



## DINÂMICA NÃO LINEAR DE UMA COBERTURA DE BAMBU TENSIONADA

**Márcia H.Y. Sato**

**Reyolando M.L.R.F. Brasil**

marciahsato@yahoo.com.br

reyolando.brasil@ufabc.edu.br

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Av. Prof. Luciano Gualberto, 380, São Paulo, SP, 05508-010, Brasil

**Resumo.** *Apresentamos um estudo de dinâmica não linear de uma cobertura de bambu tensionada. Ambas as cargas quase estáticas, tais como peso próprio e pretensão inicial, e as cargas de vento aleatório variando no tempo são consideradas. A integração numérica no passo a passo no tempo é implementada via Diferenças Finitas para resolver as equações diferenciais não lineares do movimento. Como grandes deslocamentos são considerados, e grandes pretensões das forças axiais são aplicadas, a não linearidade geométrica está presente na formulação. Além disso, o comportamento elástico linear do bambu é implementada, baseada em dados experimentais. O trabalho futuro vai implementar natureza aleatória das forças do vento usando uma abordagem vento sintético e comportamento do material não-linear.*

**Palavras-chaves:** *dinâmica não linear; não linearidade geométrica; forças do vento; bambu*

**Abstract.** *We present a study on the nonlinear dynamics of a tensioned bamboo roof. Quasi-static loads, such as self-weight, initial pretension, and equivalent static wind loads are considered. Step-by-step numerical time integration via Finite Differences is implemented to solve the nonlinear differential equations of motion. As large displacements are considered, and large pretension axial forces are applied, geometric nonlinearity is present in the formulation. Also, linear elastic behavior of the bamboo is implemented, based on experimental data. Future work will implement random nature of wind forces using a synthetic wind approach, and nonlinear material behavior.*

**Keywords:** *nonlinear dynamics; geometric nonlinearity; wind forces; bamboo*

## 1 INTRODUÇÃO

Realizamos uma análise não linear no domínio do tempo, utilizando uma formulação vetorial, para um modelo 3D de um parabolóide hiperbólico, conforme Buchholdt (1999), de uma cobertura de varas de bambus tensionadas, sob ação do vento.

O programa de computador desenvolvido para este trabalho resolve as equações de movimento através do Método da Diferença Central. Calculamos (grandes) deslocamentos e forças de restauração em cada passo de tempo, utilizando uma apropriada relação linear tensão-deformação para o bambu. Além disso, foi implementado um programa para determinação da máxima e da mínima frequência de vibração livre não amortecida na malha de varas, considerando a rigidez geométrica devida à protensão das mesmas.

A solução do problema estático não linear do efeito das forças de gravidade é feita por uma simulação tipo relaxação dinâmica, usando o programa de análise dinâmica com amortecimento quase crítico. A determinação do amortecimento crítico é feita a partir da mínima frequência de vibração. O passo de integração máximo necessário à estabilidade numérica do método é determinado a partir da máxima frequência de vibração.

As forças de interação fluido-estrutura devidas ao vento, são, nesta fase da pesquisa, adotadas pelos valores estáticos equivalentes da Norma Brasileira de Forças devidas ao vento sobre estruturas, a NBR 6123:1988. Os coeficientes aerodinâmicos de pressão adotados foram obtidos em túnel de vento por Esquilland e Saillard, 1963, apud Paik (1975). Aqui, também, o programa de análise dinâmica, com amortecimento quase crítico, é usado para uma análise tipo relaxação dinâmica.

## 2 MÉTODOS COMPUTACIONAIS

### 2.1 Integração de EDO por diferenças finitas, vetorizada

As equações diferenciais ordinárias do movimento de um sistema estrutural **linear** discretizado podem ser colocadas na forma matricial:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{w\} \quad (1)$$

onde  $[m]$  é a matriz de massa,  $[c]$  a matriz de amortecimento,  $[k]$  a matriz de rigidez e  $\{u\}$  o vetor de deslocamentos. Pontos superpostos simbolizam derivação no tempo para obtenção dos vetores de velocidade e aceleração. O vetor de carregamento (o vento, por exemplo), é  $\{w\}$ .

