



## **Desenvolvimento de uma Metodologia para a Análise Estática Bidimensional Acoplada das Porções Submersa e Enterrada de Linhas de Ancoragem**

**Pedro Henrique Rios Silveira**

**Eduardo Nobre Lages**

pedro.silveira10@gmail.com

enl@lccv.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Centro de Tecnologia - CTEC, Laboratório de Computação Científica e Visualização - LCCV

Tabuleiro do Martins s/n, CEP 57072-970, Maceió/AL.

**Resumo.** *Na prática do projeto de linhas de ancoragem de plataformas offshore, é usual que se faça a priori a análise do trecho que sai da unidade flutuante e vai até o solo marinho, seguida de uma análise do trecho enterrado, que é fixado no elemento de ancoragem. Neste trabalho, formula-se o problema integrado dessas linhas de ancoragem com trecho submerso e trecho enterrado em uma análise estrutural estática e bidimensional. O trecho submerso da linha de ancoragem é tratado através de equações de catenária elástica, sendo o trecho enterrado analisado através de um modelo em análise limite rígido-plástico do solo marinho, para o qual o sistema de equações diferenciais acopladas resultante é resolvido numericamente através do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Uma metodologia para o acoplamento das duas respostas é desenvolvida e implementada computacionalmente no ambiente MATLAB. É apresentado e discutido ainda um exemplo numérico de ancoragem, ilustrando o potencial de uso da metodologia proposta.*

**Palavras-chave:** *Águas profundas, MATLAB, Runge-Kutta, Newton-Rapshon.*

## **1 INTRODUÇÃO**

A exploração de petróleo em sistemas *offshore* carrega consigo alguns importantes desafios tecnológicos. Entre os diversos parâmetros que devem ser controlados, destaca-se a necessidade de restringir os movimentos do sistema flutuante a níveis aceitáveis [Skop (1988); Colliat (2002); Chakrabarti (2005)].

A aplicação dessas restrições de movimento na unidade flutuante, em grande parte dos casos, é feita através de sistemas de tracionadores, linhas de ancoragem e ancoradores. As linhas de ancoragem servem de conexão entre os ancoradores, fixados ao solo marinho, e o sistema flutuante, cuja movimentação se deseja limitar. É portanto bastante importante, do ponto de vista da análise dos sistemas de ancoragem como um todo, entender o comportamento mecânico de suas estruturas de linhas [Skop (1988); Colliat (2002); Chakrabarti (2005)].

No contexto de águas profundas, o comportamento mecânico das linhas é ainda mais impactante na resposta do sistema, visto que seus elevados comprimentos causam significativa interferência na unidade flutuante, seja através do arrasto com a água, da mobilização da rigidez ou através da reação mecânica do solo marinho ao deslocamento de sua porção enterrada. Contudo, analisar essas respostas é um problema complexo [Skop (1988); Colliat (2002); Chakrabarti (2005)].

Compostas por longos cabos de aço ou material sintético, ou mesmo correntes, o comportamento mecânico de linhas de ancoragem é altamente não linear do ponto de vista geométrico. A não linearidade é oriunda da flexibilidade de tais estruturas, nas quais a resistência à flexão, torção, cisalhamento e compressão são desprezíveis, fazendo com que elas sofram grandes deslocamentos até atingirem suas configurações de equilíbrio, ainda que estejam sobre regime de pequenas deformações [Karoumi (1999); Thai e Kim (2011)].

Neste trabalho, para tratar a não linearidade da porção submersa das linhas de ancoragem, usam-se equações de catenária elástica. Para tratar a porção enterrada, por sua vez, usa-se a formulação em catenária invertida, derivada a partir de uma análise limite, fornecida pelos manuais de práticas recomendadas do DNV [Det Norske Veritas (2000),(2002)]. A formulação em catenária invertida é ainda expandida para tratar casos de carregamento não acomodados via análise limite através de um modelo rígido-plástico para o solo. Por fim, um procedimento iterativo é definido para o acoplamento de ambas as formulações de modo a tratar a linha como um todo.

São apresentados detalhes do equacionamento do problema acoplado e da implementação computacional no ambiente de computação numérica MATLAB (MATHEMATICS, 2016) e os resultados de um exemplo ilustrativo mostrando o potencial de uso da ferramenta.

