



UM MODELO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS DE CHAPA CONSIDERANDO DANIFICAÇÃO ISOTRÓPICA

Luiz Carlos Lima Vêras

Eduardo Toledo de Lima Junior

luiz.veras@ctec.ufal.br

limajunior@lccv.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, S/N, Tabuleiro do Martins, 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil

Resumo. A complexidade comumente encontrada no comportamento mecânico das estruturas motiva o estudo de modelos constitutivos que tentem considerar a não-linearidade do comportamento dos materiais envolvidos. A mecânica do dano prevê as perdas de resistência e rigidez de um sólido, devidas a processos microscópicos irreversíveis, causados por micro defeitos ou microfissuras existentes no material, os quais propiciam uma concentração de tensões. Em problemas de mecânica das estruturas que envolvam comportamentos não lineares e domínios com geometria complexa, a obtenção de soluções analíticas torna-se custosa ou até impossível. Nesse contexto, os métodos numéricos surgem como uma poderosa ferramenta para obtenção de soluções aproximadas, dentre os quais pode-se destacar o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O método é baseado na formulação integral do problema de interesse, e no uso de soluções fundamentais específicas para a aplicação pretendida. Neste trabalho propõe-se a análise de problemas de elasticidade plana, onde o material esteja sujeito à penalização imposta por um processo de danificação. Para tanto, desenvolve-se uma formulação não linear do MEC, com base no modelo de dano isotrópico proposto por Marigo (1981), aplicável a materiais frágeis e quase-frágeis. Os termos de contorno são avaliados numericamente, via quadratura de Gauss, e as integrais de domínio, decorrentes da não-linearidade do material, são avaliadas sobre células internas por um método semi-analítico. A verificação de equilíbrio é feita segundo um procedimento do tipo Newton-Raphson. São apresentados exemplos numéricos a fim de validar a formulação implementada e demonstrar sua eficácia.

Palavras-chave: MEC, Mecânica do Dano, Integrais de Domínio

1 INTRODUÇÃO

Nos estudos da mecânica dos materiais, verifica-se a modelagem de processos físicos não-lineares, como dano e fratura. Processos inelásticos foram extensivamente estudados, de modo que se pode contar com uma vasta gama de modelos já desenvolvidos. A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) lida com a capacidade de carga de sólidos cujo material é danificado devido à presença de microfissuras e microvazios. A MDC foi originalmente desenvolvida por Kachanov (1985), para analisar fluência uniaxial de metais submetidos a temperaturas elevadas. Vários autores estudaram e desenvolveram modelos relacionados à MDC. Lemaitre *et al.* (2012) contribuíram significativamente para o tema. Neste trabalho, utiliza-se o modelo de Marigo (1981), que apresentou um modelo isotrópico escalar para materiais frágeis e quase frágeis.

Devido à crescente complexidade dos modelos desenvolvidos para problemas de engenharia, modelos numéricos robustos, capazes de fornecer resultados precisos com menos esforço computacional, são necessários. Então, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) aparece como uma escolha interessante para a obtenção de soluções numéricas em várias aplicações de engenharia. Recentes aplicações do método à mecânica do dano relatadas na literatura são apresentadas Sladek *et al.* (2003), Botta *et al.* (2005), Benallal *et al.* (2006) e Voyiadjis e Kattan (2016).

Neste trabalho, é utilizado um conjunto de equações não-lineares transientes do MEC, com base no teorema da reciprocidade de Betti, aplicado a materiais com danificação isotrópica. O modelo de dano de Marigo (1981) é aplicado na avaliação da perda de rigidez. Em relação ao MEC, da não-linearidade do problema proposto, decorre o surgimento de integrais sobre o domínio, as quais são tratadas aproximando-se as variáveis sobre células triangulares, com aproximação linear em deslocamentos. A integração ao longo dos elementos de contorno lineares e contornos de células internas é feita numericamente, via quadratura de Gauss. Um procedimento do tipo Newton-Raphson é aplicado para resolver o sistema não linear, com uso de um operador tangente consistente.

