



## UM MÉTODO MULTIESCALA UTILIZANDO FUNÇÕES DE BASE COM RESTRIÇÃO SUAVIZADA PARA A SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

**Andresa Dornelas de Castro**

**Darlan K. E. de Carvalho**

andresa\_dornelas@hotmail.com

dkarlo@uol.com.br

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco

Av. Prof. Moraes Rego, 1235-Cidade Universitária, CEP: 50670-901, PE, Recife, Brasil

**Resumo.** *Um dos grandes desafios da simulação numérica de reservatórios de petróleo está associado à existência de múltiplas escalas, tanto espaciais quanto temporais, sendo que, as propriedades físicas, como porosidade e permeabilidade apresentam grande heterogeneidade, podendo variar muito ao longo das diferentes escalas. Dessa forma, a partir das modernas técnicas de caracterização e modelagem geoestatística, os modelos geológicos computacionais são capazes de integrar uma grande quantidade de dados, possuindo cerca de dezenas milhões de células. No entanto, os modelos típicos de simulação fluxo em reservatórios podem lidar apenas com uma fração desse valor, tornando a simulação direta inviável em muitos casos. Neste contexto, no presente trabalho, apresentamos uma implementação do Método Multiescala Utilizando Funções de Base com Restrição Suavizada (MFBRs) para a solução implícita da equação elíptica de pressão que surge da modelagem do escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo, quando usamos, por exemplo, uma formulação segregada do tipo IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation). Para a solução do problema de saturação, utilizamos o clássico método de ponderação a montante de primeira ordem (First Order Upwind Method - FOUM).*

**Palavras-Chaves:** *Escoamento Bifásico de Água e Óleo, Reservatórios Muito heterogêneos, Método Multiescala, Funções de Base Com Restrição Suavizada.*

## 1. INTRODUÇÃO

Modelos geológicos computacionais modernos, para descrever um reservatório de petróleo na escala mais fina, apresentam de  $10^7$  a  $10^8$  células, porém a capacidade típica dos simuladores fluxo está em torno de  $10^6$  células (Zhou, 2010), evidenciando que a simulação direta de problemas envolvendo múltiplas escalas é extremamente difícil de ser realizada devido à excessiva demanda por recursos computacionais. Nesse contexto, surgiram os métodos de transferências de escalas, tais como o *upscaling* e o multiescala. As metodologias multiescala se distinguem das técnicas de *upscaling* tradicionais por conservar as informações da escala mais fina ao longo de toda a simulação. Dessa forma, a ideia principal dos métodos multiescala é capturar as informações da escala fina através da construção de funções de base, responsáveis pela transferência de informações entre as escalas envolvidas.

Métodos multiescala aplicados à solução de problemas elípticos foram inicialmente propostos por Hou e Wu (1997) a partir do *Multiscale Finite Element Method* (MsFEM). Posteriormente, foi desenvolvido o Método dos Volumes Finitos Multiescala (MsFVM) por Jenny et al. (2003, 2004, 2006), baseando-se na criação de dois conjuntos de funções de base, necessários para garantir a conservação em toda a malha fina. Mais recentemente, Zhou e Tchelepi (2008) e Zhou (2010) desenvolveram um MsFVM, denominado de *Operator Based Multiscale Method* (OBMM), realizando todas as operações do método de maneira algébrica, definindo matricialmente e de maneira clara todos os operadores de transferência de escala. Estes operadores são chamados de: Operador de Prolongamento e Operador de Restrição. Todas as variantes dos métodos MsFVM mencionados, usam a mesma organização de malhas proposta por Jenny et al. (2003), uma malha fina, uma malha grossa primal e uma malha grossa dual. O uso da malha grossa dual, implica no uso de condições de contorno reduzidas que desacoplam os subproblemas de pressão no domínio. Como consequência, ocorre um erro na solução do campo de pressão, nas regiões próximas dos contornos dos volumes da malha grossa dual, ocasionando uma perda da consistência na solução nas interfaces dos volumes duais (Lunati et al., 2011; Moyner, 2012). Os Métodos de Volumes Finitos Multiescala Iterativo (I-MsFVM), desenvolvidos por Hajibeygi et al. (2008), são uma boa alternativa para melhorar a acurácia da pressão na interface dos volumes duais. Vale ressaltar que, atualmente, quase todas as formulações multiescala usam algum método iterativo para melhorar a acurácia da aproximação.