A Eq. (1) será integrada passo-a-passo no tempo por aproximações de diferenças finitas para os vetores de velocidade e a aceleração num instante  $t_i$ , com passo  $h$ , na forma:

$$\{\dot{u}_i\} = \frac{\{u_{i+1}\} - \{u_{i-1}\}}{2h} \quad (2)$$

$$\{\ddot{u}_i\} = \frac{\{u_{i+1}\} - 2\{u_i\} + \{u_{i-1}\}}{h^2} \quad (3)$$

A formula de recorrência em cada passo é

$$[\hat{k}]\{u_{i+1}\} = \{\hat{p}_i\} \quad (4)$$

onde

$$[\hat{k}] = \frac{1}{h^2} [m] + \frac{1}{2h} [c] \quad (5)$$

$$\{\hat{p}_i\} = \{w_i\} - \left( [k] - \frac{2}{h^2} [m] \right) \{u_i\} - \left( \frac{1}{h^2} [m] - \frac{1}{2h} [c] \right) \{u_{i-1}\} \quad (6)$$

O algoritmo das Eqs. (4) a (6) não é auto iniciado, já que na origem (tempo inicial) não se dispõem dos deslocamentos do passo anterior. Um possível esquema para inicializar é computar a aceleração inicial a partir dos deslocamentos, velocidades e forças iniciais dadas, é considerar que essa aceleração permanece constante ao longo do primeiro intervalo de tempo, um movimento uniformemente acelerado.

Particularmente, na nossa formulação, as matrizes de massa e de amortecimento serão diagonais (*lumped*), esta última considerada proporcional à matriz de massa, podendo essas diagonais serem colocadas em forma de vetores. Além disso, na Eq. (1), **linear**, o vetor de forças restauradoras está escrito como

$$\{r(\{u\})\} = [k]\{u\} \quad (7)$$

Em vez, disso, por se tratar de formulação geometricamente não linear, o vetor das forças elásticas restauradoras  $\{r(\{u\})\}$  é calculado diretamente a partir das forças normais  $N$ , nas barras que chegam em cada nó. Essas forças são o resultado da mudança do comprimento dessas barras, originalmente  $L$ , que passa a ser  $L'$ , computados dos deslocamentos de suas extremidades ao final de cada passo, mais as forças de protensão  $N_0$ :

$$N = N_0 + \frac{EA}{L} (L' - L) \quad (8)$$

Leva-se, assim, em consideração, a não linearidade geométrica devida aos grandes deslocamentos obtidos e às forças de protensão.

Dessa forma, o algoritmo de integração é totalmente vetorial, não implicando em montagem e inversão de matrizes, com o conseqüente aumento da velocidade de computação.

## 2.2 Cálculo das frequências de vibração

Neste estudo, implementamos, também, um programa com lógica semelhante aos programas convencionais de elementos finitos para determinação da máxima e mínima frequências de vibração da estrutura. Supondo solução harmônica para a Eq. (1), na ausência de amortecimento e carregamento (vibrações livres não amortecidas), recai-se no problema generalizado de autovalores e auto vetores

$$[k]\{\hat{u}\} = \omega^2 [m]\{\hat{u}\} \quad (9)$$

em que  $\{\hat{u}\}$  são os modos e  $\omega^2$  as frequências de vibração livre não amortecida do sistema, e a matriz de rigidez engloba tanto a matriz de rigidez elástica como a matriz de rigidez geométrica para levar em consideração as forças de protensão iniciais:

$$[k] = [k_0] + [k_G] \quad (10)$$

A nível de cada elemento, a matrizes de rigidez geométrica, 6x6, é

$$[\bar{k}_G] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} -[I] & [I] \\ [I]^T & -[I] \end{bmatrix} \quad (11)$$

em que  $[I]$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ .

Utilizamos o método da potência, ou de Stodola-Vianello, para a determinação dessas duas frequências de interesse. A determinação do amortecimento crítico da estrutura é feita a partir da mínima frequência de vibração. O passo de integração máximo necessário à estabilidade numérica do método de diferenças finitas é determinado a partir da máxima frequência de vibração.

