



CONFIABILIDADE ESTRUTURAL APLICADA A MODELOS NUMÉRICOS DE TRELIÇA EM REGIME ELASTOPLÁSTICO

Thiago Barbosa da Silva

Eduardo Toledo de Lima Junior

thiagobarbosaal@gmail.com

limajunior@lccv.ufal.br

Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas

Campus A.C. Simões, 57072-970, Maceió, Alagoas, Brasil

Resumo. No campo da engenharia de estruturas, diversas têm sido as iniciativas para melhorar a representação teórica e numérica do comportamento de sistemas estruturais. O desenvolvimento de modelos computacionais robustos permite uma avaliação mais precisa do desempenho mecânico de estruturas, tanto na fase de projeto quanto ao longo de sua vida em serviço. Considerando-se a não linearidade observada na resposta mecânica de grande parte dos materiais disponíveis, modelos constitutivos elastoplásticos figuram como uma ferramenta adequada à descrição do comportamento de diversos materiais de natureza dúctil. Por outro lado, a análise de confiabilidade aplicada ao projeto estrutural permite que a probabilidade de falha da estrutura seja prevista, ainda na fase de dimensionamento. Esta pode ser construída com base na avaliação das incertezas das variáveis de projeto, as quais são descritas de forma aleatória. Propõe-se neste trabalho uma análise confiabilística aplicada a modelos de elementos finitos para treliças, em regime elastoplástico, segundo um modelo de encruamento isotrópico. Incertezas oriundas da variabilidade do carregamento e das propriedades geométricas e mecânicas das barras de treliça são consideradas, de forma a estimar os níveis de segurança associados a estados limites últimos e de serviço, tal como ruptura de uma seção transversal.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural, Plasticidade, Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

A grande complexidade dos problemas atualmente propostos nas diversas áreas do conhecimento leva a uma demanda crescente de qualidade de pessoal, infraestrutura e métodos de análise disponíveis. No campo da engenharia de estruturas, diversas têm sido as iniciativas para melhorar a representação teórica e numérica do comportamento de sistemas estruturais. O desenvolvimento de modelos computacionais robustos permite uma avaliação robusta do desempenho mecânico de estruturas, tanto na fase de projeto quanto ao longo de sua vida.

Considerando-se a não linearidade observada na resposta mecânica de grande parte dos materiais disponíveis, modelos constitutivos elastoplásticos figuram como uma ferramenta adequada à descrição do comportamento de diversos materiais de natureza dúctil. Estes apresentam altos níveis de deformação, associados a pequenos aumentos de tensão aplicada, antes de atingir a ruptura. Maiores detalhes podem ser vistos em Shames e Cozzarelli (1997).

Teorias baseadas em análise probabilística, como a Confiabilidade Estrutural, se propõem a incrementar a qualidade de métodos de projeto e análise de estruturas, a partir da quantificação e tratamento das incertezas inerentes ao problema em estudo. Como produto deste tipo de análise, pode-se obter uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura. Vale notar que o conceito de probabilidade de falha não está relacionado apenas à ocorrência de eventos extremos, de ruína estrutural, mas também à violação de qualquer requisito ao qual espera-se que a estrutura satisfaça, usualmente definidos pelos Estados Limites de Serviço da estrutura. Como exemplos, pode-se citar deslocamentos e tensões inadmissíveis. Dentre os métodos usuais em confiabilidade de estruturas, destacam-se o método de simulação de Monte-Carlo e o método semi-analítico FORM (*First Order Reliability Method*). Ambos são apresentados em Melchers (1999).

Em problemas complexos de engenharia, cuja solução seja fornecida por um modelo computacional, existe a necessidade do estudo de técnicas de acoplamento entre rotinas de confiabilidade e modelos numéricos. De acordo com Lemaire (2013), o acoplamento é concebido para que o modelo confiabilístico governe o modelo mecânico, de forma que este último recebe, em cada iteração, um conjunto de variáveis aleatórias fornecido pelo módulo de confiabilidade.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo realizar uma análise confiabilística aplicada a modelos de elementos finitos para treliças, considerando não linearidade física, através do modelo elastoplástico com encruamento linear positivo isotrópico. A estimativa da probabilidade de falha será realizada através dos métodos de Monte Carlo e FORM, com a finalidade de comparar suas performances no que diz respeito à precisão e custo computacional na obtenção da probabilidade de falha.

