

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## ESTUDO, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E COMPARAÇÃO ENTRE ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO TEMPORAL APLICADOS A SISTEMAS DISCRETOS

**Kim Rocha Gama**

**Ricardo Albuquerque Fernandes**

**Adeildo Soares Ramos Júnior**

kimrochaa@hotmail.com

ricardoaf@lccv.ufal.br

adramos@lccv.ufal.br

Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas

Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-970, Alagoas, Maceió, Brasil

**Resumo.** *Esse trabalho propõe o estudo, implementação computacional e comparação entre algoritmos de integração temporal aplicados a sistemas discretos. Na maioria dos problemas práticos de engenharia, a complexidade do fenômeno ou as condições de contorno envolvidas inviabilizam a determinação de soluções analíticas, e assim, métodos numéricos são utilizados para fornecer estimativas confiáveis para a solução do problema. No contexto de análises dinâmicas, pretende-se analisar como determinado problema se comporta ao longo do tempo quando submetido a solicitações externas, tendo como maior gargalo a discretização temporal do domínio. Sistemas massa-mola compostos são utilizados exclusivamente para a análise desse tipo de discretização. Através desses modelos, avalia-se a eficiência computacional da utilização dos métodos explícitos e implícitos de Newmark, representados, respectivamente, pelo método da Diferença Central e pela Regra do Trapézio. Avaliam-se também os métodos explícitos de Runge Kutta e o método Predictor Corrector, comparando os resultados das simulações aos das abordagens analítica adotadas. Modelos de vibração axial em barras são utilizados para investigar as influências da discretização temporal em conjunto com a discretização espacial do sistema. Exemplos numéricos são utilizados para ilustrar os resultados.*

**Palavras-chave:** *Integração temporal, sistemas discretos.*

## 1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas dinâmicos de Engenharia é representada por equações diferenciais ou condições de contorno complexas, de modo a exigir a utilização de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas. A discretização temporal do problema junto ao número de iterações necessárias para atingir erros aceitáveis é o grande gargalo no que diz respeito ao custo computacional envolvido em simulações desse tipo.

Em análises dinâmicas de estruturas e em estudos que envolvem propagação de onda, incluindo os problemas de natureza não-linear, a implementação de métodos de integração temporal é uma alternativa as análises modais (Cook et al., 1989). A ressonância, por exemplo, é um dos fenômenos que podem ser estudados utilizando a integração temporal como ferramenta para a simulação de vibrações em estruturas.

Em sistemas contínuos, a discretização espacial se faz necessária, uma vez que na modelagem de uma barra, por exemplo, a massa encontra-se distribuída ao longo do seu comprimento. Esse tipo de discretização aumenta o custo computacional dos métodos numéricos de integração temporal, cada um dos quais diante dos seus respectivos comportamentos.

O estudo da eficácia e da eficiência desses métodos possibilita a escolha do melhor algoritmo a ser implementado, levando à otimização da integração temporal do sistema e a uma maior confiabilidade nos resultados obtidos.

## 2 BACKGROUND TEÓRICO

Sistemas massa-mola são modelos estruturais básicos compostos por massas concentradas em nós que se interligam através de molas com parâmetros de rigidez definidos. Desconsiderando a massa da mola e que não há amortecimento no sistema, o comportamento mecânico de sistemas dessa natureza é dado, segundo Cook et al. (1989), por

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + K u = F_e, \quad (1)$$

onde  $M$  e  $K$  são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez que caracterizam o sistema em questão,  $u$  é o vetor de deslocamentos nodais do sistema e  $F_e$  é o vetor de forças externas nodais que solicitam o modelo.

Já em modelo de barras axiais engastadas, a massa não é concentrada nos nós, estando distribuída ao longo do comprimento. Com base no trabalho de Clough & Penzien (2003), assume-se que a massa está distribuída de forma constante. Dessa forma, a equação que governa o sistema é representada por

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $E$  e  $A$  são o módulo de elasticidade longitudinal e a área da seção transversal da barra, respectivamente. Uma das formas de se fazer a discretização espacial desse tipo de problema é dividir a barra em pequenos segmentos, onde a medida que se aumenta a sua quantidade, mais refinada é a representação geométrica do modelo.

Dentre os métodos de integração temporal, pode-se abordar técnicas como: diferenças centrais e regra do trapézio (por exemplo, Cook et al. (1989)), o Predictor Corrector (por exemplo, Gray et al. (2001)) e os propostos por Runge & Kutta (por exemplo, Press et al. (1988)).