### 2.3 Análise estática não linear por relaxação dinâmica

Neste artigo, apresentamos apenas a análise pseudo estática geometricamente não linear da estrutura sob carregamentos de gravidade, protensão e das forças de interação fluido-estrutura devidas ao vento, adotadas pelos valores estáticos equivalentes da Norma Brasileira de forças devidas ao vento sobre estruturas, a NBR 6123:1988.

Esse cálculo é feito utilizando o próprio programa de análise dinâmica para integração no tempo por diferenças finitas, com amortecimento quase crítico. Esse procedimento é conhecido na literatura como *relaxação dinâmica*.

## 3 O MODELO ESTRUTURAL

### 3.1 Geometria, massas e amortecimento

A estrutura considerada é o parabolóide hiperbólico de varas de bambu mostrado em planta e perspectiva nas Figs. 1 e 2, com modulação de 2 m entre elas. O nó central tem cota  $z = 0,0$  m. Dois nós fixos opostos têm cota  $z = -2,0$  m e os outros dois nós fixos opostos cota  $z = +2,0$  m. A equação da superfície é

$$z = \frac{x^2 - y^2}{32} \quad (11)$$

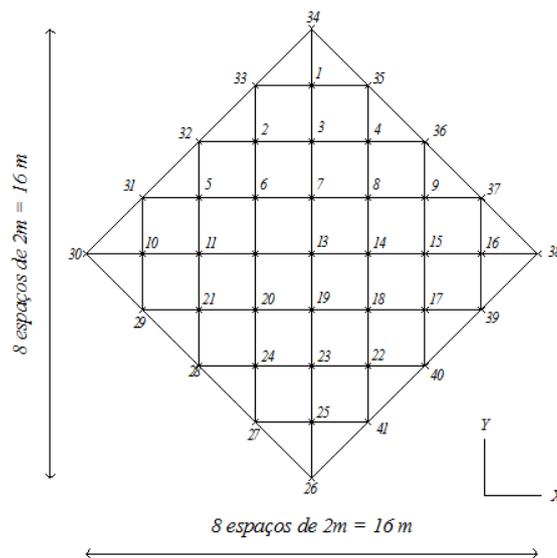


Figura 1. Planta do Modelo estrutural

É considerada uma massa concentrada de 50 kg em cada nó, correspondente à massa da cobertura e da estrutura na área de influência desse nó, no valor de 12,5 kg/m<sup>2</sup>. A seção transversal de todas as varas de bambu foi adotada 0,0002 m<sup>2</sup>. Também foi adotada carga de protensão inicial em todas as barras  $N_0 = 1$  KN.

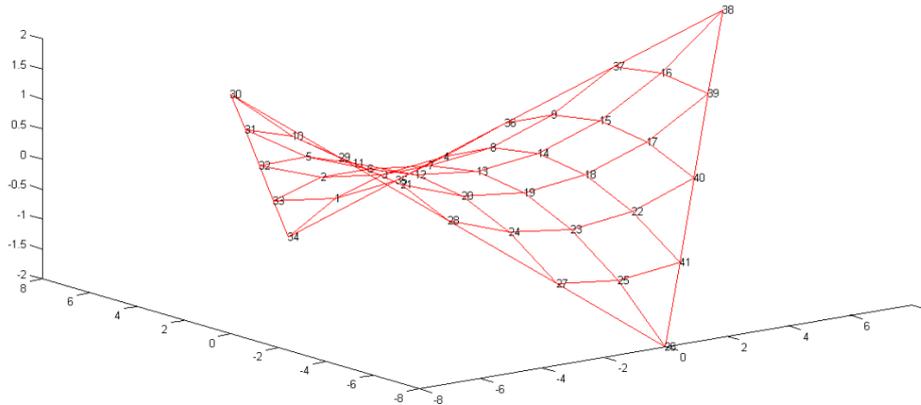


Figura 2. Perspectiva do Modelo estrutural

### 3.2 Material

O material de nossa estrutura são varas de bambu. As propriedades adotadas para o bambu usado no nosso exemplo são dadas na Fig. 3, conforme Amaral et al. (2003). O módulo de elasticidade medido experimentalmente é definido como 10 GPa.