2 PROBLEMA ELÁSTICO COM DANO ISOTRÓPICO

A energia livre associada a um sólido, admitindo-se dano isotrópico, pode ser escrita como:

$$\rho\Psi(\varepsilon_{jk}, D) = \frac{1}{2}(1 - D)\varepsilon_{jk}E_{jklm}\varepsilon_{lm} \quad (1)$$

na qual ε_{jk} e E_{jklm} são, respectivamente, os tensores de deformação e elástico do material intacto. A densidade de massa é indicada por ρ . Admite-se D a única variável escalar interna de dano, a qual avalia o estado de deterioração do material, assumindo valores entre zero e um, de forma que a variável D nula indica material intacto, enquanto o valor unitário está associado à degradação completa. As derivadas do potencial de energia em relação às variáveis de estado ε_{jk} e D , levam à definição das variáveis associadas: a tensão total (Eq. (2)) e a força termodinâmica associada ao dano, dada na Eq. (3).

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{jk}} = (1 - D)E_{jklm}\varepsilon_{lm} \quad (2)$$

$$Y = -\rho\frac{\partial\Psi}{\partial D} = \varepsilon_{jk}E_{jklm}\varepsilon_{lm} \quad (3)$$

O critério de dano apresentado por Marigo (1981) é dado pela Eq. (4), a seguir.

$$F(Y, D) = Y - \kappa(D) \quad (4)$$

O termo $\kappa(D)$ armazena o maior valor atingido no histórico de carregamento, adotando-se neste modelo a forma linear: $\kappa(D) = Y_0 + AD$. A parcela Y_0 e o fator A são constantes do material. A evolução do dano vem da condição de consistência $\dot{F}(Y, D) = 0$, ou seja:

$$\dot{D} = \frac{\dot{Y}}{A} \quad (5)$$

As relações de equilíbrio e de compatibilidade, Eq. (6) e Eq. (7), respectivamente, adicionadas às condições de contorno apropriadas, completam o conjunto de equações que descrevem o problema de elasto-dano do presente trabalho.

$$\sigma_{jk,k} + b_j = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{k,j} + u_{j,k}) \quad (7)$$

3 EQUAÇÕES INTEGRAIS

O teorema da reciprocidade de Betti é a base para a obtenção da formulação integral, composta pelas equações de deslocamentos sobre um ponto fonte S do contorno, e de tensões totais sobre um ponto fonte s do interior do domínio. Assim, no caso da elasticidade, e considerando a definição de tensão efetiva $\sigma_{jk}^{ef} = \sigma_{jk}(q) + \sigma_{jk}^d(q)$ como sendo a parcela elástica do tensor de tensões, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^{ef} \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{ijk}^*(s, q) d\Omega \quad (8)$$

na qual s e q representam os pontos de fonte e campo no domínio, e X^* é a solução fundamental para uma variável X . O índice (d) identifica o termo de tensão de dano. Em problemas elastostáticos, aplicam-se as soluções fundamentais de Kelvin, apresentadas nas Eq. (9), Eq. (10) e Eq. (11), referentes a deslocamentos, deformações e tensões sobre o contorno (tractions).

$$u_{ik}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [-(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}] \quad (9)$$

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)Gr} [(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (10)$$

$$t_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}] - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_k - r_{,k}\eta_i)\} \quad (11)$$

As equações apresentadas a seguir são adaptadas de Lima Junior (2011), em que o autor apresenta uma formulação em elementos de contorno para meios porosos, levando em conta a danificação do material. Através da aplicação do teorema da divergência para a Eq. (8), e considerando a natureza transiente do problema, obtém-se a seguinte equação integral, Eq. (12), para deslocamentos nos pontos S do contorno. Os termos T_0 referem-se ao tensor de *tractions*.

$$C_{ik}\dot{u}_k(S) = \int_{\Gamma} \dot{T}_k(Q)u_{ik}^*(S, Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ik}(S, Q)\dot{u}_k(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{jk}^d(q)\varepsilon_{ijk}^*(S, q)d\Omega \quad (12)$$

As tensões nos pontos internos são obtidas através da derivação da Eq. (12), e da aplicação do modelo de Hooke, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, Q) \dot{T}_k(Q) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} R_{ijkl}(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^d(q) d\Omega + TL_{ij}[\dot{\sigma}_{kl}^d(s)] \end{aligned} \quad (13)$$

na qual S_{ijk} , D_{ijk} e R_{ijkl} são as derivadas das soluções fundamentais, e TL_{ij} é o termo livre advindo da derivação. Considerando um passo finito de tempo, por exemplo, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, e uma variável de incremento correspondente, $\Delta X = X_{n+1} - X_n$, pode-se integrar as Eq. (12) e Eq. (13) ao longo do intervalo de tempo, obtendo-se equações em termos de incrementos das variáveis envolvidas, apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned} C_{ik} \Delta u_k(S) = & \int_{\Gamma} u_{ik}^*(S, Q) \Delta T_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ik}^*(S, Q) \Delta u_k(Q) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(S, q) \Delta \sigma_{jk}^d(q) d\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, Q) \dot{T}_k(Q) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} R_{ijkl}(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^d(q) d\Omega + TL_{ij}[\dot{\sigma}_{kl}^d(s)] \end{aligned} \quad (15)$$