2 ANÁLISE LINEAR DE TRELIÇAS PLANAS

Em estruturas de treliças bidimensionais, um nó típico da estrutura possui 2 graus de liberdade que, em termos de deslocamento, correspondem a duas translações. Desta forma, existem 4 graus de liberdade por elemento, que são aqui referenciados pelo sistema local de coordenadas (x_e, y_e) apresentado na Fig. 1. A matriz de rigidez do elemento nas coordenadas locais, é apresentada na Eq. (1). As variáveis envolvidas na definição dos termos de rigidez são: módulo de elasticidade longitudinal do material (E), comprimento do elemento (L) e área da seção transversal do elemento (A). Assim, a matriz de rigidez do elemento apresenta ordem 4×4 .

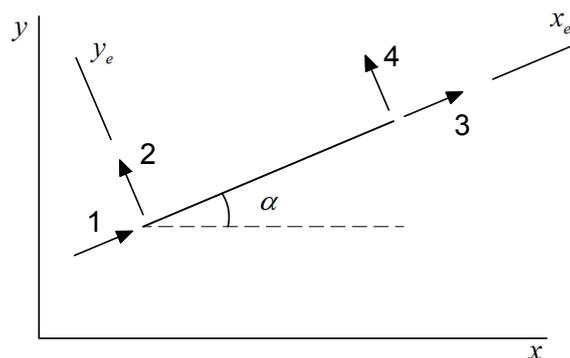


Figura 1: Sistema de coordenadas de um elemento de treliça plana

$$[k]_{elem} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A matriz de rigidez do elemento nas coordenadas globais é obtida a partir da matriz de rigidez local através de um processo de rotação de eixos, baseado na manipulação de uma matriz de rotação para o elemento, montada em função das direções dos eixos locais em relação ao sistema global de coordenadas, conforme apresentado em Fish e Belytschko (2009). Essa matriz $[R]$ pode ser escrita como segue:

$$[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_x & C_y \\ 0 & 0 & -C_y & C_x \end{bmatrix} \quad (2)$$

sendo os cossenos diretores C_x e C_y obtidos a partir das coordenadas das conectividades inicial (j) e final (k) do elemento, e de seu comprimento através das expressões:

$$C_x = \frac{x_k - x_j}{L}; \quad C_y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (3)$$

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (4)$$

De posse da matriz $[R]$, o cálculo da matriz de rigidez do elemento nas coordenadas globais é expresso matematicamente pelo duplo produto apresentado na Eq. (5).

$$[k]_{global} = [R]^T \cdot [k]_{elem} \cdot [R] \quad (5)$$

Desde que as rigidezes do elemento estejam devidamente organizadas numa matriz referenciada no sistema global de coordenadas - $[k]_{global}$ - a matriz de rigidez da estrutura $[K]$ pode

ser montada pela combinação das rigidezes dos elementos, observando-se os graus de liberdade influenciados pelas conectividades de cada um deles. A matriz $[K]$ é quadrada e de ordem n , sendo n o número de graus de liberdade da estrutura. Com a matriz de rigidez da estrutura $[K]$ já conhecida e com o vetor das forças externas $\{F\}$ montado, obtém-se os deslocamentos nodais da estrutura através da equação de equilíbrio a seguir.

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\} \quad (6)$$

Os deslocamentos nodais nas coordenadas locais são calculados pelo produto

$$\{\delta\} = [R] \cdot \{u\} \quad (7)$$

As deformações nos elementos são calculadas pela relação entre a variação de comprimento e o comprimento inicial destes. Em relação as tensões, estas serão calculadas segundo os procedimentos ilustrados no modelo constitutivo adotado, já que trata-se de uma análise não linear.

3 MODELO CONSTITUTIVO ADOTADO

O modelo elastoplástico com encruamento linear positivo isotrópico (Fig. 2) será adotado neste trabalho. Após atingida a tensão de escoamento do material, as tensões se expandem com a variação da deformação plástica, caracterizando o encruamento positivo (ou enrijecimento).