Neste trabalho, consideramos propriedades elástico lineares para o nosso material. Em nossa pesquisa em andamento, um modelo de material não linear está sendo desenvolvido e será relatado em publicações futuras.

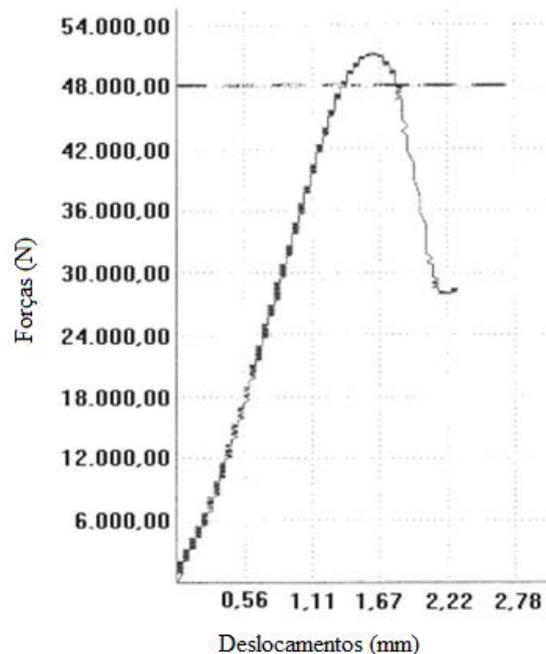


Figure 3: Carga experimental x deslocamentos para um espécime de bambu

## 4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O EFEITO DO VENTO

Neste artigo, consideram-se as forças aerodinâmicas de interação fluido-estrutura como pseudo estáticas, como preconizado na Norma Brasileira de forças devidas ao vento sobre estruturas em vigor, a NBR 6123:1988.

A pressão do vento é sempre na direção da normal à superfície da estrutura. Tem, portanto, a direção do vetor gradiente da função escalar  $f(x, y, z)$  que a representa.

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \begin{Bmatrix} -x/16 \\ y/16 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Essa pressão é dada pela Norma como

$$q = 0,613V_k^2 \quad (10)$$

onde a velocidade característica do vento é

$$V_k = S_1 S_2 S_3 V_0 \quad (11)$$

Sendo  $V_0$  a velocidade básica dada pela Norma para cada região (adotada 40 m/s),  $S_1$  o fator topográfico,  $S_2$  um fator que leva em conta a rugosidade do terreno, a altura e as dimensões da estrutura, e  $S_3$  o fator estatístico da importância econômico-social da obra. São todos adotados unitários neste trabalho, resultando uma pressão aproximada de 1 KPa.

Os coeficientes aerodinâmicos de pressão externa para uma estrutura com esta não são disponíveis na NBR 6123:1988. Dessa forma, utilizaram-se coeficientes determinados em túnel de vento por Esquilland e Saillard, 1963, apud Paik (1975). São listados na Tabela 1.

**Tabela 1: Coeficientes aerodinâmicos de pressão**

Nó	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12		
$C_p$	-.50	-.33	-.45	-.60	.20	-.10	-.36	-.68	-.83	.10	.43	.44		
Nó	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
$C_p$	.10	-.33	-.63	-.80	-.83	-.68	-.36	-.10	.20	-.60	-.45	-.33	-.50	

## 5 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

### 5.1 Frequências de vibração livre não amortecida

Executando o programa de elementos finitos com consideração de rigidez geométrica, foi obtida, pelo método de Stodola-Vianello, a máxima frequência de vibração de 281,7 rad/s, levando a passo máximo de integração de 0,0035 s. Pelo mesmo método determinou-se a mínima frequência de 2,2 rad/s, levando a uma matriz de amortecimento de Rayleigh (critica) 4,3845 vezes a de massa.

## 5.2 Cargas de gravidade

A primeira simulação considera apenas as cargas verticais de peso próprio, ou seja, as massas nodais vezes a aceleração da gravidade, considerada  $10 \text{ m/s}^2$ . Como já mencionado, utiliza-se o próprio programa de análise dinâmica, com amortecimento quase crítico para um procedimento tipo relaxação dinâmica. A Fig. 4 mostra o histórico de resposta na direção vertical do nó central da estrutura. O deslocamento vertical máximo, de cima para baixo, obtido é de 18,94 cm.

