por meio de diversas expansões modais para o campo de deslocamento transversal dada pela Eq. (12), determinada a partir do método da perturbação.

As expansões modais se deram a partir do modo fundamental de flambagem, *driven mode*, acoplando primeiramente apenas modos ímpares, representados pela amplitude A_{ij} , em seguida os termos pares também foram acrescentados, representados pela amplitude $B_{(2+6\alpha)(2+6\beta)}$, e várias combinações foram realizadas com o objetivo de estudar a influência de cada modo no comportamento não linear estático do painel cilíndrico. Cada expansão modal é um deslocamento transversal w a ser estudado estão apresentadas na Tabela 2.

Analisando a Fig. 2 (a), painel com raio de curvatura $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, nota-se que utilizando as expansões modais apenas com termos ímpares o comportamento pós-crítico é assimétrico e apresenta inicialmente uma perda de rigidez após atingir a carga crítica. Após atingir amplitudes modais por volta de 1,5 da espessura do painel passam para um regime com ganho de rigidez. As expansões modais para os termos ímpares não mostraram muitas diferenças entre si.

Tabela 2. Expansões modais para os deslocamentos transversais do painel cilíndrico w .

Modelo	Expansão Modal
1	$A_{1,1}(t)$
2	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t)$
3	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t) + A_{3,1}(t)$
4	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t) + A_{3,1}(t) + A_{3,3}(t)$
5	$A_{1,1}(t) + B_{2,2}(t)$
6	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t) + B_{2,2}(t)$
7	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t) + A_{3,1}(t) + B_{2,2}(t)$
8	$A_{1,1}(t) + A_{1,3}(t) + A_{3,1}(t) + A_{3,3}(t) + B_{2,2}(t)$
9	$A_{1,1}(t) + B_{2,2}(t) + B_{2,8}(t)$
10	$A_{1,1}(t) + B_{2,2}(t) + B_{2,8}(t) + B_{8,2}(t)$

Nas Figs. 2 (b)-(d) e (f), os painéis com $R = 4.1665\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, $R = 2.083\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 4.00\text{m}$ e $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 2.00\text{m}$, respectivamente, apresentam uma bifurcação simétrica estável, o comportamento do painel cilíndrico é com ganho de rigidez após atingir a carga crítica, ou seja, a carga axial aumenta com o incremento da amplitude modal.