Recentemente, foi desenvolvido por Møyner e Lie (2015) um Método Multiescala Utilizando Funções de Base com Restrição Suavizada (MFBR). Assim como em outros métodos multiescala, no MFBR é realizada uma partição mais grossa de uma malha subjacente mais refinada. Nesse caso, além da malha fina é necessária a construção de uma malha grossa primal e de regiões de iteração para o suporte das funções de base. No MFBR, o operador de prolongamento é construído a partir de um esquema iterativo com suavização restrita. Desta forma, partindo de um valor constante, um esquema iterativo é aplicado, produzindo operadores que são consistentes com as propriedades locais dos operadores diferenciais (ou integrais). Uma característica importante desse método reside no fato de que pode ser usado para malhas não estruturadas com poucas restrições.

No presente trabalho, apresentamos uma implementação de uma variante do MFBR para a solução do problema elíptico de pressão associado a modelagem do escoamento bifásico de óleo e água em reservatórios de petróleo muito heterogêneos. Para solução da equação de saturação utilizamos uma formulação explícita do tipo *upwind* de primeira ordem (First Order Upwind Method - FOUM). O sistema resultante é resolvido por uma formulação

segregada do tipo IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation). Para estudarmos a acurácia do método, resolvemos alguns problemas *benchmark* encontrados na literatura.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para modelarmos o escoamento bifásico de água e óleo em reservatórios de petróleo utilizamos uma formulação segregada em que, a partir da Lei de Conservação da Massa e da Lei de Darcy, o escoamento é descrito por uma equação elíptica de pressão e uma equação hiperbólica de saturação. Assumiremos, sem perda de generalidade, que os fluidos (óleo-água) e rocha são incompressíveis e que o escoamento é isotérmico, em um meio totalmente saturado.

Inicialmente, escrevemos a conservação da massa para uma fase  $i$  ( $i=o$  (óleo),  $w$  (água)), como:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) + q_i . \quad (1)$$

Onde  $\vec{v}_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\phi$ ,  $q_i$  e  $S_i$  representam, respectivamente, a velocidade de Darcy, a densidade da fase  $i$ , a porosidade (fração da rocha que pode ser ocupada por fluidos), os termos de fonte (ou sumidouro, representados por poços de injeção ou produção) e a saturação da fase  $i$  (fração do volume poroso ocupado pela fase).

Ao considerar o meio poroso totalmente saturado, podemos escrever a equação constitutiva ou de restrição das saturações, como:

$$S_o + S_w = 1. \quad (2)$$

Adicionalmente, assumindo que a velocidade de cada fase obedece à Lei de Darcy, desprezando os efeitos capilares e gravitacionais, podemos escrevê-la, como:

$$\vec{v}_i = -\frac{k_{ri}}{\mu_i} \underline{K} \vec{\nabla} p_i . \quad (3)$$

Onde  $p_i$ ,  $k_{ri}$  e  $\mu_i$  representam, respectivamente, a pressão, a permeabilidade relativa e a viscosidade da fase  $i$ , e  $\underline{K}$  é o tensor de permeabilidade absoluta da rocha.

Substituindo a Eq.(3) na Eq.(1), e após alguma manipulação algébrica, obtemos a Equação de Pressão, dada por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \text{ com } \vec{v} = -\lambda_T \underline{K} \vec{\nabla} p . \quad (4)$$

Onde  $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_w$  é a velocidade total,  $\lambda_T = \lambda_o + \lambda_w$  e  $Q = Q_w + Q_o$  são, respectivamente, a mobilidade total e a vazão específica total e, por sua vez,  $\lambda_i = (k_{ri}/\mu_i)$ ,  $Q_i = (q_i/\rho_i)$  são a mobilidade e a vazão específica da fase  $i = o, w$ .