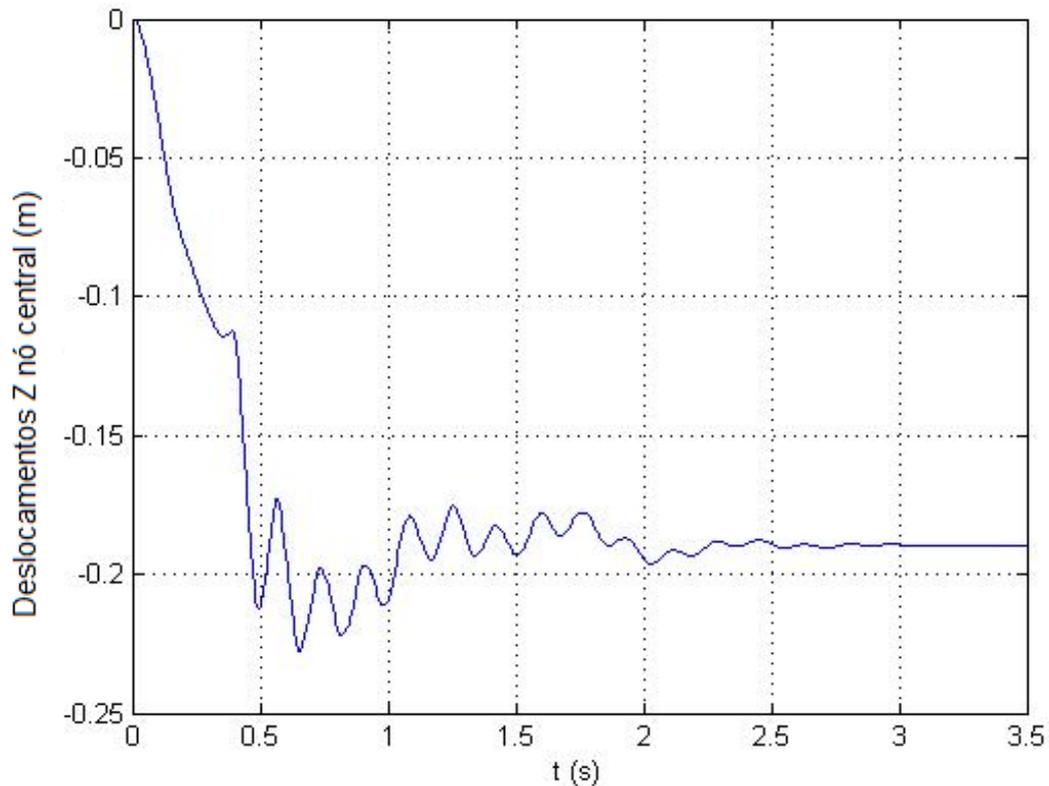


Figura 4: Deslocamento estático vertical do nó central devido peso próprio (m)

## 5.3 Vento pseudo estático

A segunda simulação considera as forças de interação fluido-estrutura do vento, conforme descrito na seção 4 deste artigo, consideradas como estáticas, como preconizado na Norma Brasileira de forças devidas ao vento sobre estruturas em vigor, a NBR 6123:1988.

A Fig. 5, mostra o histórico de resposta na direção vertical do nó central da estrutura. O deslocamento vertical máximo, de cima para baixo, obtido é de 11,56 cm.

Assim, a soma dos deslocamentos verticais máximo do nó central, considerando tanto o peso próprio como o vento chegou a 30,5 cm, de cima para baixo, um valor bem considerável, para uma cobertura com vãos máximos de 16m, justificando a formulação para grandes deslocamentos.

