



AVALIAÇÃO DO ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS EM ELEMENTOS TRIANGULARES

Neimar A. da Silveira Filho

niemarsilveira@ufmg.br

Thaiane Simonetti de Oliveira

thaianesimo@gmail.com

Felício Bruzzi Barros

feliciobbarros@gmail.com

Roque Luiz da Silva Pitangueira

roque@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Resumo. Neste trabalho o desempenho do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é avaliado, tendo como enfoque a base de monômios utilizada para a realização do enriquecimento extrínseco da aproximação. O MEFG, pode ser considerado uma formulação não-convencional do Método dos Elementos Finitos (MEF), na qual as funções de forma são aprimoradas, multiplicando-as por um conjunto de funções de enriquecimento polinomiais ou não, obtidas analiticamente ou numericamente. Aqui, a investigação concentra-se nas funções de enriquecimento polinomiais e o elemento finito empregado é o triangular de deformação constante. Diversas combinações de monômios são utilizadas para avaliar a qualidade da aproximação, bem como o custo computacional envolvido. Este último está associado, entre outros fatores, ao número de graus de liberdade utilizados na análise. Busca-se, por isso, estudar o desempenho das funções de enriquecimento, contrapondo a solução aproximada com o número de graus de liberdade utilizado. As análises são realizadas em problema da Teoria da Elasticidade bidimensional. Importantes conclusões são encontradas quanto à influência dos monômios empregados para a construção das funções de enriquecimento do MEFG, na expansão do espaço de soluções aproximadas.

Keywords: Método dos elementos finitos generalizados, Método dos elementos finitos, mecânica computacional.

1 INTRODUÇÃO

O advento dos métodos numéricos para a solução dos problemas da Engenharia, especialmente com o desenvolvimento e difusão do uso de computadores, propiciou a solução de problemas inviáveis de serem resolvidos analiticamente. Dentro deste contexto, surge o Método dos Elementos Finitos (MEF), um eficiente recurso numérico para a resolução de problemas de valor de contorno, a partir de funções de forma que possibilitam a obtenção das incógnitas no interior dos elementos e associadas ao comportamento físico que se deseja representar (Szabó & Babuška, 1991). Especificamente na Engenharia de Estruturas, o MEF encontra-se hoje amplamente consolidado. Existem, porém, fenômenos cujo comportamento, a formulação convencional do MEF não é capaz de descrever de maneira satisfatória, despertando o desenvolvimento de novas estratégias para tal fim. Surge, então, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). (Duarte et al., 2000), em que as funções Lagrangianas do MEF são utilizadas para definir uma partição de unidade (PU), sobre a qual se realiza o seu enriquecimento. Tal particularidade permite que a aproximação seja construída de forma a minimizar a importância da malha de elementos finitos.

Busca-se neste trabalho avaliar e identificar, através de análises numéricas de um problema estrutural, combinações de monômios que possam ser usadas de forma mais eficiente no enriquecimento das funções de aproximação do MEF, dentro da abordagem do MEFG. Tal eficiência refere-se à qualidade da aproximação para malhas regulares ao mesmo tempo em que se tem o menor número possível de graus de liberdade. Este último para minimizar o esforço computacional requerido para as análises. Para isso, é investigada a sugestão de Oden et. al. (1998) de que o problema da dependência linear existente no MEFG poderia ser resolvido a partir da seleção criteriosa das funções de forma. Tal escolha criteriosa implicaria na exclusão das funções do espaço aproximado pela PU da constituição dos monômios enriquecedores.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A estratégia utilizada pelo MEFG, consiste em empregar funções de forma do MEF, N_j , como funções do tipo Partição da Unidade (PU). Enriquecidas a partir de um conjunto de funções linearmente independentes $I_j = \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\}$ (Barros, 2002), as funções produto definem as funções de forma ϕ_j do método como um todo:

$$\{\phi_j\}_{j=1}^{q_j} = N_j \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (1)$$

Onde, para qualquer ponto do domínio, tem-se a partição da unidade, PU:

$$\sum_{j=1}^n N_j(x) = 1 \quad (2)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quatro combinações de monômios foram utilizadas na Eq. (1): tipo $L_1 = \{1, x^2, y^2\}$, denominada como MEFG⁽¹⁾; tipo $L_2 = \{1, x^2, y^2, xy\}$ nomeada MEFG⁽²⁾; tipo $L_3 = \{1, x, y, x^2, y^2\}$, nomeada MEFG⁽³⁾; e do tipo $L_4 = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$, nomeada MEFG⁽⁴⁾. Tais enriquecimentos foram empregados para a realização de análises em um problema em estado plano de tensões

com solução conhecida da Teoria da Elasticidade. Para as análises realizadas foi utilizado o INSANE, plataforma computacional desenvolvida pelo Departamento de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

3.1 Análise de desempenho das funções enriquecedoras em uma chapa retangular

A avaliação do comportamento das diferentes funções enriquecedoras propostas quanto à qualidade da aproximação da solução se deu a partir de um problema de elasticidade bidimensional construído com base em Lee e Bathe (1993) e Barros (2002). Trata-se de uma chapa retangular, com as dimensões indicadas na Figura 1, submetida ao carregamento descrito conforme as seguintes equações:

$$q_y = \frac{120y}{L} - \frac{120y^2}{cL} \quad q_x = \frac{240y}{c} - 120 \quad (3)$$