Novamente, utilizando as Eq.(1), Eq.(2) e Eq.(3) e após alguma manipulação algébrica, podemos escrever a equação de saturação da água, como:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\bar{\nabla} \cdot (f_w \bar{v}) + Q_w. \quad (5)$$

Onde  $f_w = f_w(S_w) = \lambda_w / \lambda_r$  é a função fluxo fracional da água, que é uma função não linear da saturação da fase água e  $Q_w = q_w / \rho_w$  é a vazão específica da mesma.

### 3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Nesse trabalho, as equações Eq.(4) e Eq.(5) são tratadas utilizando uma metodologia IMPES, onde o problema de pressão é resolvido utilizando o método de volumes finitos com aproximação de fluxo por dois pontos (Two Point Flux Approximation - TPFA) no contexto multiescala, e o problema de saturação é resolvido utilizando o método FOUM. É importante lembrar que o TPFA é equivalente a utilizarmos uma aproximação de diferenças finitas centradas para aproximarmos os fluxos nas superfícies de controle, gerando um estêncil de 5 pontos em 2-D, conforme sugerido na Fig.1.

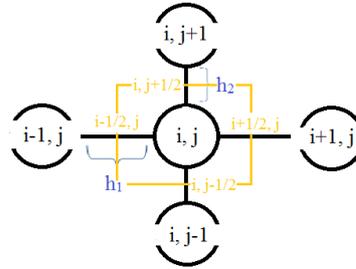


Figura 1: Representação de um estêncil de diferenças finitas associado a um volume de controle  $i,j$ .

Partindo de uma malha de volumes finitos que discretiza espacialmente o domínio bidimensional  $\Omega$  e aplicando a Eq.(4) a um volume de controle genérico  $i,j$  dessa malha (Fig. 1), temos:

$$\frac{k_{i+1/2,j} \left( \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_{1,i+1/2}} \right) - k_{i-1/2,j} \left( \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_{1,i-1/2}} \right)}{h_{1,i}} - \frac{k_{i,j+1/2} \left( \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_{2,j+1/2}} \right) - k_{i,j-1/2} \left( \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{h_{2,j-1/2}} \right)}{h_{2,j}} = q_{i,j} \quad (6)$$

Definindo a transmissibilidade em cada superfície de controle, como:

$$T_{i+1/2,j} = \frac{k_{i+1/2,j} h_{2,j} \times 1}{h_{1,i+1/2}}; T_{i-1/2,j} = \frac{k_{i-1/2,j} h_{2,j} \times 1}{h_{1,i-1/2}}; T_{i,j+1/2} = \frac{k_{i,j+1/2} h_{1,j} \times 1}{h_{2,j+1/2}}; T_{i,j-1/2} = \frac{k_{i,j-1/2} h_{1,j} \times 1}{h_{2,j-1/2}} \quad (7)$$

Dessa forma, com  $Q_{ij} = q_{i,j} h_{1,i} h_{2,j}$ , podemos reescrever a Eq.(6), como:

$$-T_{i+1/2,j} (p_{i+1,j} - p_{i,j}) + T_{i-1/2,j} (p_{i,j} - p_{i-1,j}) - T_{i,j+1/2} (p_{i,j+1} - p_{i,j}) + T_{i,j-1/2} (p_{i,j} - p_{i,j-1}) = Q_{ij}. \quad (8)$$

Aplicando a Eq.(8) para todos os volumes controle da malha computacional que discretiza o domínio  $\Omega$ , e com as condições de contorno adequadas, de modo geral, chegaremos a um sistema de equações que pode ser representado na seguinte notação matricial:

$$\underline{\underline{T}}P = \underline{\underline{Q}}. \quad (9)$$

Onde  $\underline{\underline{T}}$  é matriz com os termos de transmissibilidade,  $P$  é o vetor coluna das incógnitas de pressão em cada volume de controle e  $\underline{\underline{Q}}$  é o vetor coluna com as informações dos termos fonte/sumidouro, i.e., poços, além das condições de contorno.