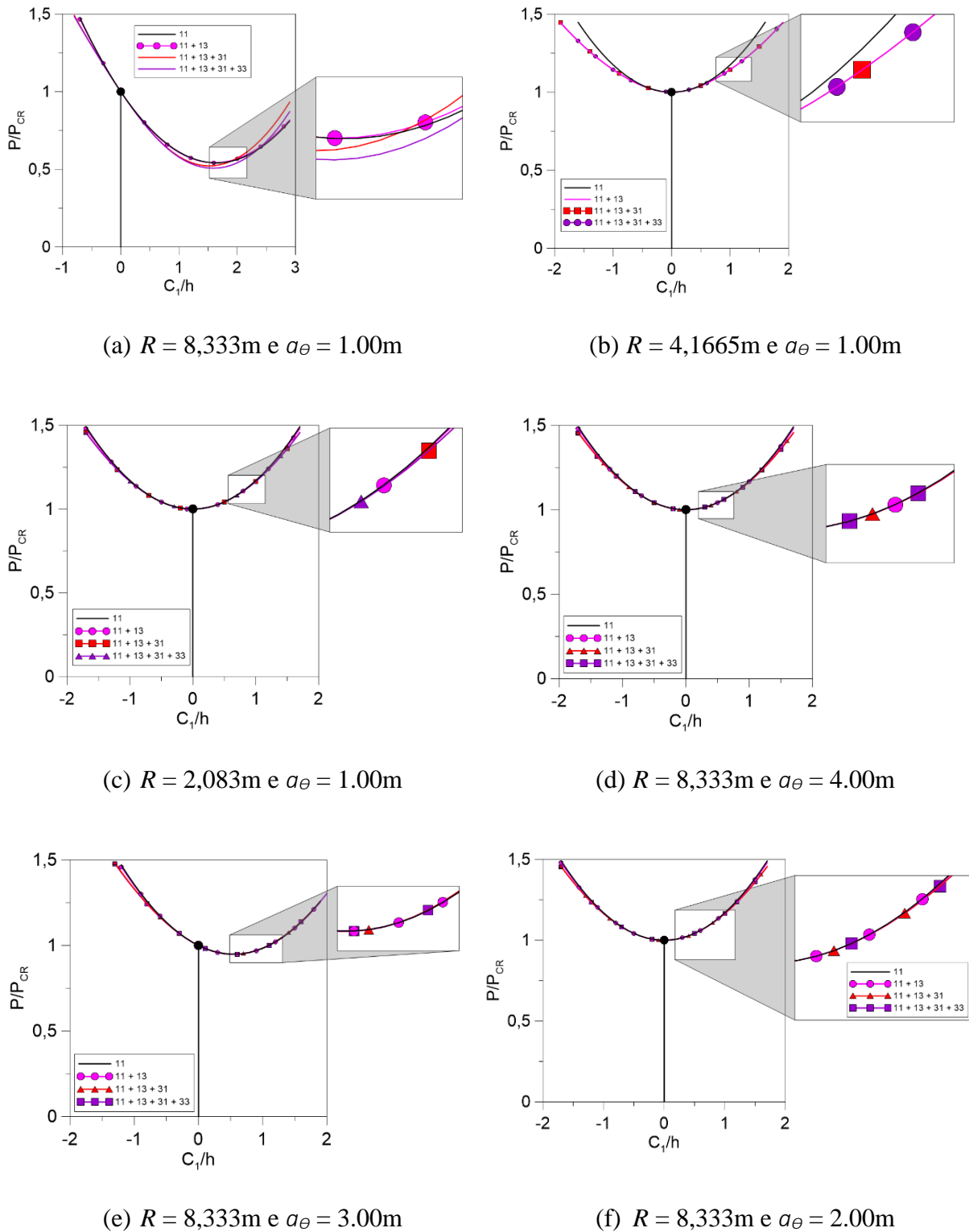


Figure 2. Relação carga-amplitude do deslocamento para painéis cilíndricos com diferentes raios de curvatura R e comprimento circunferencial a_θ e com espessura $h = 0.01\text{m}$. Modelos de 1 a 4 da Tabela 2.

A Fig. 2 (e), painel cilíndrico com comprimento circunferencial $a_\theta = 3.00\text{m}$ e $R = 8.333\text{m}$, se mostra com um comportamento não linear estático semelhante ao da Fig. 2 (a), apresenta-se inicialmente com perda de rigidez, porém seu regime com ganho de

rigidez passa a acontecer com amplitudes modais para valores entre a metade da espessura do painel até o valor próximo a espessura do painel. Para as Figs. 2 (b)-(f), o incremento de modos ímpares não possuem mudanças significativas no comportamento dos painéis.

