



DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA DE ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Wallison J. da S. Venancio

Francisco P. A. Almeida

wallison.pci@hotmail.com

patrick@lccv.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Centro de Tecnologia – CTEC

Laboratório de Computação Científica e Visualização - LCCV

Av. Lourival Melo Mota, S/N, Tabuleiro dos Martins, 57072-970

Resumo. A solução analítica de alguns problemas físicos é restrita a problemas com condições de contorno específicas. No entanto, existem diversos métodos numéricos que possibilitam a resolução. A precisão dos resultados depende, além do método escolhido, do modelo matemático adotado, pois as simplificações utilizadas irão influenciar diretamente a precisão. Um método que vem sendo bastante utilizado e que é apresentado neste trabalho é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Seu princípio básico é transformar as equações diferenciais que são válidas para todo o domínio do problema em equações integrais sobre o contorno. Quanto maior for a discretização, maior será a precisão dos resultados. Apresenta-se aqui a formulação bidimensional do método e os resultados obtidos em um programa de análise da condução de calor governada pela Equação de Laplace através da discretização em elementos constantes desenvolvido pelos autores. Essa equação, no entanto, governa diversos problemas físicos, os chamados problemas potenciais. Apresenta-se também um pré-processador no qual o usuário cria a forma geométrica a ser analisada de forma bem interativa e discretiza-a. Tal ferramenta permite gerar um arquivo de texto com todos os dados necessários para o programa de análise. Tanto o pré-processador quanto o programa de análise foram desenvolvidos no MATLAB.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno, Equação de Laplace, Condução de calor, Problemas potenciais, Matlab.

1 INTRODUÇÃO

Ao transformar um problema físico em um matemático, diversas simplificações são feitas. Ainda assim, muitos problemas não possuem uma solução analítica. No entanto, na busca de solucionar os mais variados tipos de problemas e aproveitando a grande capacidade de processamento dos computadores atuais, programas computacionais cada vez mais sofisticados são desenvolvidos para encontrar soluções numéricas com alta precisão. A eficiência e precisão dos resultados dependem do modelo matemático adotado, bem como do método utilizado para a solução. Neste trabalho, apresenta-se o Método dos Elementos de Contorno, ou *Boundary Element Method (MEC)* como uma forte alternativa aos métodos de discretização de domínio, como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Ainda que o MEC seja um método recente, comparado ao MEF, ele é bem vantajoso por reduzir o gasto computacional sem perda de precisão. Seu objetivo é transformar as equações diferenciais aplicadas ao domínio em equações integrais sobre o contorno do problema. Encontra-se na literatura algumas formas para se chegar à formulação do MEC. No entanto, o presente trabalho utilizou as considerações de resíduos ponderados, que são técnicas de aproximação de soluções.

A aplicação do Método dos Elementos de Contorno requer que o contorno esteja discretizado em elementos que são definidos por funções que governam a variação da geometria e dos valores das variáveis envolvidas. Neste trabalho, apresenta-se a formulação do MEC para elementos constantes e lineares, mas a implementação do programa de análise da condução de calor só foi terminada para elementos constantes. Para cada um desses elementos é imposta uma lei de variação da variável de estado, sua derivada e geometria, que são representadas pelas chamadas funções de forma. No entanto, trata-se aqui de elementos isoparamétricos, ou seja, quando a lei de variação é a mesma para todos os parâmetros.

A Equação de Laplace governa diversos problemas físicos (Incropera, 2008), os chamados problemas potenciais. Ela possui grande aplicabilidade e governam problemas como: transferência de calor, condução elétrica, torção em barras prismáticas, percolação em meios porosos, magnetostática, eletrostática, dentre outros. Mudando somente o significado físico das variáveis envolvidas.