## **2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA**

Nesta seção são apresentadas as formulações do problema de linhas de ancoragem em regime submerso e enterrado, bem como a metodologia de acoplamento utilizada.

### **2.1 Equações de Catenária Elástica**

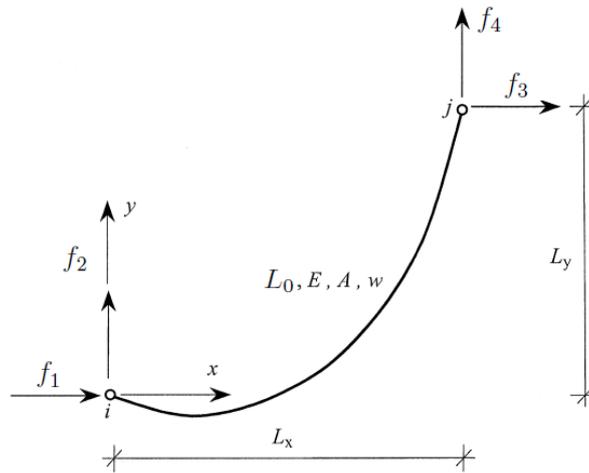
Para o tratamento da porção submersa das linhas, utilizam-se as equações de catenária elástica em duas dimensões, conforme apresentada por Karoumi (1999). Nestas, fixando-se um

dos nós da linha na origem, as projeções do outro no sistema de coordenadas cartesianas podem ser escritas como

$$L_x = -f_1 \left[ \frac{L_0}{EA} + \frac{1}{w} \ln \left( \frac{f_4 + T_j}{T_i + f_2} \right) \right] \quad (1)$$

$$L_y = \frac{1}{2EAw} (T_j^2 + T_i^2) + \frac{T_j - T_i}{w} \quad (2)$$

nas quais  $L_x$  e  $L_y$  são as projeções em  $x$  e  $y$ ;  $L_0$  é o comprimento indeformado da linha;  $T_i$  e  $T_j$  são as trações nos dois nós, que podem ser escritas, respectivamente, como  $T_i = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  e  $T_j = \sqrt{f_3^2 + f_4^2}$ ;  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  são, respectivamente, as reações horizontal e vertical nos nós  $i$  e  $j$ , podendo ser correlacionadas através das equações de equilíbrio  $f_3 = -f_1$  e  $f_4 = L_0 w - f_2$ , em que  $w$  é o peso da linha por unidade de comprimento; e  $EA$  é a rigidez axial da linha (Fig. 1). Tem-se, portanto, que as projeções  $L_x$  e  $L_y$  são funções não lineares apenas das forças de



**Figura 1: Representação de um elemento de catenária elástica**

reação  $f_1$  e  $f_2$ , uma vez que  $f_3$  e  $f_4$ , bem como  $T_i$  e  $T_j$ , podem ser diretamente obtidas através delas. Desse modo, tomando-se as derivadas das projeções com relação às forças, chega-se à matriz de flexibilidade tangente  $[F_t]$ , na forma

$$\begin{Bmatrix} dL_x \\ dL_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_x}{\partial f_1} & \frac{\partial L_x}{\partial f_2} \\ \frac{\partial L_y}{\partial f_1} & \frac{\partial L_y}{\partial f_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{Bmatrix} = [F_t] \begin{Bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Uma vez definida essa matriz, o procedimento iterativo de Newton-Raphson para a solução da equação não linear que correlaciona forças e posições se dá da seguinte maneira: estimam-se forças de reação iniciais. Usam-se tais forças para gerar uma configuração inicial para a linha e uma matriz de flexibilidade tangente. Usa-se a diferença entre os valores de  $L_x$  e  $L_y$  prescritos ( $\{\bar{L}\}$ ) e os obtidos anteriormente para a geração de um vetor de deslocamentos. Inverte-se a matriz de flexibilidade, multiplicando-a pelo vetor gerado, e obtém-se um vetor de incrementos de forças. Somando-se esse incremento à estimativa inicial das forças, novas forças são obtidas e o procedimento é repetido até obter-se a configuração prescrita para o cabo (a menos de uma tolerância controlada). Matematicamente, escreve-se o procedimento apresentado como

$$\{df^i\} = [F^i]^{-1} \{\bar{L} - L^i\} \quad (4)$$

$$\{f^{i+1}\} = \{f^i\} + \{df^i\} \quad (5)$$

$$\{L^{i+1}\} = g(\{f^{i+1}\}) \quad (6)$$

$$[F^{i+1}] = h(\{f^{i+1}\}) \quad (7)$$

nas quais  $g(\{f\})$  é a função apresentada nas Eqs. 1 e 2 e  $h(\{f\})$  são as derivadas apresentadas na matriz de flexibilidade (Eq. 3).