Os métodos da diferenças centrais e regra do trapézio, ambos de segunda ordem fazem parte dos métodos de Newmark, que para sistemas não-amortecidos são derivados a partir da equação

$$\begin{aligned} (M + \beta \Delta t^2 K) u_{n+1} + \left( -2M + \left( \frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) \Delta t^2 K \right) u_n + \\ \left( M + \left( \frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) \Delta t^2 K \right) u_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Nesse contexto, segundo Zienkiewicz (1977), a depender das constantes  $\beta$  e  $\gamma$  que forem utilizadas, os métodos se modificam quanto a sua tipicidade, podendo ser implícitos (por exemplo, regra do trapézio) ou explícitos (por exemplo, diferenças centrais); bem como quanto a sua complexidade, onde métodos mais complexos costumam ser mais precisos. Já no método predictor corrector, a velocidade é reajustada com base nos valores do deslocamento do passo de integração corrente. Em Runge Kutta, a integração é realizada considerando instantes intermediários do incremento de tempo, quando considerados quatro desses instantes, por exemplo, chama-se Runge-Kutta de 4ª ordem.

### 3 METODOLOGIA

Com base para análise do sistema discreto, foram utilizados dois blocos ligados entre si a anteparos nas suas extremidades, através de molas (ver Figura 1).



Figura 1: Representação gráfica do sistema massa-mola utilizado.

Analisa-se o movimento dos elementos de massa igual a 1 kg durante 0,25 segundos. Inicialmente, aplica-se um deslocamento inicial de 0,1 m no bloco  $m_1$ . Todas as molas apresentam constante de rigidez igual a 750 N/m.

Nessa simulação, é possível analisar a eficiência computacional de cada um dos métodos, medindo o tempo de simulação e relacionando-o com a sua respectiva precisão. Assim, estabelece-se o tempo total para atingir determinados níveis de exatidão no contexto analisado, comparando os resultados com as suas respectivas soluções analíticas.

Para a avaliação da influência da discretização espacial na eficiência dos métodos, utiliza-se o modelo definido por uma barra com extremidades engastada e livre, de comprimento  $L$ , área de seção transversal  $A$  e módulo de elasticidade longitudinal  $E$ .

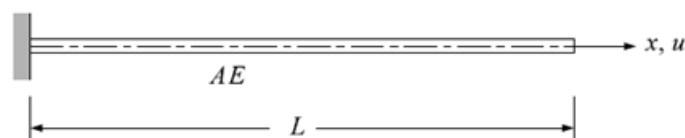


Figura 2: Representação gráfica do modelo de deslocamento axial utilizado.

Assumindo um comprimento de 1 m, analisa-se o modelo por um intervalo de tempo de 0,035 segundos, utilizando ainda um módulo de elasticidade de 1 MPa, área transversal de 1 m<sup>2</sup> e uma densidade de 1 kg/m<sup>3</sup>. Para a vibração da barra, foi utilizada um deslocamento inicial do nó livre de extremidade como função de seu comprimento, representado pela equação

$$u_0 = u_{\max} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \quad (4)$$

adotando  $u_{\max}$  como 1 m, define-se numericamente a condição inicial e se possibilita a obtenção de uma resposta analítica simples.

Com os resultados obtidos, avalia-se, nesse caso, a influência da discretização espacial no tempo computacional de cada um dos métodos de integração temporal.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Análise da discretização temporal em modelos discretos

Mensurado o tempo computacional demandado para se integrar um único incremento de tempo, observa-se que métodos mais complexos como o Runge Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, apresentam valores maiores do que métodos mais simples, como diferenças centrais, como é possível visualizar na Figura 3.

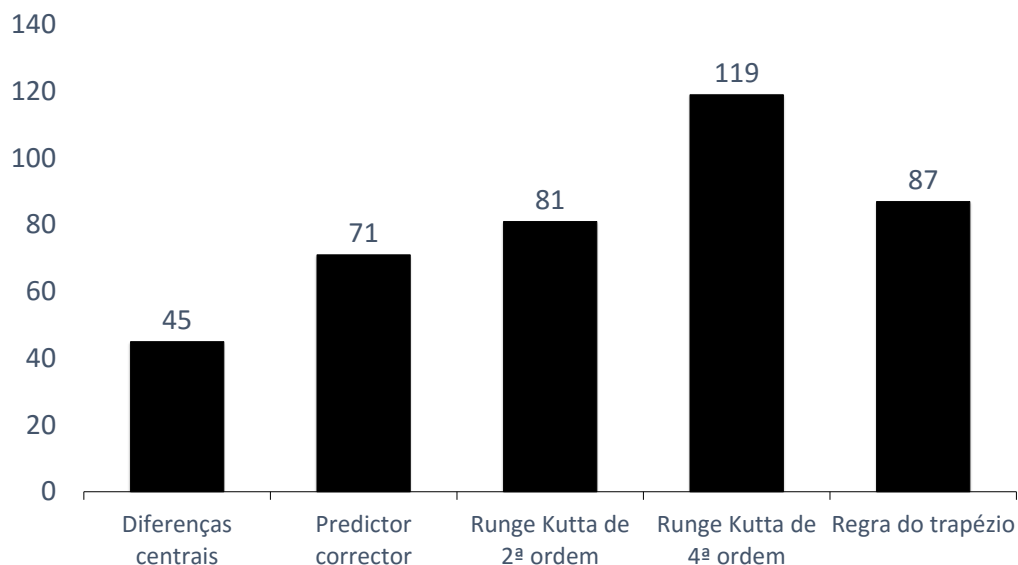


Figura 3: Tempo computacional medido para a integração de um passo [μs].