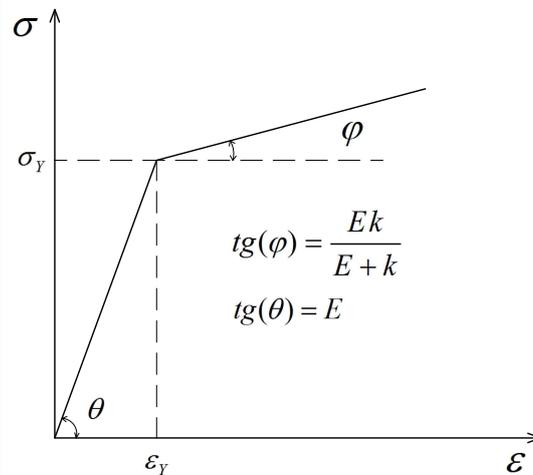


Figura 2: Diagrama constitutivo do modelo elastoplástico com encruamento isotrópico

A tensão de plastificação varia segundo a deformação acumulada. O critério de plastificação é escrito da forma:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_Y + k\alpha) \quad (8)$$

sendo k o módulo de encruamento isotrópico e α uma medida da deformação plástica acumulada, definida na Eq. (9).

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^P| \quad (9)$$

No regime elastoplástico a deformação total é dada pela soma de uma parcela elástica (ε^e) com outra plástica (ε^p), ou seja, $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. A relação tensão-deformação está indicada na Eq. (10) e a lei de plastificação do modelo é apresentada na Eq. (11).

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = |\dot{\varepsilon}^p| \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \text{sign}(\sigma) \quad (11)$$

onde $\dot{\lambda}$ representa o valor absoluto do incremento de deformação plástica.

4 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Segundo Sagrilo (2003), a confiabilidade estrutural tem como principal objetivo avaliar a segurança de uma estrutura, que basicamente consiste no cálculo da probabilidade de que um estado limite de uma estrutura seja violado. Desta forma, é possível quantificar a probabilidade de que uma estrutura não suporte as solicitações especificadas durante o projeto. Para quantificar os modos de falha de uma estrutura utilizam-se as chamadas equações de estado limite (funções de falha), que são deduzidas a partir dos aspectos físicos do problema em análise. Seja uma função de falha denominada $G(\mathbf{X})$, em que \mathbf{X} é um vetor de variáveis aleatórias (v.a.) consideradas na análise. Para cada modo de falha de uma estrutura a respectiva função estabelece uma fronteira entre as regiões de falha Ω_f e sobrevivência Ω_s da estrutura, onde valores positivos de $G(\mathbf{X})$ representam evento seguro e a condição $G(\mathbf{X}) \leq 0$ indica evento de falha. A probabilidade de falha é calculada integrando-se a função conjunta de densidade de probabilidade das v.a. do problema sobre o domínio de falha, conforme apresentado a seguir.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (12)$$

A integral n-dimensional supracitada é de difícil avaliação analítica, considerando-se a complexidade das funções densidade de probabilidade das distribuições estatísticas usuais. Sendo assim, faz-se necessário a utilização de métodos de análise em confiabilidade estrutural para sua resolução. No presente trabalho serão utilizados o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e o Método de Simulação de Monte Carlo.

De acordo com Sagrilo (2003), a simulação de Monte Carlo é basicamente uma simulação que envolve a utilização de números aleatórios. O método tem como objetivo produzir N eventos randômicos para serem avaliados na equação de estado limite $G(\mathbf{X})$. Desta forma, eventos que possuem valores negativos são contabilizados como eventos de falha (N_f). Assim, a probabilidade de falha é estimada pela razão entre o número de eventos de falha e o número total de eventos. Os resultados gerados pela simulação de Monte Carlo podem ser bastante precisos, a depender do número de cenários que sejam testados. Contudo, para problemas que possuam probabilidades de falha muito baixas, faz-se necessário a realização de um grande número de simulações para atingir respostas adequadas, implicando em alto custo computacional.