Para estimar os valores iniciais das forças, usam-se as expressões

$$\lambda_0 = \begin{cases} 0.2, & L_0 \leq L_x^2 + L_y^2 \\ 3 \left( \frac{L_0^2 - L_y^2}{L_x^2} - 1 \right), & L_0^2 > L_x^2 + L_y^2 \end{cases} \quad (8)$$

e

$$f^0 = -\frac{w}{2} \left\{ \frac{L_x}{\lambda_0} \quad L_y \coth(\lambda_0) - L_0 \right\}^T \quad (9)$$

Para o caso em que a linha encontra-se na posição vertical, usa-se algum valor arbitrariamente alto para  $\lambda_0$ , por exemplo  $10^6$ .

## 2.2 Equações de Catenária Invertida

Para a porção enterrada das linhas, utiliza-se a formulação prevista pelos guias de práticas recomendadas da Det Norske Veritas, uma das referências internacionais em engenharia *offshore*. Tal formulação é baseada no trabalho de Vivitrat *et al.* (1982), que constrói um modelo 2D baseado na resposta última do solo ao longo de toda a linha. Com base nesse modelo, a geometria pode ser definida através de um par acoplado de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e não homogêneas definido por:

$$\frac{dT}{dz} = f_1(z, \theta) = -q_t(z) \operatorname{cosec}(\theta) - w \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = f_2(z, \theta, T) = \frac{q_p(z) \operatorname{cosec}(\theta) - w \cotan(\theta)}{T} \quad (11)$$

em que  $T$  é a tensão de tração na linha;  $q_t(z)$  é a reação última do solo na direção tangente à linha e  $q_p(z)$  a reação última na direção perpendicular, ambas funções da profundidade;  $\theta$  é o ângulo entre a linha e a horizontal;  $w$  é o peso próprio da linha por unidade de comprimento e  $z$ , a variável independente do problema, refere-se à profundidade de penetração da linha.

Esse modelo é construído através do equilíbrio de um elemento diferencial da linha sob a ação das cargas limite  $q_t(z)$  e  $q_p(z)$ , tal como indicado na Fig. 2 As respostas tangenciais e perpendiculares últimas do solo, por sua vez, podem ser estimadas através de parâmetros como sua resistência não drenada ao cisalhamento e à penetração; propriedades geométricas das linhas, como seus diâmetros; e coeficientes de adesão, cujos valores podem ser retirados do guia em questão.

Este modelo, contudo, apresenta um problema: para casos onde o carregamento na linha é muito pequeno em comparação com o comprimento enterrado e a resistência do solo, ele gera configurações pouco realistas, onde a linha 'quebra' o plano vertical (Fig. 3), ou mesmo não é

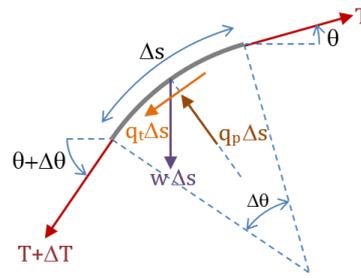


Figura 2: Representação de um elemento diferencial de linha enterrada e suas forças internas e externas

capaz de chegar a nenhuma configuração, uma vez que 'espirala', jamais atingindo a profundidade de ancoragem prescrita. Para tratar tal limitação, na implementação proposta, no momento em que a linha atinge a posição vertical ela é 'forçada' a continuar descendo verticalmente até atingir o ancorador, não realizando a mudança de quadrante. Mais ainda, as reações normais são zeradas desse ponto em diante, sobrando somente as forças tangenciais, que seguem na intensidade máxima até que a tensão na linha atinga zero, sendo elas, também, consideradas zero desse ponto em diante. Tem-se, portanto, um modelo rígido-plástico, tal que o solo responde apenas em sua capacidade última ou não responde. A adoção de tal modelo rígido-plástico é compatível com os grandes deslocamentos considerados, levando ao comportamento predominantemente plástico do solo, tendo a fase elástica pouca influência na resposta final. Considerando-se essa