Por outro lado, o método das diferenças centrais demanda a utilização de incrementos de tempo menores para que se consiga obter resultados com precisão satisfatória.

Para analisar essa demanda, interpola-se os erros absolutos médios provenientes dos métodos à uma curva polinomial de sexto grau, em função do número de amostras, dada por

$$\epsilon(\Delta t) = a_6\Delta t^6 + a_5\Delta t^5 + a_4\Delta t^4 + a_3\Delta t^3 + a_2\Delta t^2 + a_1\Delta t + a_0 \tag{5}$$

possibilitando a geração do gráfico de desvio da solução analítica a medida em que se refina o domínio temporal.

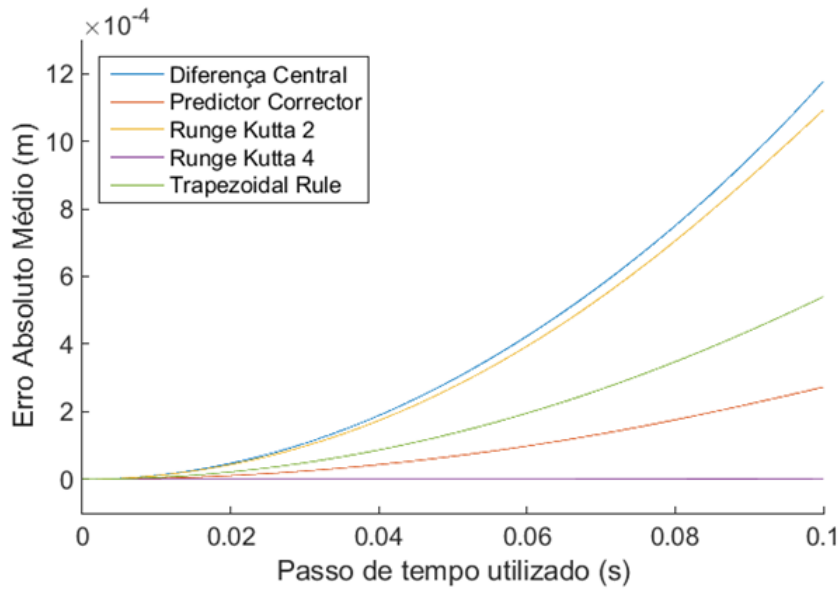


Figura 4: Relação entre erro e intervalo de tempo utilizado.

Associando os dois tipos de análise, é possível determinar o tempo computacional total necessário para cada um dos métodos atingir um determinado nível de exatidão previamente estabelecido, que pode ser visualizado na Figura 5.

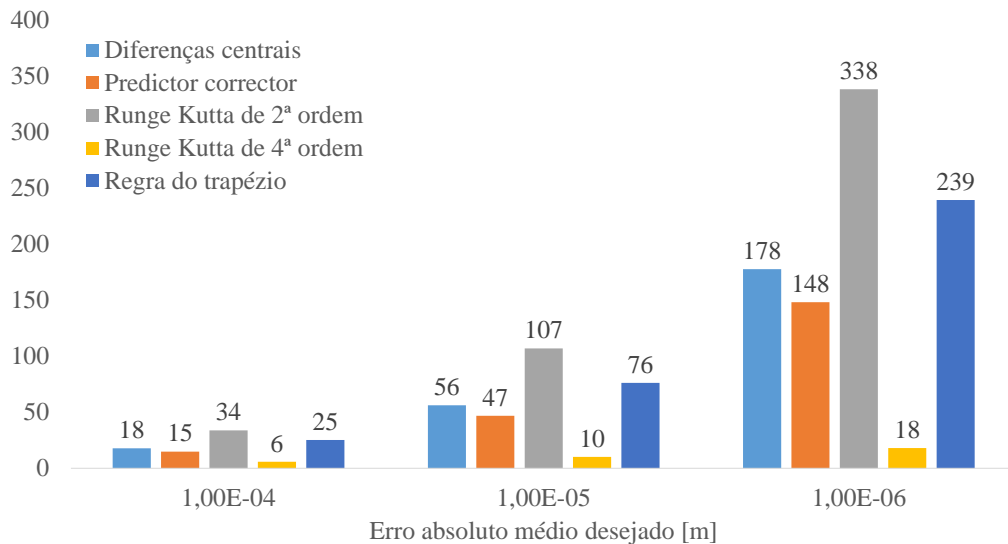


Figura 5: Tempo computacional total necessário [ms].