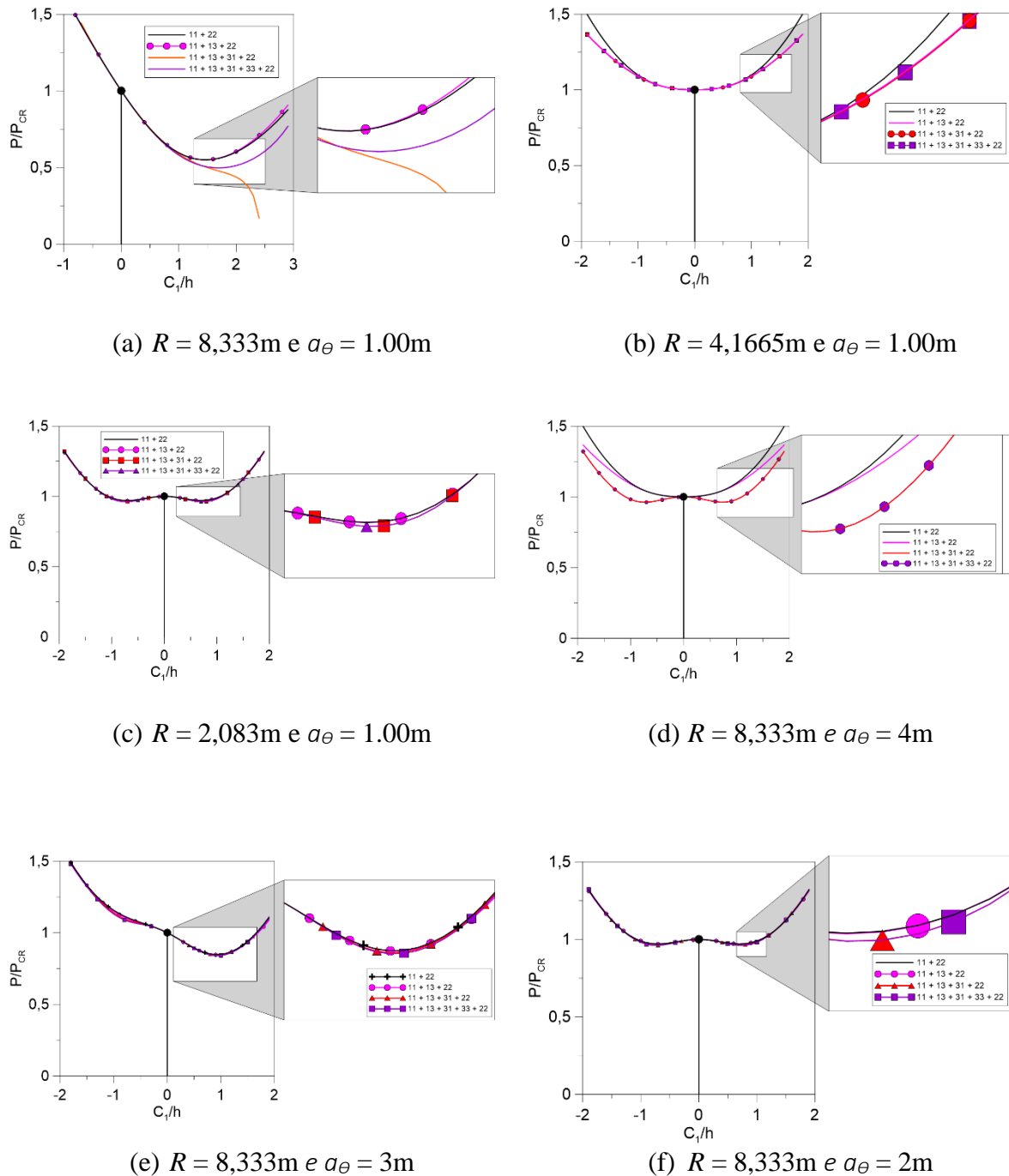


Figure 3. Relação carga-amplitude do deslocamento para painéis cilíndricos com diferentes raios de curvatura R e comprimento circunferencial a_{θ} e com espessura $h = 0.01\text{m}$. Modelos de 5 a 8 da Tabela 2.

O estudo se segue com o acoplamento de um termo par para cada expansão modal dos termos ímpares, citados nos Modelos de 1 a 4, formando os Modelos de 5 a 8 da Tabela 2. Os

comportamentos não lineares para os painéis cilíndricos com estas expansões modais estão apresentados na Fig. 3.