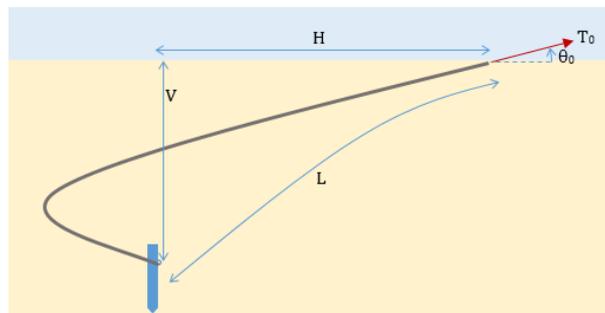


Figura 3: Representação do processo de 'quebra' do plano vertical

limitação no equacionamento, faz-se a discretização do sistema de EDOs resultantes através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, abreviado RK4 (Zill, 2003), uma técnica numérica para a solução de problemas de valor inicial. A escolha deste método se deu por sua excelente precisão na obtenção da solução aproximada, mesmo para passos de integração maiores. A aplicação de RK4 ao sistema de EDOs acopladas resulta nas expressões de recorrência

$$\begin{Bmatrix} K_{11}^i \\ K_{12}^i \end{Bmatrix} = \Delta z \begin{Bmatrix} f_1(z^i, \theta^i) \\ f_2(z^i, \theta^i, T^i) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} K_{21}^i \\ K_{22}^i \end{Bmatrix} = \Delta z \begin{Bmatrix} f_1(z^i + \frac{\Delta z}{2}, \theta^i + \frac{K_{12}^i}{2}) \\ f_2(z^i + \frac{\Delta z}{2}, \theta^i + \frac{K_{12}^i}{2}, T^i + \frac{K_{11}^i}{2}) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} K_{31}^i \\ K_{32}^i \end{pmatrix} = \Delta z \begin{pmatrix} f_1(z^i + \frac{\Delta z}{2}, \theta^i + \frac{K_{22}^i}{2}) \\ f_2(z^i + \frac{\Delta z}{2}, \theta^i + \frac{K_{22}^i}{2}, T^i + \frac{K_{21}^i}{2}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} K_{41}^i \\ K_{42}^i \end{pmatrix} = \Delta z \begin{pmatrix} f_1(z^i + \Delta z, \theta^i + K_{32}^i) \\ f_2(z^i + \Delta z, \theta^i + K_{32}^i, T^i + K_{31}^i) \end{pmatrix} \quad (15)$$

e, por fim,

$$\begin{pmatrix} T^{i+1} \\ \theta^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{i+1} \\ \theta^{i+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left( \begin{pmatrix} K_{11}^i \\ K_{12}^i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} K_{21}^i \\ K_{22}^i \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} K_{31}^i \\ K_{32}^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{41}^i \\ K_{42}^i \end{pmatrix} \right) \quad (16)$$

que devem ser numericamente integradas até  $z = V = \frac{n-1}{\Delta z}$ , em que  $V$  é a profundidade do ancorador,  $n$  o número de pontos em análise e  $\Delta z$  é o espaçamento vertical entre esses pontos. Nesta expressão de recorrência,  $i$  é o indexador do ponto corrente, enquanto  $i + 1$  define o ponto seguinte, e as constantes  $K$  definem interpolações de quarta ordem das grandezas de interesse. Trata-se, portanto, de um problema de valor inicial, onde a tração e a inclinação na extremidade livre da linha (imediatamente acima do solo) são conhecidas, conforme a Fig. 4. A partir desses valores iniciais, define-se a configuração completa da linha à medida que ela penetra no solo até atingir a profundidade de ancoragem, considerando-se as condições anteriormente tratadas.