4 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E PROCESSO DE SOLUÇÃO

A solução numérica do problema de valor de contorno requer discretizações no tempo e no espaço. Deve-se representar o sistema de equações de um modo discreto ao longo dos elementos de contorno lineares e nas células triangulares no domínio, de modo a obter os valores aproximados das variáveis de interesse. A partir dessas observações define-se os pontos do contorno e os internos. O sistema a seguir, composto pelas Eq. (16) e Eq. (17), representa a discretização das integrais em Eq. (14) e Eq. (15), considerando algumas manipulações algébricas inerentes ao MEC.

$$\begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{2N_n, 2N_n} \begin{Bmatrix} \Delta u \end{Bmatrix}_{2N_n, 1} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}_{2N_n, 2N_n} \begin{Bmatrix} \Delta T \end{Bmatrix}_{2N_n, 1} + \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}_{2N_n, 3N_i} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma^d \end{Bmatrix}_{3N_i, 1} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma \end{bmatrix}_{3N_i, 1} = - \begin{bmatrix} HL \end{bmatrix}_{3N_i, 2N_n} \begin{Bmatrix} \Delta u \end{Bmatrix}_{2N_n, 1} + \begin{bmatrix} GL \end{bmatrix}_{3N_i, 2N_n} \begin{Bmatrix} \Delta T \end{Bmatrix}_{2N_n, 1} + \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}_{3N_i, 3N_i} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma^d \end{Bmatrix}_{3N_i, 1} \quad (17)$$

As matrizes de influência representadas nas equações acima por $[]$ são obtidas da integração das soluções fundamentais e de suas derivadas. Os vetores representados por $\{ \}$ são compostos por variáveis, prescritas ou não, de pontos internos ou do contorno. Define-se N_n como o número de nós do contorno e N_i o número de nós internos. Agora, a partir de algumas manipulações algébricas para fins de implementação numérica, define-se o sistema na Eq. (18), em termos de deformações, numa única equação.

$$\begin{bmatrix} E \end{bmatrix}_{3N_i, 3N_i} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon \end{Bmatrix}_{3N_i, 1} = \begin{Bmatrix} \Delta N_s \end{Bmatrix}_{3N_i, 1} + \begin{bmatrix} [QS] + [I] \end{bmatrix}_{3N_i, 3N_i} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma^d \end{Bmatrix}_{3N_i, 1} \quad (18)$$

O vetor $\{\Delta N_s\}$ contém os valores prescritos sobre o contorno e $[E]$ é tensor constitutivo. Devido à presença de termos de correção associados ao dano, a Eq. (18) é um sistema de equações não-lineares a cada incremento de tempo. Pode-se escrever o equilíbrio da forma a seguir (Eq. (19)), na qual a matriz que multiplica o termo de dano, na Eq. (18), é escrita como $[QS]$.

$$\{Z(\{\Delta\varepsilon_n\})\}_{3N_i,1} = - [E]_{3N_i,3N_i} \{\Delta\varepsilon_n\}_{3N_i,1} + \{\Delta N_s\}_{3N_i,1} + [QS]_{3N_i,3N_i} \{\Delta\sigma_n^d\}_{3N_i,1} = \mathbf{0} \quad (19)$$

A solução do sistema é obtida através da técnica de Newton-Raphson. No processo iterativo, a iteração corrente é dada por $\{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\} = \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$, em que o termo de correção, $\{\delta\varepsilon_n^i\}$, é calculado a partir da expansão em série de Taylor da Eq. (19), truncada no termo de primeira ordem, como segue na Eq. (20),

$$\{Z(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\} + \frac{\partial\{Z(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} = \mathbf{0} \quad (20)$$

sendo a derivada $\partial\{Z(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\}/\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}$ o operador tangente consistente (Botta, 2003).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentam-se dois exemplos utilizando o código implementado, com base na formulação brevemente descrita nos itens anteriores. Nos dois casos, considera-se estado plano de deformação. As rotinas foram desenvolvidas em Matlab®.