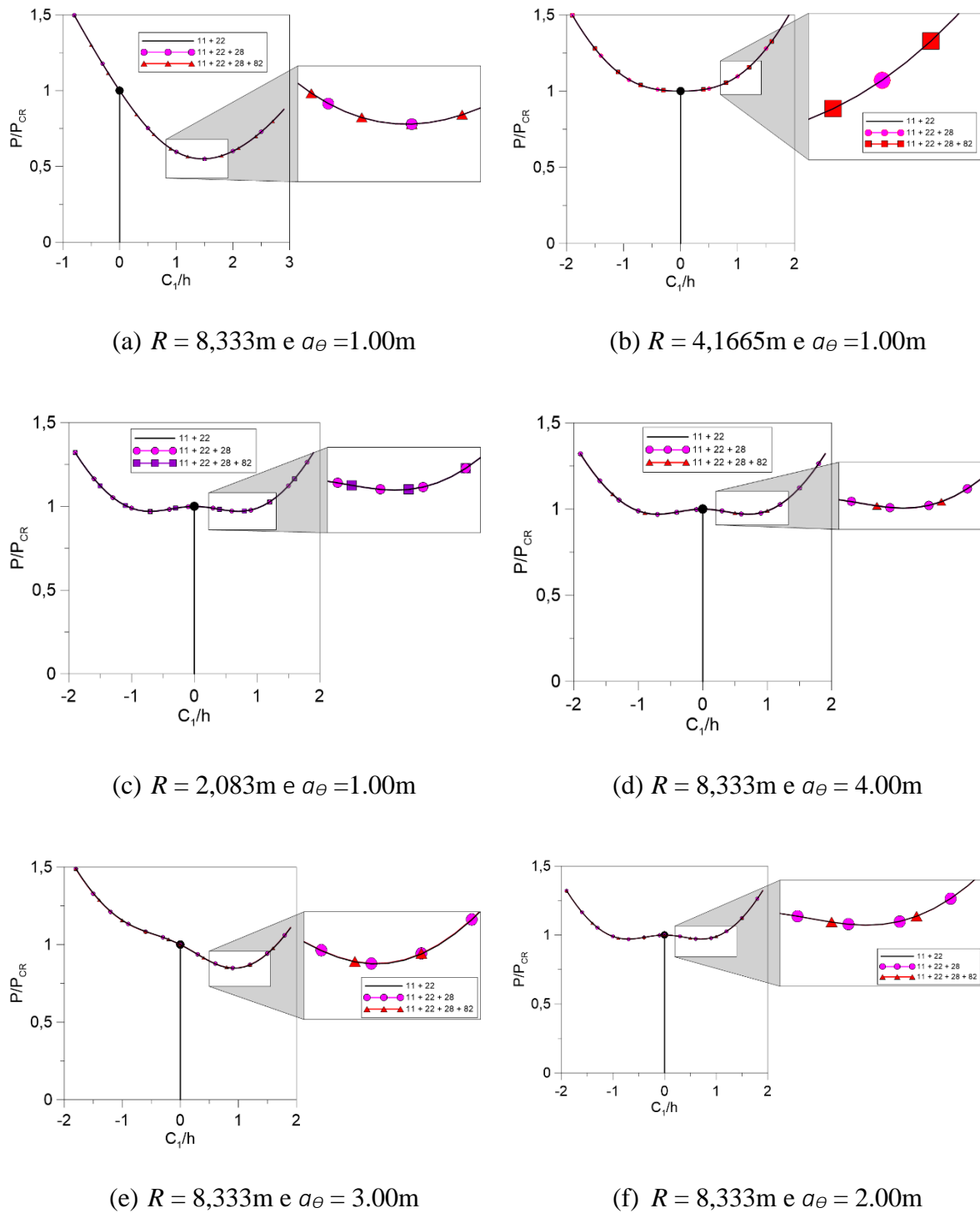


Figure 4. Relação carga-amplitude do deslocamento para painéis cilíndricos com diferentes raios de curvatura R e comprimento circunferencial a_θ e com espessura $h = 0.01\text{m}$. Modelos 5, 9 e 10 da Tabela 2.

O painel cilíndrico cujo raio de curvatura é $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, Fig. 3 (a), manteve praticamente o mesmo comportamento não linear que para as expansões modais com apenas termos ímpares, Fig. 2 (a), apresentando diferença apenas para o Modelo 8, com quatro termos ímpares e um termo par que apresentou uma carga mínima pós-crítica menor, e para o Modelo 7, composto por três termos ímpares e um termo par, que perde convergência numérica após atingir a carga mínima pós-crítica. Pode-se concluir que a adição de termos pares, para este caso de geometria, não teve uma influência significativa no comportamento estático não linear do painel.

O caminho pós-crítico não apresentou alterações significativas com a inclusão dos termos pares na solução modal para o caso apresentado na Fig. 3 (b), painel com $R = 4.1665\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$. O comportamento não linear pós-crítico continuou apresentando ganho de rigidez de acordo com o incremento da amplitude modal. Já as Figs. 3 (c)-(f) pode-se notar que o modo par teve grande influência, sendo capaz de mudar completamente seu comportamento. Então, podemos reforçar a ideia da importância de se escrever o deslocamento transversal com todos os modos de flambagem necessários e de forma correta, podendo chegar a comportamentos errôneos se não tiver escrito de forma adequada.

As bifurcações continuaram simétricas e estáveis para painéis com raio de curvatura $R = 2.083\text{m}$ e comprimento circunferencial $a_\theta = 1.00\text{m}$, ou $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 4.00\text{m}$, $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 2.00\text{m}$ e simétrica instável para o painel $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 3.00\text{m}$. Quanto ao número de termos ímpares junto com o termo par, apenas o painel com $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 4.00\text{m}$ apresentou alterações. Os outros painéis independentes se o deslocamento transversal era composto por um, dois, três ou quatro termos ímpares acoplados ao termo par, seu comportamento era o mesmo. Para o painel com $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 4.00\text{m}$, quando presentes apenas um ou dois termos ímpares junto ao modo par, seu comportamento era apenas com ganho de rigidez, isto modificou a partir de três modos ímpares combinados com o modo par, perdendo um pouco de rigidez antes de começar a ganhar.