O FORM é um método analítico de confiabilidade baseado na transformação das variáveis aleatórias originais em variáveis aleatórias normais equivalentes, e na linearização da função de falha do problema. O grande diferencial desse método consiste em sua capacidade de utilizar toda a informação estatística das variáveis aleatórias do problema, podendo-se lidar com

distribuições estatísticas quaisquer, inclusive considerando correlação entre variáveis. O problema de confiabilidade é formulado como um problema de otimização não linear com restrição, no qual busca-se o chamado ponto de projeto, definido no espaço transformado das variáveis normais equivalentes (Fig. 3). Este ponto contém os valores das variáveis aleatórias que mais provavelmente levem à falha da estrutura. Desta definição decorre o conceito de índice de confiabilidade (β), que consiste na menor distância entre a origem do espaço transformado e a superfície de falha. Maiores detalhes acerca do método são apresentados em Melchers (1999).

Os termos da função de falha $G(\mathbf{X})$, podem conter expressões de modelos mecânicos e modelos de carregamento, sendo implicitamente definidos por um modelo numérico qualquer. No acoplamento para uma rotina confiabilística do tipo FORM, há a necessidade de se calcular o valor da função de falha e seus gradientes, os quais são utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema. Considerando-se a natureza implícita de $G(\mathbf{X})$, suas derivadas são calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo numérico.

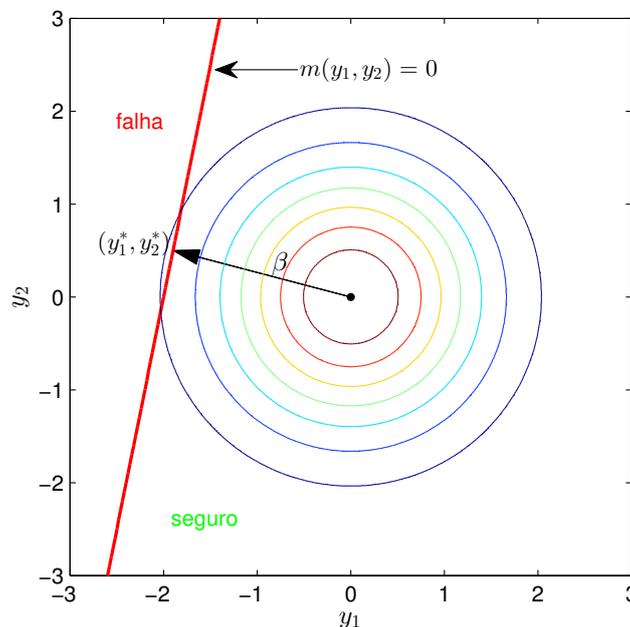


Figura 3: Representação da superfície de falha no espaço reduzido, para duas variáveis aleatórias

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Exemplo de Validação

Apresenta-se a seguir um exemplo adimensional de treliça plana, apresentado em Proença (2010). O material das barras apresenta um comportamento elastoplástico com encruamento isotrópico linear, conforme apresentado anteriormente. Na Figura 4, está indicado o arranjo estrutural simétrico da treliça plana em estudo.

As barras possuem módulo de elasticidade $E = 1000$, tensão de escoamento $\sigma_Y = 4$, módulo de encruamento isótropo $k = 111$ e área da seção transversal $A = 1$. Uma força concentrada $P = 9.7$ é aplicada no nó 4, e os parâmetros geométricos, comprimento L e ângulo β , apresentam valores 100 e 60° , respectivamente. O carregamento máximo $P = 9.7$ foi aplicado por meio de 4 incrementos de força.

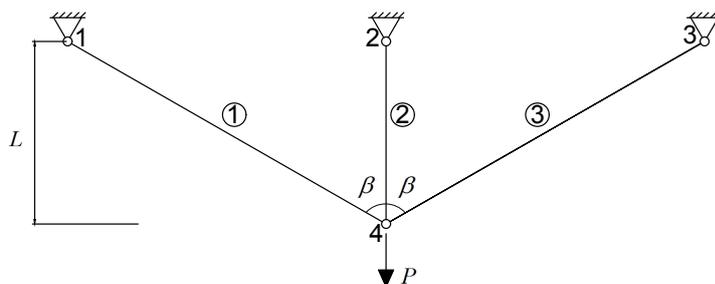


Figura 4: Esquema estrutural da treliça plana com três barras

A resposta da estrutura é apresentada em termos de um gráfico de deslocamento vertical no nó 4 *versus* força aplicada, conforme indicado na Fig. 5. Os resultados obtidos são comparados com os resultados apresentados por Proença (2010). Observa-se uma boa concordância entre a resposta obtida pelo referido autor e a modelagem proposta neste trabalho.