5.1 Exemplo 1: Chapa submetida a um deslocamento longitudinal

O problema descrito na Fig. 1, serviu para validação do código implementado. Nesta primeira aplicação, idealiza-se um material hipotético, considerando um corpo sob as condições apresentadas na Fig. 1a.

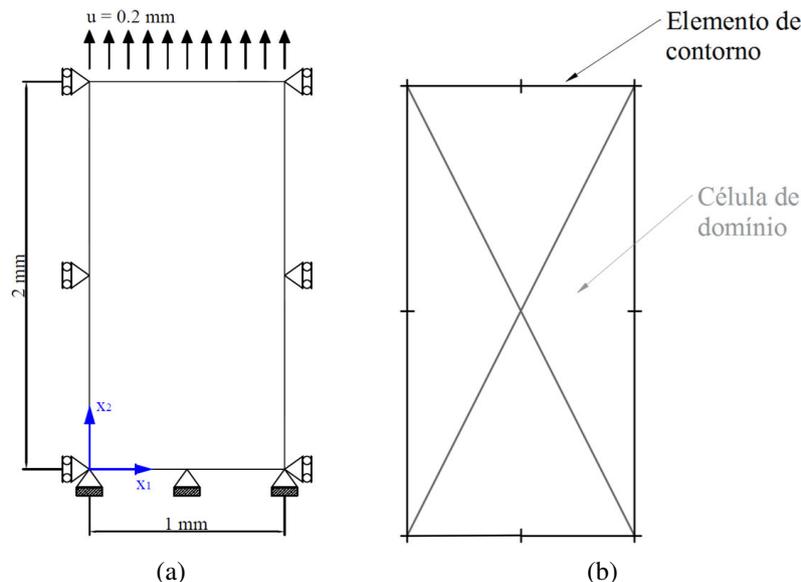


Figura 1: Exemplo de validação: placa submetida a um deslocamento u (a); discretização do problema (b).

Define-se o módulo de elasticidade unitário e o coeficiente de Poisson nulo. Desta forma, é possível fazer analogia ao caso unidimensional de uma barra apoiada com deslocamento imposto na extremidade livre. Considerando-se que a resposta em termos de tensão e deformação é homogênea sobre todo o domínio do problema, pode-se validar a implementação com base no modelo analítico uniaxial de dano. Os parâmetros de dano para o modelo de Marigo (1981) são definidos como $Y_0 = 5.125 \times 10^{-1}$ e $A = 4.495$. Estas constantes tem as mesmas dimensões de E na formulação do modelo. O contorno foi discretizado em 16 elementos. Para avaliação do domínio, utilizou-se 4 células. Na Fig. 1b, destaca-se o fato de utilização do conceito de nó duplo, para representar as descontinuidades do contorno. A ideia de nó descontínuo também é aplicada aos vértices das células contidos sobre o contorno. Definiu-se a malha utilizada neste exemplo através de um breve estudo de algumas configurações diferentes, variando-se tanto o número de elementos de contorno como o número de células, além da quantidade de pontos de integração. O intuito dessa análise é apurar o desempenho do código implementado no tocante à precisão e ao tempo de execução. A Tabela 1 reúne algumas configurações e as respectivas respostas em relação aos parâmetros analisados. As configurações avaliadas como *Ruim* não obtiveram o estado final de degradação do material no passo final de carregamento e, percebeu-se valores de *tractions* nos pontos do contorno com erros na ordem de 10^{-2} ; aquelas avaliadas como *Boa* apresentaram melhores resultados, com valores de tensão na ordem de 10^{-4} no último passo e resultados com erros na ordem de 10^{-4} , segundo o modelo uniaxial; as configurações denominadas como *Ótima* apresentaram valores satisfatórios com erros inferiores a 10^{-6} . Assim, adotou-se configuração a 4, pois apresentou resultados bastantes satisfatórios, quando comparado às malhas mais densas (configurações 5 e 6), com tempo de execução menor.

Tabela 1: Estudo de convergência de malhas.

Configuração	Nº de elementos de contorno	Nº de células	Nº de pontos de Gauss	Tempo (s)	Convergência
1	4	2	150	17.149	Ruim
2	4	4	125	12.492	Ruim
3	8	4	100	12.337	Boa
4	8	4	120	14.546	Ótima
5	16	4	100	17.134	Ótima
6	28	20	200	565.557	Ótima

Segundo Lima Junior (2011), valores menores de Y_0 condicionam o dano a iniciar precocemente, com valores de deformação baixos. No caso limite em que $Y_0 = 0$, o dano ocorre desde o início de aplicação do carregamento. Valores baixos do parâmetro A correspondem a um efeito mais pronunciado de dano, com uma maior perda de rigidez. Para aplicação do deslocamento prescrito de $u = 0.2m$, aqui aplicado em 100 passos, a resposta constitutiva obtida para um ponto qualquer do domínio, considerando-se o modelo de dano, é dada na Fig. 2.