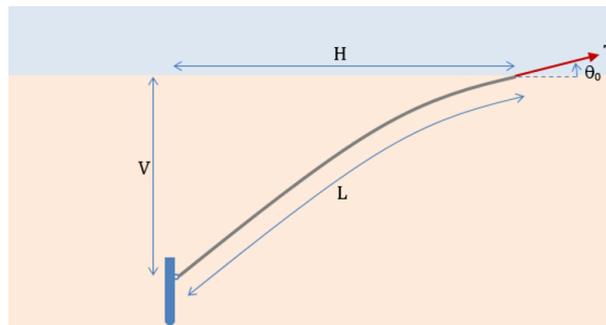


Figura 4: Representação do problema de valor inicial

## 2.3 Acoplamento

Para realizar o acoplamento entre as duas soluções, um método iterativo simples foi desenvolvido: inicialmente são fornecidos dois pontos, correspondendo à posição da âncora e da unidade flutuante, bem como a profundidade da âncora. Assume-se, inicialmente, que a porção enterrada da linha está na vertical, portanto que a porção flutuante fixa-se diretamente acima da âncora. Em seguida, faz-se o procedimento iterativo para a determinação das forças de reação da porção submersa pela equação de catenária elástica. Então, aplica-se o par de forças de reação no ponto de mergulho da linha, após uma conversão simples da mesma em tração e ângulo de entrada, no procedimento de Runge-Kutta de quarta ordem definido para a resposta do solo. Com a configuração obtida pelo método de RK4, tem-se uma nova posição da linha enterrada e portanto um novo ponto de entrada da linha no solo. Alimenta-se o procedimento iterativo de equilíbrio da catenária elástica com a nova posição de entrada no solo, porém agora

utilizando as forças de reação anteriormente obtidas como estimativas iniciais, de modo a acelerar a convergência, e assim por diante até que uma tolerância de convergência previamente assumida seja atingida. É importante notar que se faz, também, uma correção do comprimento submerso, uma vez que uma maior ou menor fração da linha fica enterrada para cada passo do procedimento de acoplamento. Tal correção deve ocorrer, uma vez que o comprimento total da linha (parcela enterrada + parcela submersa) deve permanecer o mesmo. O comprimento enterrado por ser obtido através da expressão

$$\frac{ds}{dz} = \operatorname{cosec}(\theta) \quad (17)$$

em que  $s$  é o comprimento de arco. Tal equação é integrada via RK4 juntamente com as anteriores até a profundidade do ancorador, fornecendo, portanto, o comprimento total de parcela enterrada da linha a ser descontado do seu comprimento completo.

Para os exemplos de validação testados, observou-se convergência bastante acelerada, com a configuração de equilíbrio acoplada sendo atingida após tão somente 2 ou 3 iterações.

### 3 RESULTADOS

Para ilustrar a aplicação da metodologia de acoplamento proposta, um exemplo numérico é tratado. Considera-se uma linha de ancoragem composta por uma corrente de 440 m de comprimento e 0,127 m de diâmetro, cuja densidade linear é de  $252 \frac{kg}{m}$  e a rigidez axial é de  $1199,7 \cdot 10^6 N$ . Fixa-se a âncora a uma profundidade de 50 m (valor considerado bastante alto, escolhido apenas em caráter ilustrativo). Discretiza-se o trecho enterrado com 40 segmentos e usa-se uma tolerância para o equilíbrio da porção submersa e para o acoplamento, respectivamente, de 1 mm e 1 cm. Fixa-se a ancoragem no ponto (0, 0), enquanto se move a unidade flutuante entre os pontos (150 m, 400 m) e (200 m, 400 m). As configurações do sistema em alguns pontos ao longo da trajetória são apresentadas nas Figs. 5, 6 e 7. Em vermelho tem-se a parcela enterrada da linha, enquanto a parcela submersa é destacada em azul. As figuras são registradas em um momento inicial da trajetória (para o qual o valor da coordenada  $x$ , para o navio, é aproximadamente 150 m) um valor intermediário e um final (para o qual o valor da coordenada  $x$ , para o navio, é aproximadamente 200 m). Observa-se que,