O programa de análise aqui apresentado foi desenvolvido através do MATLAB por ser uma linguagem relativamente simples e apresentada na graduação da instituição de ensino dos autores. Uma das vantagens encontradas foi a facilidade de calcular as integrais envolvidas, mesmo aquelas que possuem singularidades, já que o MATLAB possui funções para o cálculo de integrais já implementadas. Já em algumas linguagens computacionais seria preciso dedicar uma estrutura somente para analisar e resolver as singularidades.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho visa apresentar a metodologia utilizada para o desenvolvimento do programa de análise da condução de calor pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) e seus resultados. No entanto, para facilitar a aplicação das equações envolvidas, apresentam-se também as linhas gerais até chegar à formulação final do MEC.

A Equação de Laplace é obtida através de uma restrição na Equação de Poisson. A dedução é apresentada no trabalho com base no método dos resíduos ponderados. A ideia do método consiste em aproximar soluções considerando que o erro introduzido pelas equações

envolvidas são ponderados para todo o domínio, ou seja, em média ele é zero. A formulação do MEC, basicamente, consiste numa combinação do método e algumas integrações por partes visando reduzir a ordem da função de interesse.

A Equação de Poisson, representada pela Eq. (1), tem grande aplicabilidade na engenharia por governar diversos problemas físicos como, por exemplo, condução de calor, torção em barras prismáticas, condução elétrica, percolação em meios porosos, magnetostática, eletrostática, etc, são os chamados problemas potenciais. Sua forma bidimensional é apresentada em seguida.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \quad (1)$$

onde o termo b representa o termo não homogêneo da equação e u é a variável de estado. Caso b seja nulo, tem-se a Equação de Laplace.

Considerando um problema bidimensional onde Ω representa o domínio do problema; $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ o contorno; n o vetor normal ao contorno, as condições de contorno associadas ao problema podem ser divididas em essencial ou de Dirichlet, representada pela Eq. (2), na qual se refere diretamente à variável de estado (u) e em natural ou de Neumann, representada pela Eq. (3), associada às derivadas da variável.

$$u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3)$$

onde a barra acima do termo indica que o valor em questão é conhecido.

Após utilizar as técnicas do método dos resíduos ponderados, fazer as integrações necessárias e aplicar as condições de contorno na Equação de Poisson, chega-se a uma expressão matemática em que existem integrais de domínio. Tal fato contradiz a ideia principal do Método dos Elementos de Contorno (MEC), pois o método utiliza integrações ao longo do contorno. No entanto, com o uso de técnicas matemáticas especiais, os termos são calculados facilmente.

Utiliza-se, então, a função de Green (também chamada de solução fundamental) da equação em estudo, além da função Delta de Dirac. As soluções fundamentais são particulares para cada equação. Mas tanto para a Equação de Poisson quanto para a de Laplace elas são as apresentadas na Eq. (4).

$$u^* = -\frac{\ln(r)}{2\pi} \quad q^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4)$$

onde r é a distância entre o ponto de aplicação da carga pontual (ponto fonte) ao ponto influenciado (ponto campo), e $\partial r / \partial n$ é a projeção do raio em relação a normal.

A primeira equação resultante obtida na dedução da formulação do MEC é válida para todos os pontos do domínio. Consequentemente, pode-se calcular os valores potenciais internos desde que os valores incógnitos no contorno antes da aplicação da equação já sejam conhecidos. Para determinar os valores no contorno, no entanto, utiliza-se um artifício em que o ponto do contorno é aproximado como pertencente ao domínio através de um processo de limite. De forma que chega-se à Eq. (5) que é a formulação integral do Método dos Elementos de Contorno para a Equação de Poisson (Dória, 2005).

$$c_i u_i + \int_{\Omega} b u^* d\Omega + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (5)$$

onde u_i equivale à resposta do sistema a uma excitação impulsiva de amplitude unitária localizada no ponto i a uma distância r e c_i (conhecido como termo livre) depende da localização do ponto i . De forma que, para pontos do contorno, é dado pela Eq. (6).

$$c_i = \frac{\theta_{int}}{2\pi} \quad (6)$$

onde θ_{int} é o ângulo interno ao contorno medido entre as retas tangentes antes e depois do ponto, como mostra a Fig. 1. Para pontos externos ao contorno, $c_i = 0$. Já para pontos internos, $c_i = 1$.