Enquanto não se inicia o processo de dano, observa-se o comportamento do material em regime linear, de modo que a tensão total é igual a tensão efetiva. Após o valor de deformação de 0.03, aproximadamente, inicia-se a evolução da tensão de dano até o valor de deformação de 0.1, no qual a tensão total é nula. Os resultados correspondem exatamente à curva obtida analiticamente, com o modelo uniaxial.

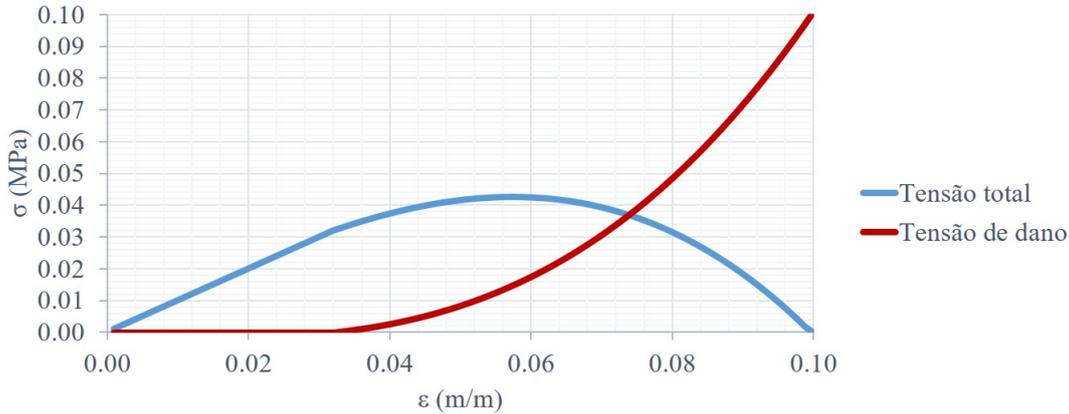


Figura 2: Curva constitutiva para modelo de dano aplicado.

5.2 Exemplo 2: Fendilhamento de prisma

Este exemplo é adaptado de Botta (2003), que apresenta um ensaio de fendilhamento de um prisma de concreto (Fig. 3). O domínio é discretizado em 78 células e o contorno em 68 elementos, conforme apresentado na Fig. 3c. Essa malha é adaptada de Lima Junior (2011). Ainda que o problema original seja representativo da ruptura à tração do material, aqui investiga-se a ocorrência de dano na região comprimida do corpo, de forma que o modelo constitutivo foi calibrado para representar o comportamento à compressão do concreto apresentado em Cimetière et al. (2007). Assim, aplica-se um carregamento monotônico de valor máximo $p = 0.1 \text{ kN/mm}$, monitorando-se as máximas tensões de tração, de modo que não se atinja a tensão admissível de tração para o concreto em questão, em torno de 5 MPa ou 0.005 kN/mm^2 .

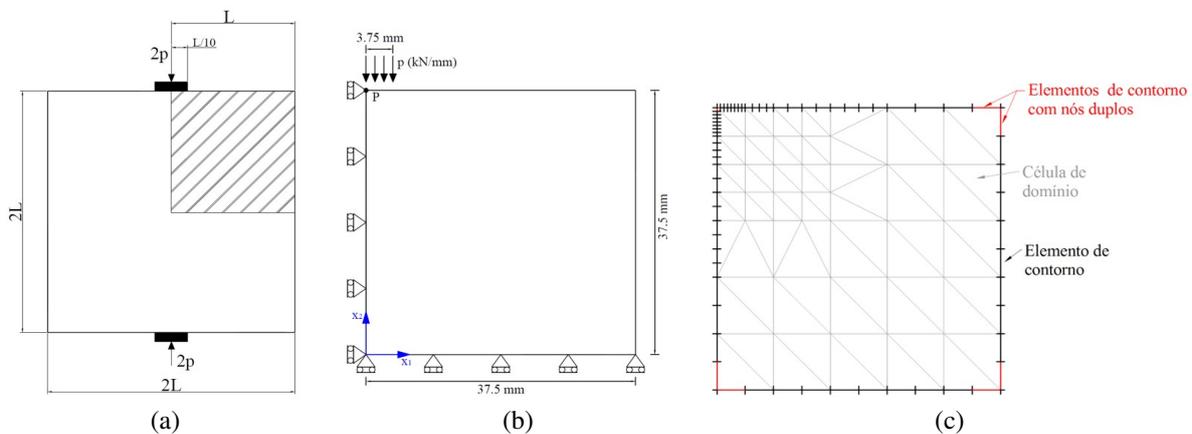


Figura 3: Exemplo de fendilhamento de prisma: detalhe do ensaio (a); modelo reduzido adotado (b); discretização adotada (c).