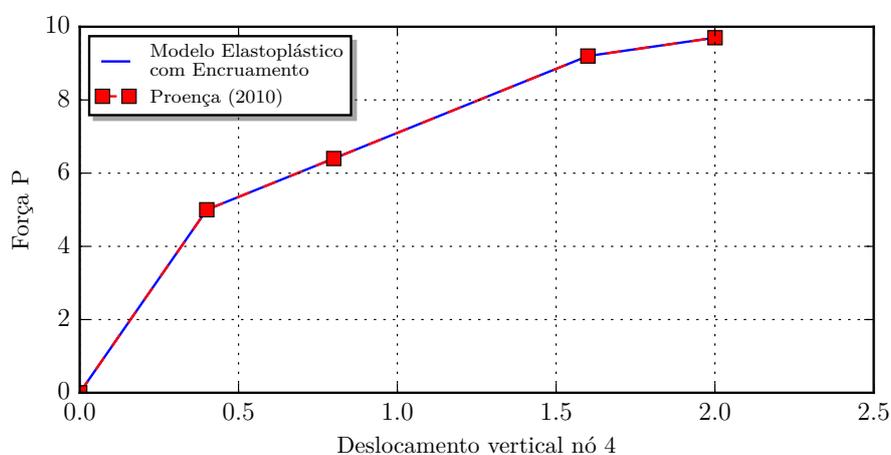


Figura 5: Curvas deslocamento vertical no nó 4 *versus* força P

Na Figura 5, verifica-se que as três barras da treliça apresentam comportamento elástico linear até $P = 5$. Nota-se que já se inicia o processo de escoamento após este ponto, na barra 2, enquanto que as barras inclinadas experimentam um esforço normal unitário. O início do escoamento da barra 2 provoca uma queda da rigidez do sistema, conforme indicado na mudança de inclinação da curva. O comportamento de cada barra é apresentado na Fig. 6.

5.2 Exemplo de Aplicação

Neste exemplo, trata-se da análise confiabilística de uma treliça metálica biapoiada composta por 13 barras, conforme ilustra a Fig. 7. A estrutura é solicitada por uma carga $P = 220$ kN, aplicada monotonicamente no nó 3 em 12 incrementos de força. Adota-se um perfil laminado comercial com seção tubular circular, com diâmetro $D = 73$ mm e espessura de parede $t = 7.3$ mm. As barras possuem módulo de elasticidade $E = 210$ GPa, módulo de encruamento $k = 65.63$ GPa, tensão de escoamento $\sigma_y = 250$ MPa e tensão de ruptura $\sigma_u = 400$ MPa.

As variáveis aleatórias tratadas no problema são apresentadas na Tabela 1. Os parâmetros estatísticos (média e desvio padrão) de cada variável aleatória são escritos em termos dos coeficientes *mean* e *COV* (coeficiente de variação).