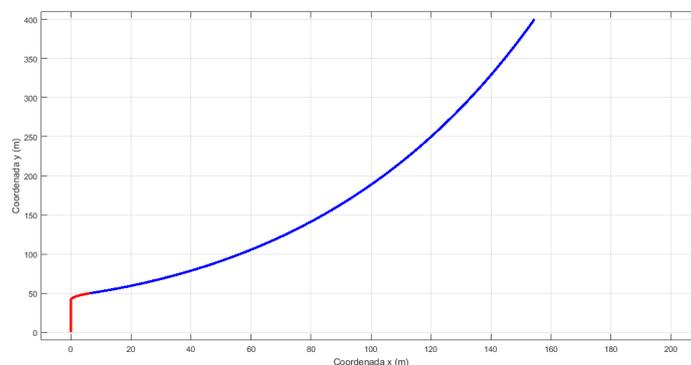
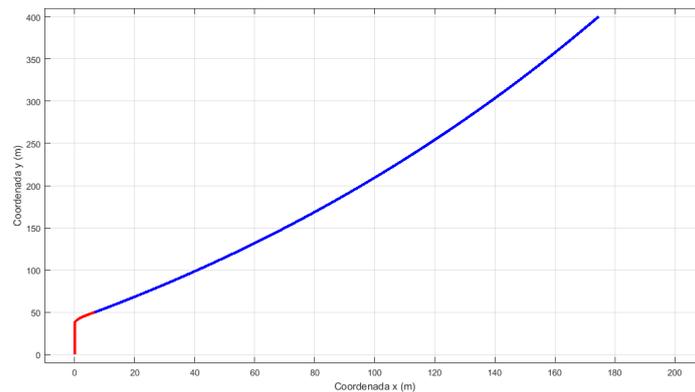
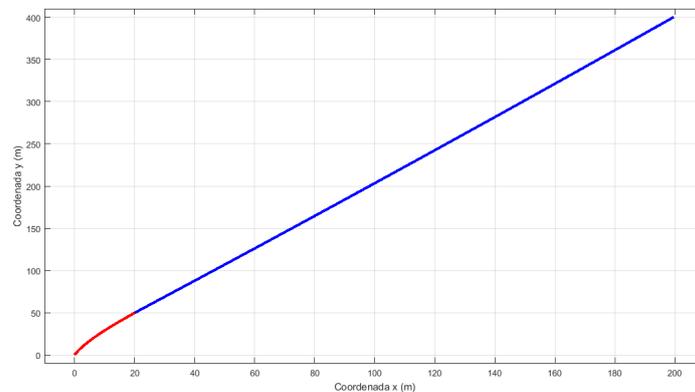


Figura 5: Configuração inicial do arranjo



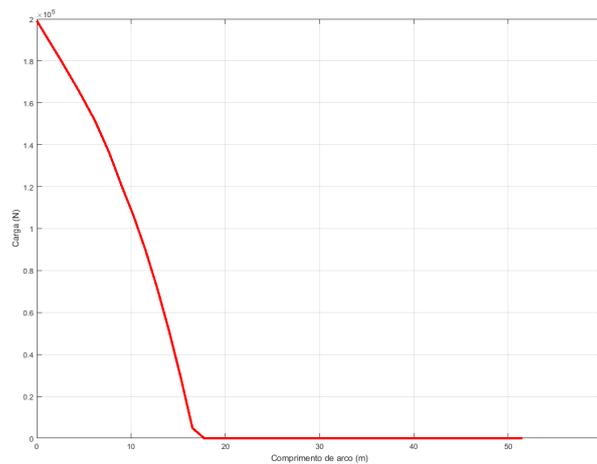
**Figura 6: Configuração intermediária do arranjo**



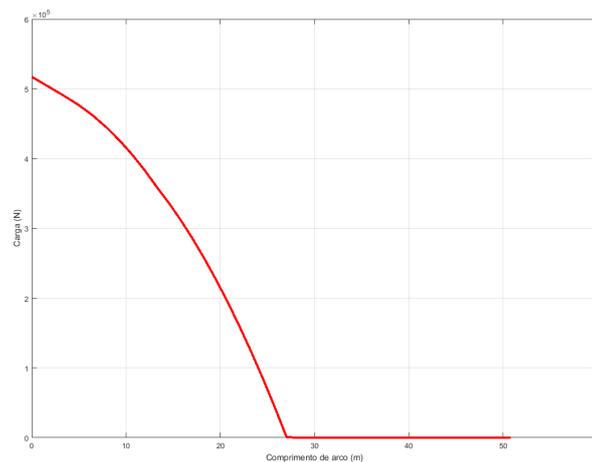
**Figura 7: Configuração final do arranjo**