Os parâmetros utilizados no exemplo são: $E = 33 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.2$. Os parâmetros do modelo são: $A = 3.29 \times 10^{-4} \text{ kN/mm}^2$ e $Y_0 = 5.94 \times 10^{-6} \text{ kN/mm}^2$. Foram utilizados 50 pontos de Gauss e 1000 passos de carga. Diferentemente do que foi apresentado no exemplo anterior, no qual se prescreveu deslocamento, a resposta tensão-deformação no ponto crítico P, nesse caso, não ultrapassou o valor de pico de 0.054 kN/mm^2 (Fig. 4). Tal comportamento é esperado, pelo fato de não se ter implementado nenhuma estratégia de controle de carregamento.

Na Fig. 5 ilustra-se a variação da força horizontal nos pontos de contorno ao longo da face esquerda do espécime. Percebe-se a predominância de esforços de compressão próximos

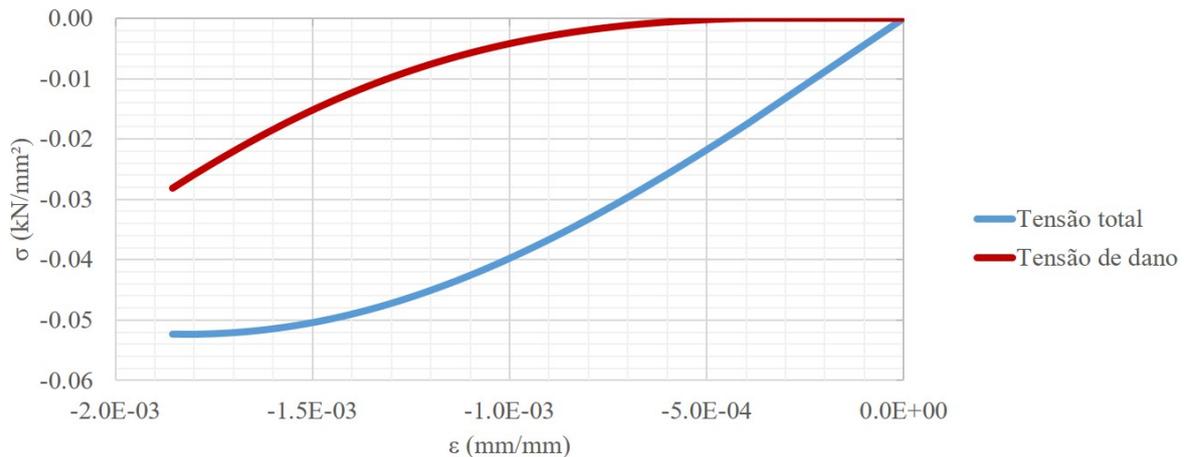


Figura 4: Diagrama tensão x deformação do ponto P.

ao topo ($x_2 = 37.5mm$), pela proximidade à região de aplicação do carregamento. A partir de $x_2 = 30mm$, passam a surgir forças de tração, estas responsáveis pelo fendilhamento do espécime.