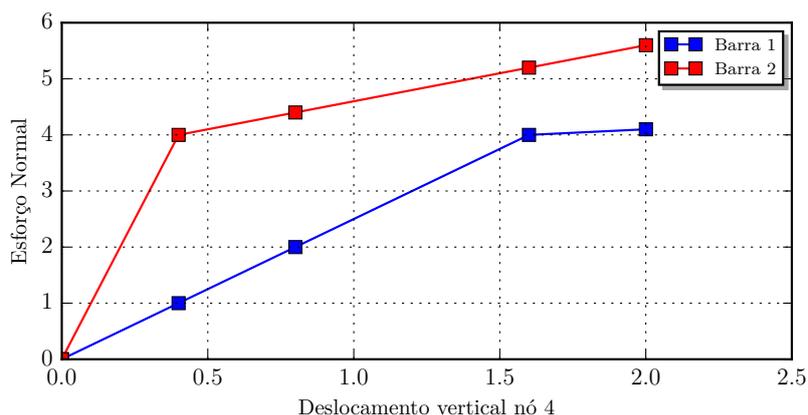


Figura 6: Curvas deslocamento vertical no nó 4 versus esforço normal

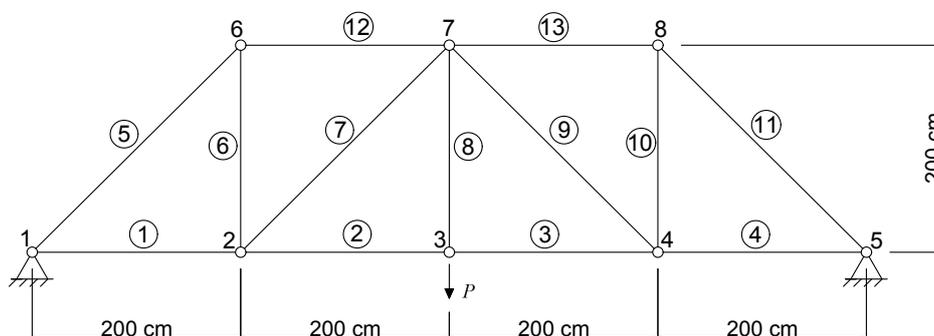


Figura 7: Treliça metálica com banzos paralelos

O valor médio da variável aleatória é obtido multiplicando-se o fator apresentado por seu valor nominal. Em relação ao desvio padrão, este é obtido multiplicando seu valor médio pelo coeficiente de variação. As informações estatísticas das variáveis foram obtidas no trabalho de Hamilton (2011) *apud* Souto (2015) e em dados de fabricação de tubos metálicos laminados.

Tabela 1: Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias utilizadas no problema

D		t		E		σ_y, σ_u		P	
<i>mean</i>	<i>COV</i>	<i>mean</i>	<i>COV</i>	<i>mean</i>	<i>COV</i>	<i>mean</i>	<i>COV</i>	<i>mean</i>	<i>COV</i>
1.0059	0.00181	1.0069	0.0259	1.04	0.05	1.03	0.063	1.21	0.0405

Os modos de falha considerados referem-se à falha individual das barras por flambagem, escoamento ou ruptura, a depender se o esforço atuante é de compressão ou tração. Na Tabela 2 apresentam-se os valores de esforço atuante e probabilidade de falha (via FORM) associada, para as barras da treliça, ao final do carregamento aplicado. Nota-se que as barras críticas são as de número 5, para flambagem, e 8, para escoamento/ruptura, sendo o primeiro o modo de falha dominante, apesar de estar associado a um valor de esforço menor. Vale destacar a redução significativa dos valores de P_f nas barras com esforços menores que os críticos, chegando a valores desprezíveis, inferiores a 10^{-30} .

Tabela 2: Probabilidade de falha de cada barra e seu respectivo esforço atuante

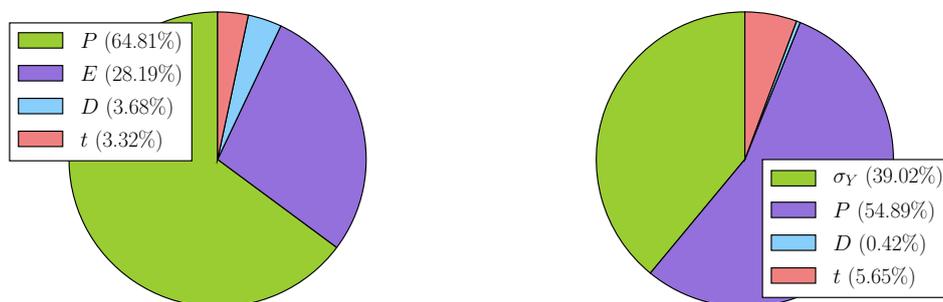
Flambagem			Escoamento			Ruptura		
Barra	N (kN)	P_f	Barra	N (kN)	P_f	Barra	N (kN)	P_f
1	-57.75	$10^{-36.9396}$	2	57.75	$< 10^{-50}$	2	57.75	$< 10^{-50}$
5	-163.34	$10^{-2.5416}$	6	115.5	$< 10^{-50}$	6	115.5	$< 10^{-50}$
7	-163.34	$10^{-2.5416}$	8	231	$10^{-5.7313}$	8	231	$< 10^{-21.1917}$
12	-115.5	$10^{-9.7771}$	-	-	-	-	-	-

A seguir, apresentam-se os resultados de probabilidade de falha das barras críticas para os dois modos de falha predominantes, utilizando a simulação de Monte Carlo e o método FORM (Tabela 3). Os resultados obtidos com FORM apresentam ótima congruência com os valores de Monte Carlo, a um custo computacional significativamente menor que este último. Apresenta-se também o número de chamadas feitas ao modelo numérico pelo módulo de confiabilidade, onde a eficiência do método FORM no acoplamento mecano-fiabilístico merece destaque.