Os dados do material e geométricos, em unidades consistentes são: Módulo de Elasticidade $E = 1,0 \cdot 10^7$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$; espessura $t = 1,0$. As soluções analíticas para o deslocamento nas direções x e y também são fornecidas por Lee e Bathe (1993):

$$u_x = \frac{1}{E} \left(\frac{120}{cL} x^2 y - \frac{92}{cL} y^3 - \frac{60}{L} x^2 - \frac{240}{c} xy + \frac{138}{L} y^2 + 120x - \frac{46c}{L} y \right) \quad (4)$$

$$u_y = \frac{1}{E} \left(-\frac{40}{cL} x^3 - \frac{36}{cL} xy^2 + \frac{120}{c} x^2 + \frac{36}{L} xy + \frac{36}{c} y^2 + \frac{46c}{L} x - 36y \right) \quad (5)$$

A partir das equações (4) e (5) e dos dados do problema, os seguintes valores são obtidos para a energia de deformação (U), tensão máxima ($\sigma_x \text{ máx}$) e o deslocamento máximo ($u_y \text{ máx}$), em unidades consistentes:

$$U = 0,478000; \quad \sigma_x \text{ máx} = 120,000000; \quad u_y \text{ máx} = -0,001830 \quad (6)$$

Os valores obtidos na Eq. (6) serão utilizados como padrão de comparação para os valores obtidos pelas análises computacionais.

Para a análise de desempenho dos enriquecimentos utilizou-se quatro tipos de malhas triangulares com 2, 4, 8 ou 32 elementos, Figura 2. Os enriquecimentos foram aplicados em cada malha, tendo como PU as funções do elemento finito de três nós (deformação constante) do tipo T3. Analisou-se, ainda, o problema utilizando malhas constituídas por elementos do tipo T3 sem enriquecimento, nomeada MEF T3. Por fim, realizou-se uma análise com elementos do tipo T10 (10 nós, de interpolação cúbica), desprovidos de enriquecimento e nomeada MEF T10.

Os resultados das análises estão resumidos nas Tabelas 1-4, onde NGL corresponde ao número de graus de liberdade e β é o número de condição da matriz de rigidez. É possível observar que os resultados obtidos com a utilização do MEF⁽¹⁾ não foram satisfatórios, independentemente do tipo de malha utilizado. Enquanto isso, o MEF⁽²⁾ obteve resultados coincidentes com o analítico quando aplicado à malha com 2 elementos, porém, obteve resultado abaixo do esperado nas demais análises. As análises do problema utilizando o MEF⁽³⁾, o MEF⁽⁴⁾ ou o MEF T10 reproduziram a solução analítica em termos de energia de deformação, deslocamento e tensões máximas, para todas as malhas. Os três tipos de discretização representam funções do terceiro grau (condição para se obter a solução analítica das equações (4) e (5)). Entre eles, o MEF⁽³⁾ é aquele que demanda o menor número de graus

de liberdade à medida que se aumenta o número de elementos. O *NGL* é um bom indicativo para se quantificar o tamanho do sistema de equações que será resolvido durante a análise e, consequentemente, o ônus computacional exigido. Por outro lado, o elevado valor alcançado para o número de condição, nos enriquecimentos *MEFG*⁽³⁾, o *MEFG*⁽⁴⁾, deve ser visto como um alerta para o mal condicionamento do sistema de equações e a necessidade de se dar um tratamento numérico adequado para a solução do mesmo.

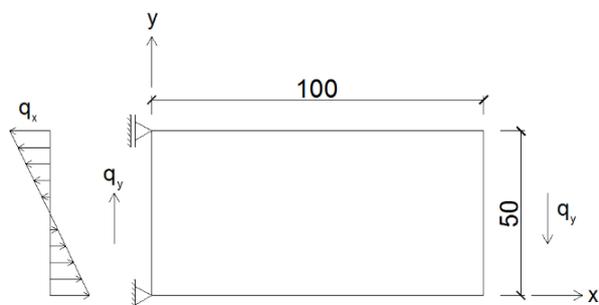


Figura 1 - Geometria da chapa retangular proposta (em unidades consistentes).

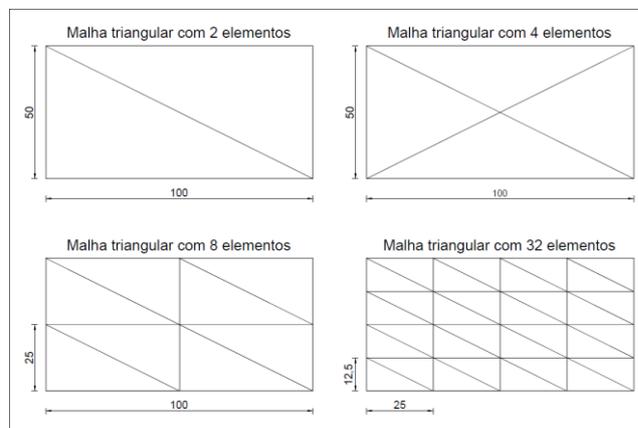


Figura 2 - Tipos de malhas utilizados para a análise de desempenho dos enriquecimentos

Tabela 1 - Resultados da chapa retangular 100x50 para a malha com 2 elementos.