Verificou-se que não há interferência da quantidade de termos pares ao se descrever o deslocamento transversal, com a composição de um, dois ou três termos pares e um termo ímpar, os resultados estão dispostos na Fig. 4. Para todos os seis tipos diferentes de painéis, o seu comportamento apresenta-se o mesmo, independentemente do número de termos pares presentes na composição do seu deslocamento transversal, ou seja, basta um termo par presente para descrever de forma correta o seu comportamento estático não linear.

3.2 Painéis cilíndricos imperfeitos

Estenderam-se as análises para os painéis cilíndricos com imperfeições geométricas iniciais, estudando o comportamento não lineares dos seis tipos de painéis cilíndricos, cada um apresentando imperfeições geométricas para 2.5%, 5%, 7.5% e 10% em relação à espessura do painel, $h = 0.001\text{m}$. Os resultados estão ilustrados na Fig. 5, referentes a composição do deslocamento transversal para a combinação de um termo ímpar e um termo par, já que foi o modelo que apresentou o comportamento correto para os painéis cilíndricos perfeitos com menos termos na expansão do deslocamento transversal, Modelo 5 da Tabela 2.

Na construção da Fig. 5 foi padronizado a relação entre a porcentagem de imperfeição e suas cores de representação da seguinte maneira:

- Painel Perfeito – Cor preta;
- Painel com 2.5% de imperfeição – Cor Rosa;
- Painel com 5% de imperfeição – Cor Azul;

- Painel com 7.5% de imperfeição – Cor Vermelho.
- Painel com 10% de imperfeição – Cor Roxo.

Nos painéis com bifurcação simétrica foram analisados apenas a imperfeição com amplitude positiva. Nos painéis com bifurcação assimétrica foram analisados tanto a imperfeição com amplitude positiva quanto a imperfeição com amplitude negativa. Na Fig. 5 os painéis com $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 4.00\text{m}$, e $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 2.00\text{m}$, possuem o mesmo comportamento do painel com raio de curvatura $R = 2.083\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, por isso eles não foram representados.

Todos os gráficos com a presença da imperfeição geométrica inicial apresentaram comportamento de acordo com o esperado na literatura, para uma mesma amplitude corresponderam com cargas inferiores às do painel perfeito. Para os painéis com bifurcação assimétrica, em que a carga diminui após a carga crítica, existe uma carga máxima que diminui com o aumento da imperfeição. Já nos painéis com bifurcação simétrica estável, a imperfeição contorna a bifurcação e suas cargas diminuem quando aumenta a imperfeição geométrica, para uma mesma amplitude.