Utilizando esta discretização como base, aplicaremos a formulação multiescala originalmente proposta por Møyner e Lie (2015), e descrita no presente trabalho, obtendo o campo de pressões. Em seguida, aplicaremos um processo iterativo distinto da formulação original para melhorar a acurácia do campo de pressões, e que chamaremos de I-MFBRs. Resolvida implicitamente a equação elíptica de pressão, podemos então obter o campo de velocidades (i.e., vazões) explicitamente, utilizando a Lei de Darcy. Finalmente, calculamos de forma explícita, o campo de saturações, utilizando o método de ponderação à montante de primeira ordem (First Order Upwind).

#### 4. DEFINIÇÃO DE MALHAS PARA O MFBRs

No MFBRs, estudado no presente trabalho, são definidas as seguintes malhas computacionais para que o método seja corretamente implementado:

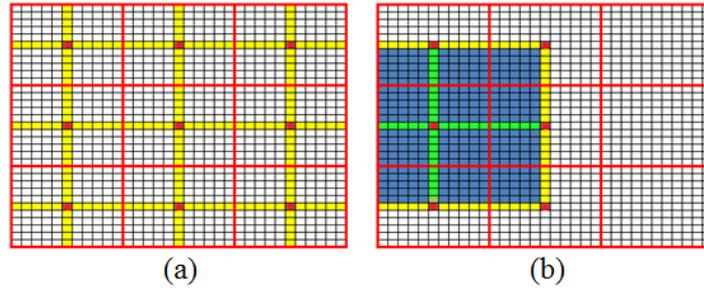
*Malha Fina Primal* ( $\Omega$ ): O domínio é discretizado espacialmente através de uma malha denominada fina. Na Figura 2, ela é representada por volumes de controle quadrilaterais definidos pelas linhas finas contínuas e pretas.

*Malha Grossa Primal* ( $\Omega_p^c$ ): É a malha criada a partir da malha fina primal, onde seus elementos são construídos aglomerando-se certa quantidade de elementos da malha fina original. Na Figura 2, a malha grossa primal é definida pelas linhas contínuas vermelhas.

Para cada volume pertencente à malha grossa primal ( $\Omega_{p,I}^c$ ) é definido um centro ( $x_I^c$ ) que pode, em muitos casos, coincidir com o centroide do referido elemento. Segundo Møyner e Lie (2015), a utilização da mediana geométrica das faces dos elementos da malha fina que rodeiam o elemento da malha grossa primal para determinação do seu centro fornece funções de base de melhor qualidade para elementos com grande variação de tamanho e forma. Observe que, para as malhas grossas estruturadas, as duas alternativas coincidem. Nesse trabalho, esses pontos de colocação foram deslocados para a fronteira do domínio  $\Omega$ , criando regiões de iterações maiores.

Além disso, para cada elemento da malha grossa primal, é necessário definir uma região de iteração. As regiões de iteração ( $\Omega_{IR}^c$ ) consistem em uma zona de suporte das funções de base. Elas são formadas pelo conjunto de índices dos elementos contidos na malha fina, onde:

$$\begin{cases} P_{op(i,I)} > 0, & \text{se } i \in \Omega_{IR,I}^c \\ P_{op(i,I)} = 0, & \text{se } i \notin \Omega_{IR,I}^c \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n_f; I = 1, \dots, n_c). \quad (10)$$



**Figura 2:** (a) Malha Fina ( $\Omega$ ) - linhas pretas, Malha Grossa Primal ( $\Omega_p^c$ ) - linhas vermelhas,  $U_{BR}$  - elementos em amarelo; (b)  $\Omega_{7R,4}^c$  e  $\partial\Omega_{7R,4}^c$  do elemento 4 de  $\Omega_p^c$ , elementos em verde são  $U_{BR} \cap \Omega_{7R,4}^c$ .