## 4.2 Influência da discretização espacial nos métodos de integração.

À medida em que se refina o domínio espacial, ou seja, aumenta-se o número de divisões do comprimento da barra, o tempo computacional da integração de um passo é influenciado. Essa influência pode ser observada na Figura 6 para os métodos: diferenças centrais, regra do trapézio e Runge Kutta de 4ª ordem.

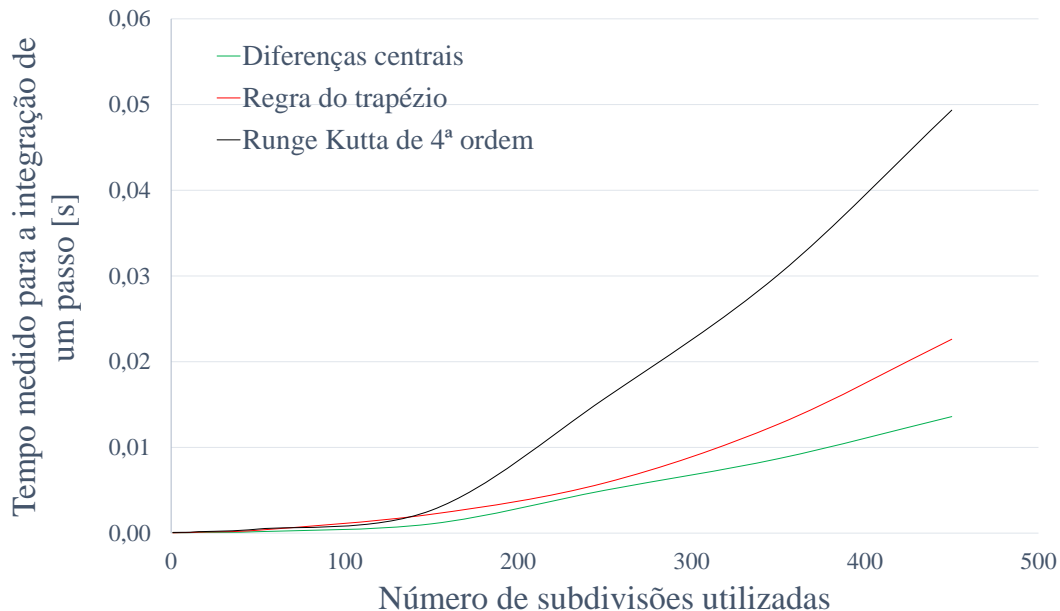


Figura 6: Influência da discretização temporal no custo de cada método.

## 5 CONCLUSÕES

Atavés dos resultados apresentados, podemos inferir que o método Runge Kutta de 4ª ordem apresenta-se como o método com maior nível de exatidão. Até para intervalos de tempo maiores, como 50% do passo de tempo crítico, ele atinge erros da ordem de 1 mm, entretanto, o seu tempo de simulação é quase três vezes maior quando comparado com o método das diferenças centrais, entretanto, mesmo com essa desvantagem, o método se apresentou como o mais eficiente.

Porém, de acordo com Cook et al. (1989), alguns métodos implícitos, em sistemas não amortecidos, têm em suas características a convergência ilimitada, portanto, em simulações com fração de  $\Delta t$  crítico acima de 1% e tempo de simulação elevado, é indicada a utilização da regra do trapézio, uma vez que esse método retorna desvios da ordem semelhante aos do método das diferenças centrais e dispensa preocupações com critérios de convergência.

Em relação à discretização espacial do modelo, observa-se que o método das diferenças centrais apresenta-se como o menos influenciável, isto é, diante de sua simplicidade, o seu custo computacional aumenta menos do que o de Runge-Kutta de 4ª ordem. Essa avaliação leva a crer que para sistemas extensos que necessitam de grande refinamento, utilizar métodos mais complexos pode levar a um custo computacional desnecessário.

## REFERÊNCIAS

- Clough, R. & Penzien, J., 2003. *Dynamics of Structures*. Computers and Structures, Incorporated.
- Cook, R., Malkus, D., & Plesha, M., 1989. *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley.
- Gray, J., Monaghan, J., & Swift, R., 2001. Sph elastic dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 190, n. 49, pp. 6641–6662.
- Press, W. H., Teukolsky, S., Vetterling, W., & Flannery, B., 1988. Numerical recipes in c. *Cambridge University Press*, vol. 1, pp. 3.
- Zienkiewicz, O. C., 1977. A new look at the newmark, houbolt and other time stepping formulas. a weighted residual approach. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 5, n. 4, pp. 413–418.