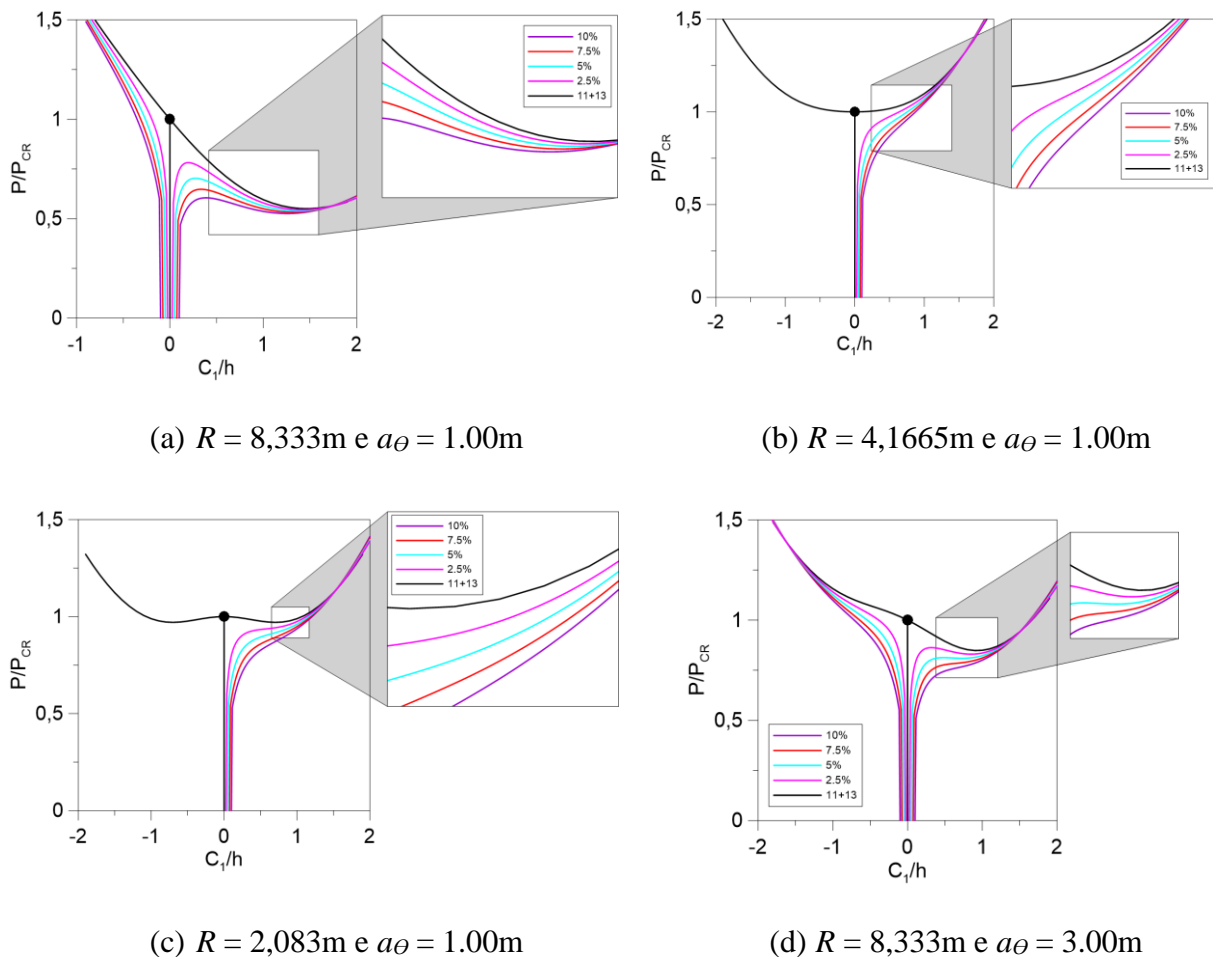


Figure 5. Painel Imperfeito - Relação carga-amplitude do deslocamento para painéis cilíndricos com diferentes raios de curvatura R e comprimento circunferencial a_θ e com espessura $h = 0.01\text{m}$. Modelos de 5 a 8 da Tabela 2.

O painel com raio de curvatura $R = 8.333\text{m}$ e $a_\theta = 1.00\text{m}$, Fig. 5 (a), se comportou um pouco diferente ao atingir a carga máxima após a carga crítica, pois tanto para o painel perfeito ou com imperfeições geométricas eles passam pelo mesmo ponto na carga máxima e após ela, quanto maior a imperfeição maior e a carga para uma mesma amplitude.

Diante de todas estas análises pode-se notar a importância do acoplamento modal, principalmente dos termos quadráticos, ao se descrever o deslocamento transversal tanto para painéis perfeitos quanto apresentando imperfeições geométricas.

4 CONCLUSÕES

As conclusões para este trabalho tiveram como objetivo realizar análises lineares e não lineares para painéis cilíndricos simplesmente apoiados e submetidos a um carregamento axial estático. Os painéis cilíndricos são esbeltos e apresentam diferenças entre si apenas na sua geometria, com variações para o raio de curvatura R e o comprimento circunferencial a_θ . Também foi estudado a influência da imperfeição geométrica para estes painéis cilíndricos. Nas análises lineares foram calculadas as cargas críticas para vários tipos de combinações de pares do modo de flambagem, a fim de encontrar a combinação de ondas (m, n) que possui a menor carga crítica, para cada tipo de painel. Os resultados apontaram que de acordo com a diminuição do raio de curvatura R e, conseqüentemente, o aumento no ângulo de abertura Θ , mantendo o mesmo comprimento circunferencial a_θ , ocorre um aumento no valor da carga crítica nos painéis cilíndricos, ou seja, a carga crítica dos painéis aumenta de acordo com o aumento do seu raio de curvatura R . Também se obteve como conclusão para as análises lineares que se o raio de curvatura R for mantido constante, o aumento no ângulo de abertura Θ , devido ao aumento do comprimento circunferencial a_θ , responde com um aumento no número de semi-ondas circunferenciais (n) , e as cargas críticas se mantêm praticamente iguais.