Cada região de iteração possui uma fronteira ( $\partial\Omega_{7R,I}^c$ ), representada em amarelo na Fig.2 (b), formada pelo conjunto de índices dos elementos da malha fina ao redor de uma região de iteração. Além disso, é definida uma fronteira global ( $U_{BR}$ ), formada pelo conjunto de índices dos elementos da malha fina que fazem parte da fronteira da região de iteração de um ou mais elementos da malha grossa primal, representada em amarelo na Fig.2(a). Note que, para a geometria da malha cartesiana, a fronteira global ( $U_{BR}$ ) se assemelha ao conjunto de células no contorno da malha grossa dual do clássico MsFVM (Shah et al., 2016).

## 5. FORMULAÇÃO ALGÉBRICA DO PROBLEMA MULTIESCALA

Nesta seção apresentamos a formulação matricial (algébrica) do método multiescala para a solução do problema elíptico da pressão com a definição adequada dos operadores de restrição e prolongamento utilizados no OBMM.

### 5.1 Operador de Restrição

O Operador de Restrição ( $R_{or}$ ) estabelece como é realizado o mapeamento da malha fina para a malha grossa e assume os valores expressos pela Eq.(11).

$$R_{or(I,i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega_i^f \subset \Omega_{p,I}^c \\ 0 & \text{se } \Omega_i^f \not\subset \Omega_{p,I}^c \end{cases} \quad (I=1,\dots,n_c; i=1,\dots,n_f). \quad (11)$$

### 5.2 Operador de Prolongamento

O Operador de Prolongamento ( $P_{op}$ ) funciona como um mapeamento do campo de pressões da malha grossa para a malha fina. No MFRSB, ele é construído por um processo iterativo (Møyner e Lie, 2015; Shah et al., 2016). Inicialmente definimos um valor constante para  $P_{op}$  dado pela Eq.(12). Note que poderíamos ter outro valor inicial de operador prolongamento, mas os operadores constantes são mais convenientes pela facilidade de construção. A partir do valor inicial, aplicamos a Eq.(13) em um processo iterativo para obtenção deste operador.

$$\tilde{P}_{op(i,I)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega_i^f \subset \Omega_{p,I}^c \\ 0 & \text{se } \Omega_i^f \not\subset \Omega_{p,I}^c \end{cases} \quad (i=1,\dots,n_f; I=1,\dots,n_c). \quad (12)$$

$$\tilde{P}_{op}^{z+1} = \tilde{P}_{op}^z - \omega \left( \tilde{T}_{wd}^D \right)^{-1} \tilde{T}_{wd}^f \tilde{P}_{op}^z. \quad (13)$$

Onde,  $\omega$  representa o fator de relaxação dado, tipicamente, por  $\omega=1/2$  ou  $\omega=2/3$ , e  $\tilde{T}_{wd}^D$  é a matriz diagonal proveniente de  $\tilde{T}_{wd}^f$  (matriz de transmissibilidade diagonalmente dominante (fracamente)).

Dessa forma,  $\tilde{P}_{op}$  é alterado, procurando fazê-lo “algebricamente suave”, reduzindo  $\left\| \tilde{T}_{wd}^f \tilde{P}_{op}^z \right\|_\infty$  até uma tolerância aceitável.

### 5.3 Problema geral

Podemos escrever a equação discreta da pressão, da forma matricial, para as malhas fina e grossa, respectivamente, pelas Eq.(14) e Eq.(15). Além disso, a definição de  $\tilde{P}_{op}$  nos permite escrever a Eq.(16), que será substituída na Eq.(14). Pré-multiplicando a equação resultante por  $\tilde{R}_{or}$  obteremos a Eq.(17). Comparando a Eq.(17) com a Eq.(15) e sabendo que  $\tilde{P}^{ms} = \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c$ , chegaremos a Eq.(18).