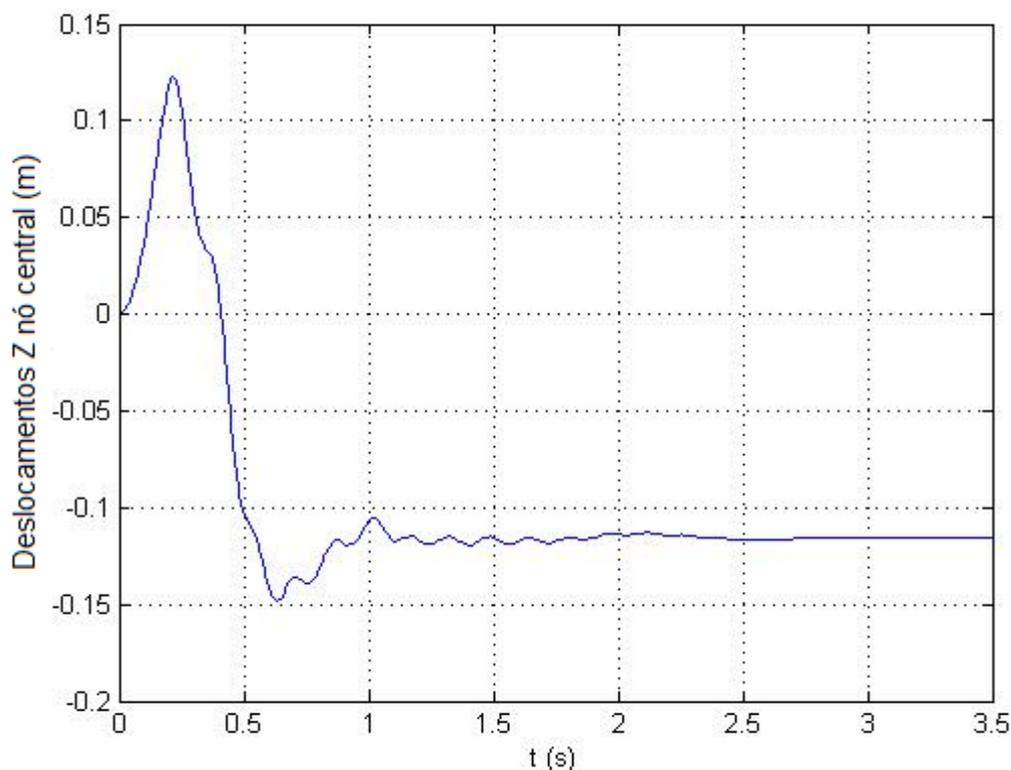


Figura 5: Deslocamento vertical do nó central devido a vento pseudo estático (m)

## 6 CONCLUSÕES

Apresentamos, neste artigo, a análise dinâmica não linear de uma cobertura com estrutura de barras de bambu protendidas na forma de um parabolóide hiperbólico. O algoritmo utilizado realiza a integração numérica no tempo passo-a-passo via aproximações de diferenças finita, numa formulação vetorial que evita a formação e inversão de matrizes. A não linearidade geométrica é introduzida pela consideração de grandes deslocamentos e a ação de forças de protensão. O vetor de forças restauradoras é computado em cada passo de tempo a partir das forças normais das barras que chegam em cada nó. Neste artigo, o programa é utilizado para determinação de deslocamentos estáticos devidos ao peso próprio e ao vento, considerado pseudo estático, conforme Norma Brasileira, num procedimento de relaxação dinâmica.

Em trabalho futuro, implementaremos uma análise dinâmica considerando o vento com uma solicitação aleatória (Newland, 1993) por um procedimento inspirado no Método do Vento Sintético de Franco (2003).

## AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem apoio por CNPq, CAPES e FAPESP, todas agências brasileiras de financiamento de pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

- ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnica), NBR 6123:1988, 1988, "Forças devidas ao vento em edificações". ABNT, Rio de Janeiro.
- Amaral, J.C., Tamizaki, V.M., Antunes, A.E.B., 2003, "Comportamento do bambu em ensaios de compressão simples". In: Jornada 2003 de Iniciação Científica e Pós-Graduação da UNESP, Guaratinguetá.
- Buchholdt, H.A., 1999, "Introduction to Cable Roof Structures", Cambridge University Press, Second Edition.
- Franco, M., 1993, "Direct Along-Wind Analysis of Tall Structures", Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, BT/PEF/9303, São Paulo.
- Newland, D.E., 1993, "An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis: Third Edition", Courier Dover Publications.
- Paik, J.K., 1975, "Statistical Analysis of Cable Nets Under Wind Loads", Ph.D. Thesis, New York University