Tabela 3: Probabilidade de falha para as barras críticas (5 e 8)

Método	Flambagem			Escoamento		
	P_f	Chamadas	Tempo	P_f	Chamadas	Tempo
Monte Carlo	$10^{-2.5317}$	10^4	3.84 h	$10^{-5.7412}$	10^4	12.6 h
FORM	$10^{-2.5416}$	50	10.11 s	$10^{-5.7313}$	241	30.97 s

Outra informação importante fornecida pela análise via FORM são os fatores de importância de cada v.a. na probabilidade de falha obtida, calculados a partir dos cossenos diretores do vetor normal à função de falha no ponto de projeto no espaço reduzido. Os fatores são apresentadas em termos percentuais na Fig. 8.

**Figura 8: Fatores de influência para os modo de falha à flambagem (à esquerda) e ao escoamento (à direita)**

Nota-se que o carregamento, descrito como v.a. P , possui alta influência nessa análise confiabilística, tanto para o modo de falha à flambagem quanto para o escoamento. Isso pode

ser explicado pelo comportamento estatístico da variável, que apresenta uma grande dispersão, perturbando significativamente a resposta. Na falha por flambagem, a variável que representa o módulo de elasticidade se mostra importante, com fator em torno de 28%, enquanto que no modo referente ao escoamento da seção, a tensão de escoamento do material se destaca, com fator de importância de 39%. Por fim, observa-se que as v.a. D e t possuem pouca influência na obtenção de P_f .

Visando uma análise de segurança integrada da estrutura, faz-se a associação dos modos de falha das barras críticas, como um sistema em série. Tal aproximação é razoável, tendo em vista a isostaticidade da estrutura, na qual a falha do elemento mais solicitado leva à falha do sistema. Com base na teoria de confiabilidade de sistemas (vide Lemaire (2013)), obtém-se uma estimativa para a probabilidade de falha global, em torno de $10^{-2.5416}$. Nota-se que este é o valor da P_f isolada da barra sujeita à falha por flambagem, sendo este modo dominante na segurança da estrutura.

6 CONCLUSÕES

Através dos exemplos analisados, foi possível validar a implementação do modelo elastoplástico adotado, além de quantificar a influência das incertezas associadas às variáveis de projeto na resposta da treliça analisada. A flambagem da barra mais comprimida se apresentou como o modo de falha dominante na estrutura, com grande influência das v.a. que representam a carga aplicada e o módulo de elasticidade do material. Em trabalhos futuros, pretende-se estender a metodologia de acoplamento mecano-fiabilístico para problemas de otimização baseada em confiabilidade, considerando-se diferentes modelos constitutivos.

AGRADECIMENTOS

Ao CENPES/PETROBRAS pela bolsa de estudos e ao LCCV/UFAL pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Fish, J., & Belytschko, T., 2009. *Um primeiro curso de elementos finitos*. LTC, Rio de Janeiro.
- Hamilton, S. R., 2011. *Performance-based fire engineering for steel framed structures: a probabilistic methodology*. Tese (Doutorado). Stanford University.
- Lemaire, M., 2013. *Structural reliability*. John Wiley & Sons.
- Melchers, R. E., 1999. *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley, New York.
- Proença, S. P. B., 2010. *Análise não-linear de estruturas: notas de aula*. São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Sagrilo, L. V. S., 2003. *Confiabilidade estrutural: notas de aula*. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Shames, I. H., & Cozzarelli, F. A., 1997. *Elastic and inelastic stress analysis*. Taylor & Francis.
- Souto, N. A. O., 2015. *Aplicação de confiabilidade ao estudo de elementos de aço comprimidos em situação de incêndio*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Alagoas.