$$\tilde{T}^f \tilde{P}^f = \tilde{Q}^f, \quad \forall \tilde{P}^f \in \Omega^f. \quad (14)$$

$$\tilde{T}^c \tilde{P}^c = \tilde{Q}^c, \quad \forall \tilde{P}^c \in \Omega^c. \quad (15)$$

$$\tilde{P}^f = \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c \quad (16)$$

$$\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (17)$$

$$\tilde{P}^{ms} = \tilde{P}_{op} \left( \tilde{T}^c \right)^{-1} \tilde{Q}^c \equiv \tilde{P}_{op} \left[ \tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \right]^{-1} \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (18)$$

As condições de contorno reduzidas e o desacoplamento entre os problemas locais acarretam inconsistência da pressão nas regiões de fronteira, portanto, não é possível obter um campo de velocidade conservativo na malha fina, através da pressão calculada pela Eq.(18). Para contornar esse problema, calculamos novamente a pressão, em cada volume da malha grossa primal, utilizando condições de contorno de Dirichlet, em um procedimento iterativo, resolvendo-se um problema de Neumann no final do processo, a fim de recuperarmos conservação local para todos os volumes de controle da malha fina.

## 6. RESULTADOS

Neste exemplo, utilizamos a camada 35 da formação *Tabert* fornecida pelo *10th Comparative Solution Project* da SPE (Christie, 2001). Na Figura 3, apresentamos o campo de permeabilidade e a disposição de poços de injeção e produção (Fig. 3a e 3b). As condições de contorno são: fluxo nulo nas fronteiras externas do reservatório,  $\bar{p}_{inj} = 0$  e  $\bar{Q}_{prod} = 1$ . O domínio computacional foi discretizado por uma malha fina proveniente de um modelo geológico com 128x32 volumes de controle. Foram utilizadas 15 iterações tanto no I-MsFVM como no I-MFBR. Na Figura 4, apresentamos as curvas de óleo produzido e óleo acumulado e verificamos qualitativamente as excelentes soluções obtidas, tanto pelo I-MsFVM quanto pelo I-MFBR.

Nas Figuras 5a até 5f, apresentamos os resultados da solução referência e das soluções multiescala para os campos de pressão e saturação em  $t = 0,05$  VPI assumindo uma razão de engrossamento de  $Cr = n_f/n_c = 26,26$ . Os erros médios relativos com respeito à solução obtida diretamente na malha fina para as soluções dos campos de pressão e saturação foram, nesse instante, respectivamente,  $|E_{rel}^p| = 0,36\%$  e  $|E_{rel}^{s_w}| = 1,81\%$  no I-MFBR, e no I-MsFVM os erros foram de  $|E_{rel}^p| = 0,35\%$  e  $|E_{rel}^{s_w}| = 2,38\%$ . Lembramos que os erros no campo de saturações, que são calculados diretamente na malha fina, estão associados ao fato dos campos de velocidades serem obtidos a partir das pressões calculadas pelo método multiescala correspondente.

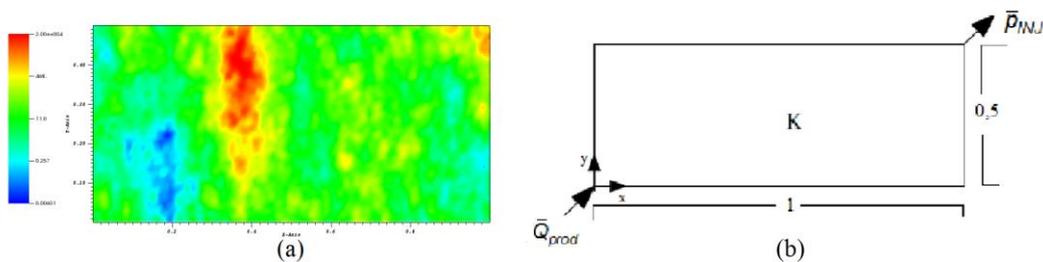


Figura 3: (a) Campo de Permeabilidade; (b) Condições de contorno;