	<i>NGL</i>	$u_y \text{ máx } (x = 100)$	$\sigma_x \text{ máx } (0, 50)$	<i>U</i>	β
<i>MEF T3</i>	8	-4,139E-04	8,160000	0,110240	4,311E+01
<i>MEFG</i> ⁽¹⁾	24	-1,096E-03	49,805553	0,328508	2,547E+03
<i>MEFG</i> ⁽²⁾	32	-1,830E-03	119,999998	0,478000	1,511E+04
<i>MEFG</i> ⁽³⁾	40	-1,830E-03	119,999998	0,478000	2,540E+18
<i>MEFG</i> ⁽⁴⁾	48	-1,830E-03	119,999998	0,478000	8,357E+17
<i>MEF T10</i>	32	-1,830E-03	120,000001	0,478000	4,184E+03

Tabela 2 - Resultados da chapa retangular 100x50 para a malha com 4 elementos.

	<i>NGL</i>	$u_y \text{ máx } (x = 100)$	$\sigma_x \text{ máx } (0, 50)$	<i>U</i>	β
<i>MEF T3</i>	10	-6,219E-04	8,160000	0,131027	7,266E+01
<i>MEFG</i> ⁽¹⁾	30	-1,306E-03	47,686655	0,351650	2,152E+04
<i>MEFG</i> ⁽²⁾	40	-1,696E-03	97,995572	0,473254	2,939E+04
<i>MEFG</i> ⁽³⁾	50	-1,830E-03	119,999998	0,478000	1,539E+18
<i>MEFG</i> ⁽⁴⁾	60	-1,830E-03	119,999998	0,478000	1,973E+18
<i>MEF T10</i>	50	-1,830E-03	119,999998	0,478000	7,820E+03

Tabela 3 - Resultados da chapa retangular 100x50 para a malha com 8 elementos.

	<i>NGL</i>	$u_y \text{ máx } (x = 100)$	$\sigma_x \text{ máx } (0, 50)$	<i>U</i>	β
<i>MEF T3</i>	18	-8,073E-04	18,009155	0,213909	4,411E+02
<i>MEFG</i> ⁽¹⁾	54	-1,304E-03	47,578364	0,335091	5,888E+03
<i>MEFG</i> ⁽²⁾	72	-1,721E-03	76,019023	0,440806	1,584E+04
<i>MEFG</i> ⁽³⁾	90	-1,830E-03	119,999996	0,478000	1,700E+18
<i>MEFG</i> ⁽⁴⁾	108	-1,830E-03	119,999996	0,478000	6,792E+17
<i>MEF T10</i>	98	-1,830E-03	119,999998	0,478000	1,637E+04

Tabela 4 - Resultados da chapa retangular 100x50 para a malha com 32 elementos.

	<i>NGL</i>	$u_y \text{ máx } (x = 100)$	$\sigma_x \text{ máx } (0, 50)$	<i>U</i>	β
<i>MEF T3</i>	50	-1,294E-03	56,839598	0,358005	2,387E+03
<i>MEFG⁽¹⁾</i>	150	-1,598E-03	91,293157	0,423591	7,391E+03
<i>MEFG⁽²⁾</i>	200	-1,809E-03	106,317015	0,472912	1,466E+04
<i>MEFG⁽³⁾</i>	250	-1,830E-03	119,999972	0,478000	6,120E+17
<i>MEFG⁽⁴⁾</i>	300	-1,830E-03	119,999969	0,478000	1,301E+18
<i>MEF T10</i>	338	-1,830E-03	120,000003	0,478000	6,762E+04

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, diferentes tipos de enriquecimentos polinomiais do MEFG foram avaliados quanto ao seu desempenho, considerando-se a qualidade da aproximação, *NGL* e impacto no condicionamento do sistema de equações. A PU foi construída sobre uma malha de elementos finitos do tipo triangular de três nós. Ainda que mereça um estudo mais aprofundado, é possível perceber que uma seleção adequada dos monômios enriquecedores pode propiciar análises menos onerosas computacionalmente sem perda na qualidade da aproximação. O impacto no número de condição do sistema deve ser, contudo, ponderado para evitar problemas na utilização de métodos iterativos na solução do sistema de equações gerado pelo MEFG.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o importante apoio da FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (pela bolsa de Iniciação Científica e projetos 309005/2013-2 e 486959/2013-9).

REFERÊNCIAS

- Barros, F. B. Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. Tese de Doutorado. EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, 2002.
- Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2. p. 215-232, 2000.
- Lee, N. S.; Bathe, K. J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, New York, v. 36, n. 20, p. 3553-3576, Oct. 1993.
- Oden, J. T.; Duarte, C. A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, p. 117–126, 1998.
- Szabó, B. A.; Babuška, I. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. 1991.