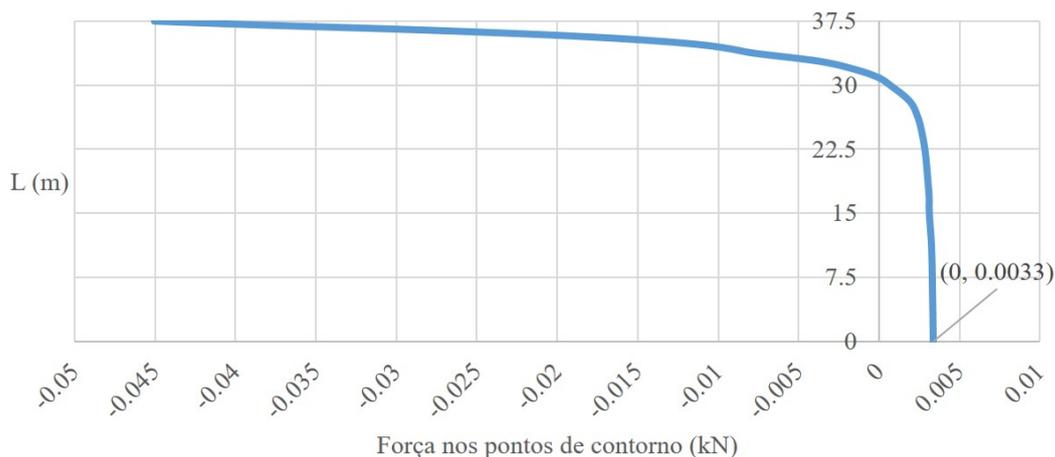


Figura 5: Evolução da força horizontal no contorno ao longo da altura.

Na Fig. 6 apresentam-se as respostas medidas nos pontos de domínio do problema, no último passo convergido na simulação, passo 532. No primeiro mapa de cores (superior direito) tem-se o campo de deslocamentos na direção vertical, com maiores valores de deslocamento próximos à região de aplicação do carregamento. O segundo mapa (superior esquerdo) mostra a evolução da variável de dano, com valor máximo de $D \approx 0.36$. Os mapas inferiores representam as tensões normais nas direções x_1 e x_2 , respectivamente. Para σ_{11} ocorrem altas tensões de compressão, concentradas nas imediações da zona de carregamento, porém, predominam tensões de tração sobre todo o domínio, atingindo valores máximos em torno de $0.0048kN/mm^2$ ($4.8MPa$) na face esquerda. A tensão vertical σ_{22} é puramente de compressão sobre todo o domínio, verificando-se seus valores máximos próximos ao carregamento, e valores que tendem a zero em regiões distantes deste.

O Matlab® é uma poderosa ferramenta computacional com aplicações em diversas áreas, porém sua performance pode não ser tão competitiva, por se tratar de uma linguagem interpretada. No Exemplo 2, o tempo total de execução foi de 16.50 minutos, dos quais cerca de 12.85