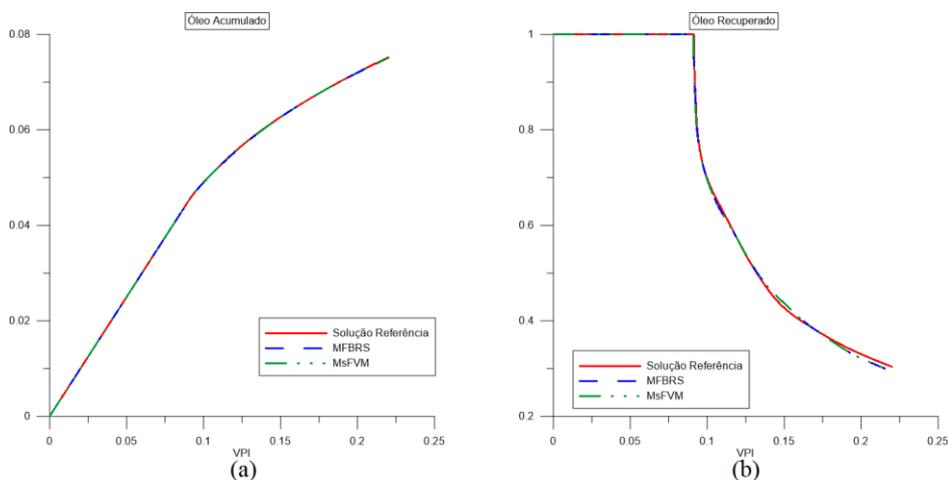


Figura 4: Curvas de óleo acumulado (a) e óleo recuperado (b) para a solução referência (linha vermelha), solução multiescala I-MsFVM (linha verde) e a solução multiescala I-MFBR (linha azul).