conforme o navio desloca-se mais horizontalmente, há uma maior mobilização da resistência do solo ao longo da porção enterrada e, conseqüentemente, uma maior sollicitação da âncora. É importante mapear essa sollicitação para evitar o arrancamento em casos extremos. Para os 3 momentos apresentados, os componentes horizontal e vertical da força na âncora (em Newtons) foram nulos nos 2 primeiros casos (devido ao modelo rígido-plástico adotado, que é capaz de zerar os esforços de uma maneira que a análise-limite apresentada pelo DNV não consegue) e  $10^7 \cdot (1,6362 N, 0,3937 N)$  para o último caso. As Figs. 8, 9 e 10 mostram a curva Tração x Comprimento de arco da porção enterrada das linhas. Na Fig. 8 é possível notar os dois pontos de inflexão da curva, um onde a linha enterrada atinge a configuração vertical e o outro onde o solo deixa de ser mobilizado, sendo atingida a tensão zero. Tais pontos aparecem devido ao modelo rígido-plástico adotado por este trabalho.

Para todos os passos da trajetória, incluindo aqueles apresentados neste trabalho, a convergência para o acoplamento se deu em menos de 3 iterações e em uma fração de segundo, tendo sido utilizado um Notebook Acer Aspire *E1 – 572 – 6\_BR648*, dotado de um processador *Core i5 – 4200U* de  $1,6 GHz$  com Turbo Boost de até  $2,6 GHz$  e  $6 GB$  de memória RAM do tipo *DDR3L* para as análises.



**Figura 8: Curva Tensão x Comprimento de arco para a configuração inicial do arranjo**



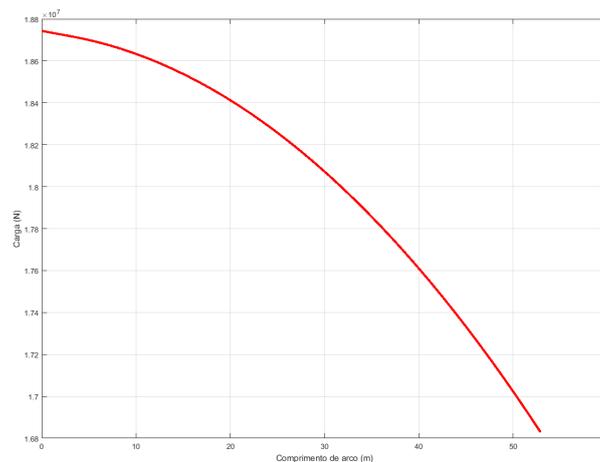
**Figura 9: Curva Tensão x Comprimento de arco para a configuração intermediária do arranjo**

## 4 CONCLUSÃO

Apresentou-se uma metodologia para o acoplamento de duas formulações distintas para o tratamento das porções enterradas e submersas de linhas de ancoragem. A mesma pode ser utilizada para a geração de configurações iniciais de arranjos de linha, bem como para análises quasi-estática. Apresentou-se, ainda, um exemplo numérico ilustrativo destacando os bons resultados obtidos pela metodologia de acoplamento proposta, a qual gerou resultados consistentes e com tempos computacionais reduzidos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, respectivamente pelas bolsas PIBIC e de Produtividade em Pesquisa.



**Figura 10: Curva Tensão x Comprimento de arco para a configuração final do arranjo**

## REFERÊNCIAS

- Chakrabarti, S. K., 2005. *Handbook of offshore engineerin*, volume 2. Elsevier, 1 edition.
- Colliat, J. L., 2002. Anchors for Deepwater to Ultradeepwater Moorings. *Proceedings of the 34th Annual Offshore Technology Conference*, Houston, USA.
- Det Norske Veritas, 2000. *Recommended Practice RP-E301: Design and installation of fluke anchors in clay*.
- Det Norske Veritas, 2002. *Recommended Practice RP-E302: Design and installation of plate anchors in clay*.
- Karoumi, R., 1999. Some modelling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers and Structures*, v.71.
- MATHWORKS, 2016. *MATLAB*.
- Skop, R. A., 1988. Mooring systems: a state-of-the-art review. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, vol. 110, pp. 365–372.
- Thai, H. T., Kim, S. E., 2011. Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures. *Finite Element Analysis and Design*, v. 47.
- Vivatrat, V., Valent, P. J., Ponterio, A. A., 1982. The influence of chain friction on anchor pile design. *Proceedings of the 14th Annual Offshore Technology Conference*, Houston, USA.
- Zill, D. G., 1997. *A First Course in Differential Equations with Modelling Applications*, Brooks/Cole, 4 edition.