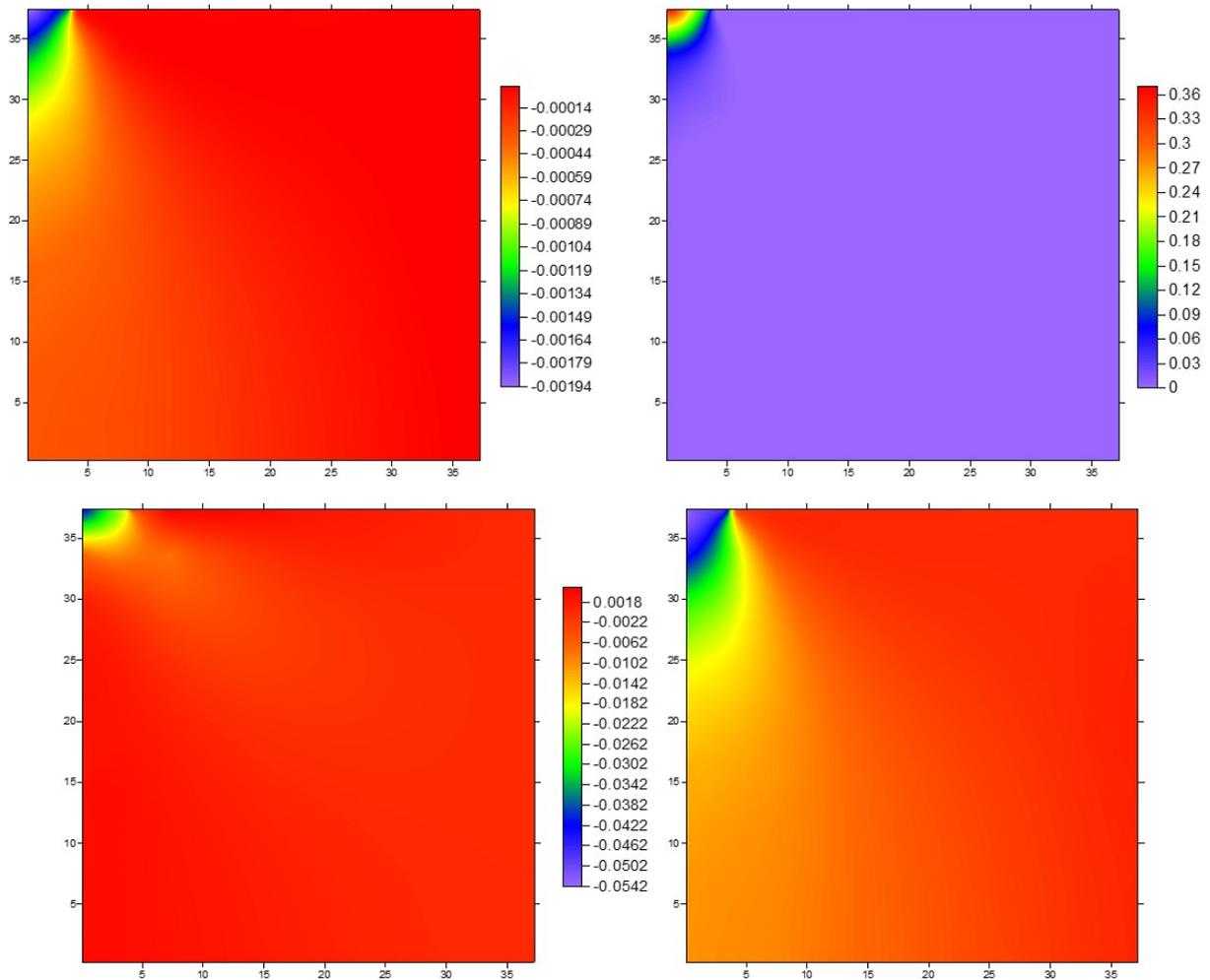


Figura 6: Resultados para deslocamento vertical, variável de dano e tensões normais.

minutos correspondem ao tempo de execução da rotina de integração dos termos de domínio. Utilizou-se um computador portátil com processador de velocidade de 2.53 GHz e 6 GB de memória *RAM*.

6 CONCLUSÕES

A formulação não linear física do MEC, aqui apresentada, foi aplicada a um primeiro exemplo com deformação homogênea, a partir do qual pôde-se validar a implementação do modelo de dano adotado. Num segundo exemplo, obtiveram-se resultados coerentes, ilustrando-se a eficácia da formulação, guardada a limitação da modelagem do comportamento pós-pico na implementação atual. A avaliação das integrais de domínio via discretização por células apresentou um custo computacional elevado, chegando a cerca de 80% do tempo total de processamento. Para problemas com uma necessidade de discretização mais rica, considerando a formulação utilizada neste trabalho, métodos alternativos devem ser considerados.

Tendo em vista o prosseguimento do trabalho, tem-se como perspectivas para trabalhos futuros: utilização de técnicas alternativas de integração de domínio, de forma a evitar a discretização em células; implementação de modelos de dano mais robustos, para a modelagem de materiais cimentícios; implementação de estratégias de controle de carregamento; e utilização de linguagens de programação alternativas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES e ao Laboratório de Computação Científica e Visualização – LCCV/UFAL.

REFERÊNCIAS

- Benallal, A., Botta, A. S., & Venturini W. S., 2006. On the description of localization and failure phenomena by the boundary element method. *Computational Methods Applied in Mechanical Engineering*, vol. 195, n. 44, pp. 5833-5856.
- Botta, A. S., 2003. *Método dos Elementos de Contorno para Análise de Corpos Danificados com Ênfase no Fenômeno da Localização de Deformações*. Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo/São Carlos.
- Botta, A. S., Venturini W. S. & Benallal, A., 2005. BEM applied to damage models emphasizing localization and associated regularization techniques. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, n. 8, pp. 814-827.
- Cimetière, A., Halm, D. & Molines, E., 2007. A damage model for concrete beams in compression. *Mechanics Research Communications*, vol. 34, n. 2, pp. 91-96.
- Kachanov, L. M., 1958. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademii Nauk*, vol. 8, pp. 26-31.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag.
- Lima Junior, E. T., 2011. *Isotropic Damage Phenomena in Saturated Porous Media: A BEM Formulation*. PhD thesis, Universidade de São Paulo/São Carlos.
- Marigo, J. J., 1981. Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *Comptes Rendus de l'Académie des Science*, vol. 292, série II, pp. 1309-1312.
- Sladek, J., Sladek, V. & Bazant, Z. P., 2003. Non-local boundary integral formulation for softening damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 57, n. 1, pp. 103-116.
- Voyiadjis, G. Z. & Kattan, P. I., 2016. Mechanics of damage, healing, damageability, and integrity of materials: A conceptual framework. *International Journal of Damage Mechanics*, DOI: 10.1177/10567895166635730.