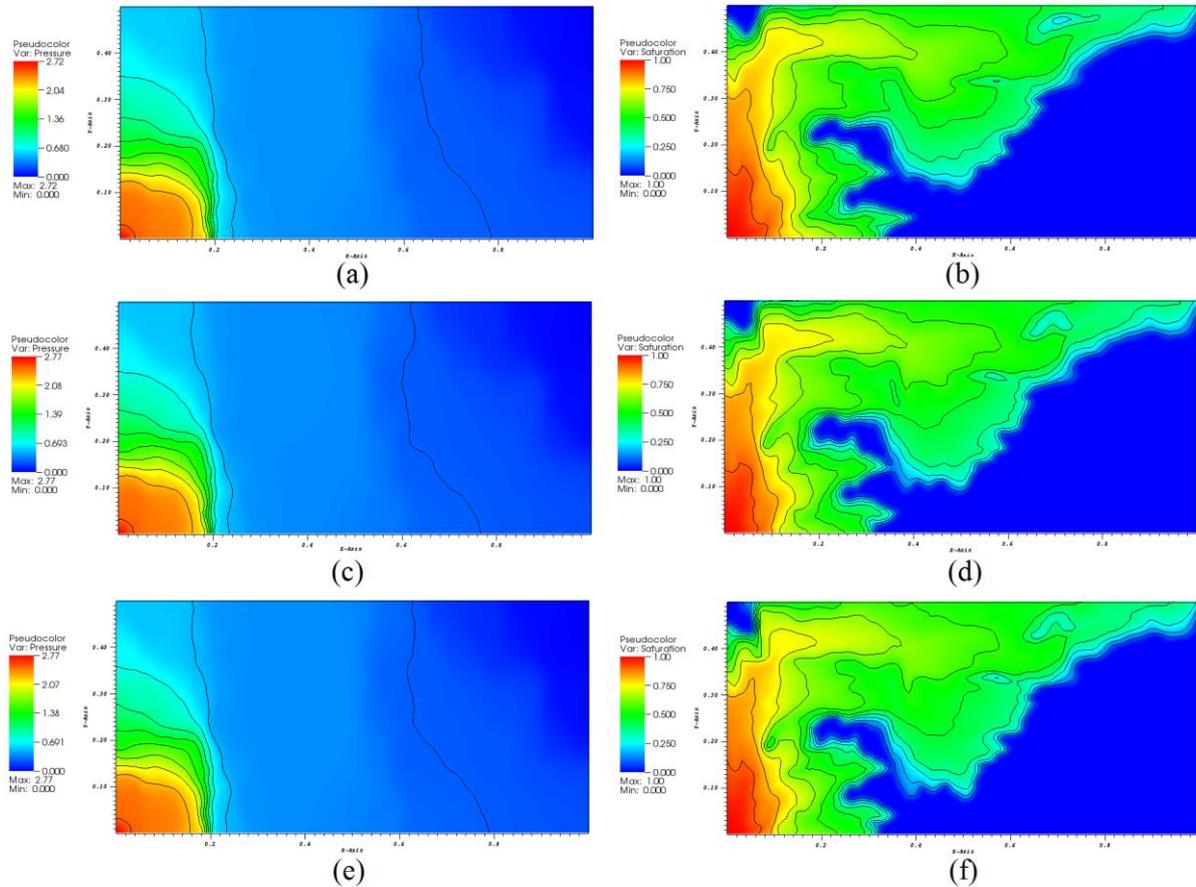


Figura 5: Campo de pressão e Campo de saturação em  $t = 0,05VPI$  para solução referência (a, b), solução I-MFBR (c,d) e solução I-MsFVM (e,f).

## 7. CONCLUSÕES

No presente trabalho, apresentamos uma descrição sucinta de uma variante iterativa do Método Multiescala Utilizando Funções de Base com Restrição Suavizada (I-MFBR). Com base no exemplo discutido e em outros não apresentados aqui, observamos que este método fornece soluções acuradas quando comparadas com o I-MsFVM clássico e a solução referência obtida diretamente na malha fina. No futuro próximo, pretendemos trabalhar no aprimoramento deste método, de modo que possamos aplicá-lo em malhas computacionais quaisquer (poligonais e não estruturadas) para a simulação do fluxo em reservatórios de petróleo muito heterogêneos e anisotrópicos obtendo soluções acuradas e a um custo computacional razoável.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Petrobras (via rede SIGER) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Christie, M., Blunt, M., 2001. Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, pp. 308–317.
- Hajibeygi, H., Bonfigli, G., Hesse, M. A., Jenny P., 2008. Iterative multiscale finite-volume method. *Journal of Computational Physics*, vol. 227, pp.8604–8621.
- Hou, T., Wu, X. H., 1997. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, vol.134, pp.169-189.
- Jenny, P, Lee, S. H., Tchelepi, H. A., 2003. Multiscale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *Journal of Computational Physics*, vol. 187, pp. 47-67.
- Jenny, P, Lee, S. H., Tchelepi, H. A., 2004. Adaptive multiscale finite volume method for multi-phase flow and transport. *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 3, pp. 50-64.
- Jenny, P, Lee, S. H., Tchelepi, H. A., 2006. An adaptive fully implicit multi-scale finite-volume algorithm for multi-phase flow in porous media. *Journal of Computational Physics*, vol. 217, pp. 627-641.
- Lunati I., Tyagi, M., Lee, S.H., 2011. An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution. *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 1849–1864.
- Møyner, O., 2012. Multiscale Finite Volume Methods: extension to unstructured grids with applications in reservoir simulation. MSc dissertation, University of Science and Technology.
- Møyner, O., K.-A. Lie., 2015. A multiscale restriction-smoothed basis method for high contrast porous media represented on unstructured grid. *Journal of Computational Physics*, vol. 304, pp. 46-71.
- Shah, S., Møyner, O., M. Tene, K-A. Lie., H. Hajibeygi, 2016. The multiscale restriction smoothed basis method for fractured porous media (F-MsRSB). *Journal of Computational Physics*, vol. 318, pp. 1-22.
- Zhou, H., and Tchelepi, H. A., 2008. Operator-based multi-scale method for compressible flow. *The Society of Petroleum Engineers*, vol. 13, pp. 267-273.
- Zhou, H., 2010. Algebraic Multiscale Finite-Volume for reservoir simulation. Ph.D. Thesis, Stanford University.