Para as análises não lineares avaliou-se o comportamento dos painéis cilíndricos, a influência dos acoplamentos modais nas expansões modais e a interferência das imperfeições geométricas iniciais no caminho pós-crítico. Para os acoplamentos modais analisou-se a influência de modos ímpares, formados por funções harmônicas do tipo seno, e modos pares, composto por funções harmônicas do tipo cosseno. Os acoplamentos para os termos ímpares ao modo fundamental não apresentaram mudanças significativas no seu comportamento e para a maioria dos painéis analisados se comportaram com ganho de rigidez após atingirem a carga crítica. Em relação ao modo par para a maioria dos painéis cilíndricos seu comportamento foi completamente modificado, apresentou um caminho com perda de rigidez, após atingir a carga crítica, e em seguida voltando a ganhar rigidez após atingir o mínimo pós-crítico. Devido à grande mudança no comportamento dos painéis cilíndricos influenciada pelo acoplamento de modos pares, nota-se a importância da representação correta do deslocamento transversal. Em relação à quantidade dos termos pares ao se descrever o deslocamento transversal, não apresentou influência, apenas um termo par já é suficiente para descrever de forma correta o acoplamento modal no seu comportamento estático não linear. Dessa forma, a solução modal que melhor representa o comportamento do painel cilíndrico, de forma correta e com menor número de modos, é o Modelo 7 da Tabela 2, composta de três termos ímpares e um termo par. Quanto a imperfeição geométrica inicial, os resultados apresentaram comportamentos de acordo com o esperado na literatura, as cargas máximas dos painéis imperfeitos foram inferiores às do painel perfeito para uma mesma amplitude, e diminuíram de acordo com o aumento da imperfeição geométrica.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível graças ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq, FAPERJ-CNE e FAPEG.

REFERÊNCIAS

Amabili, M., 2003. Comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells: Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, pp. 1091-1125.

Amabili, M., 2005. Nonlinear vibrations of circular cylindrical panels. *Journal of Sound and Vibration*, v. 281, pp. 509-535.

Amabili, M., & Paidoussis, M. P., 2003. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shell and panels, with and without fluidstructure interaction. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, pp. 349-381.

Donnell, L. H., 1934. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol.56, pp. 795-806.

Gonçalves, P. B., 1987. Interação dinâmica não-linear entre fluido e cascas delgadas. Tese de Doutorado - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

Hui, D., 1984. Influence of Geometric Imperfections and In-Plane Constraints on Nonlinear Vibrations of Simply Supported Cylindrical Panels. *Journal of Applied Mechanics*, v. 51, pp. 383-390.

Lam, K. Y., & Loy, C. T., 1994. Vibrations Characteristics of Thin Cylindrical Panels. *Applied Acoustics*, vol. 42, pp. 347-359.

Leissa, A. W., & Kadi, A. S., 1971. Curvature Effects on Shallow Shell Vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, v. 16, n. 2, pp. 173-187.

Moussaoui, F., & Benamar, R., 2002. Non-Linear Vibrations off Shell-Type Structures: A Review With Bibliography. *Journal of Sound and vibration*, v. 255, pp. 161-184.

Popov, A. A., Thompson, J. M. T., & CROLL, J. G. A., 1998. Bifurcation Analyses in the Parametrically Excited Vibrations of Cylindrical Panels. *Nonlinear Dynamics*, v. 17, pp. 205-225.

Sattler, H. A. R., Silva, F. M. A., Del Prado, Z. J. G. N. & Gonçalves, P. B., 2014. Análise da vibração livre não-linear de painéis cilíndricos. In Fortaleza, CE, Brazil, *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, pp. 23–26.

Sattler, H. A. R., 2015. Modelo de baixa dimensão para análise dinâmica de painel cilíndrico simplesmente apoiado. Dissertação de Mestrado - PPG GECON, Universidade Federal de Goiás. Goiânia.