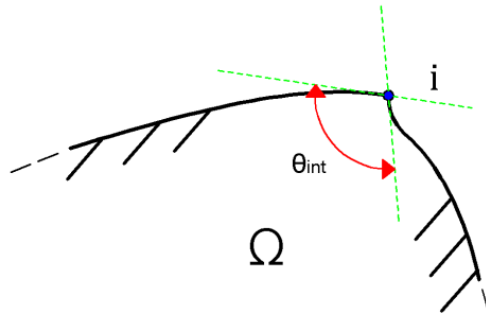


Figura 1. Ângulo interno ao contorno.

A equação do MEC para a Equação de Laplace é obtida se o termo que contem b na Eq. (5) for omitido. Logo, a equação integral do MEC para a Equação de Laplace é dada pela Eq. (7).

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (7)$$

A variação da variável de estado, suas derivadas e geometria são representadas pelas funções de forma (ϕ). Elas fazem uso de uma coordenada adimensional (ξ) que compreende o intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$ com origem no centro de cada elemento. No caso da função constante, ela será sempre igual a 1, independentemente da coordenada. Já para a função linear, tem-se as funções de forma representadas na Eq. (8).

$$\phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad \phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (8)$$

O objetivo tanto para o cálculo dos valores desconhecidos no contorno como para em pontos internos é montar um sistema de equações como o mostrado pela Eq. (9), obtido a partir da aplicação da Eq. (7) sobre todos os elementos em relação à cada ponto fonte.

$$H.u = G.q \quad (9)$$

Os vetores do sistema descrito pela Eq. (9) são de tal forma que possui valores conhecidos e desconhecidos. Para tornar esse sistema linear, troca-se os elementos dos vetores, passando todos os valores conhecidos para o vetor do lado direito (q) e todos os valores desconhecidos ficam no vetor do lado esquerdo (u). Além disso, trocam-se também as referentes colunas das matrizes, invertendo seu sinal. De tal forma que se obtém o sistema linear mostrado na Eq. (10).

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} & \dots & -G_{1N} \\ -G_{21} & H_{22} & \dots & -G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{N1} & H_{N2} & \dots & -G_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{np} \\ u_2^{np} \\ \dots \\ q_N^{np} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} & \dots & -H_{1N} \\ -H_{21} & G_{22} & \dots & -H_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -H_{N1} & G_{N2} & \dots & -H_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^p \\ q_2^p \\ \dots \\ u_N^p \end{Bmatrix} \quad (10)$$

onde N representa a quantidade de elementos, p indica que o valor é conhecido e np que o valor é desconhecido.

Após a solução desse sistema, obtêm-se os valores desconhecidos no contorno. De posse desses valores, pode aplicar novamente a Eq. (7) com $c_i=1$ e obter os valores em pontos internos. De tal forma que a equação que permite calcular o valor potencial em um ponto interno é a Eq. (11) (Aquino, 2007).

$$u = \sum_{j=1}^N q^j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma - \sum_{j=1}^N u^j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad (11)$$

onde q^j representa o fluxo e u^j representa a temperatura no elemento j , no caso de condução de calor, já conhecidos.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Um dos passos mais importantes para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno é a discretização. Quanto maior a quantidade de elementos, maior a representatividade da forma, como mostra a Fig. (2), e a precisão dos resultados. Por ser um método relativamente recente, existem poucas interfaces gráficas que permitam a interação com o usuário. Muitas vezes os programas são constituídos, basicamente, de uma janela de comandos em que o usuário já fornece todos os parâmetros para a análise.

Pensando nisso, os autores desenvolveram como trabalho de iniciação científica uma interface gráfica em linguagem *MATLAB* (Matlab, 2016), o PreBEM, para facilitar os procedimentos. Nele é possível criar formas de domínios bidimensionais e fazer a discretização em elementos constantes. A forma pode ser reta e/ou curva e pode ser criada a partir das coordenadas bidimensionais dos pontos que a definem ou através da seleção com *mouse* no eixo apropriado. Fornecendo, logo após, um arquivo em formato de texto que é utilizado no programa de análise. Um exemplo de discretização realizada no pré-processador é mostrado na Fig. 4.

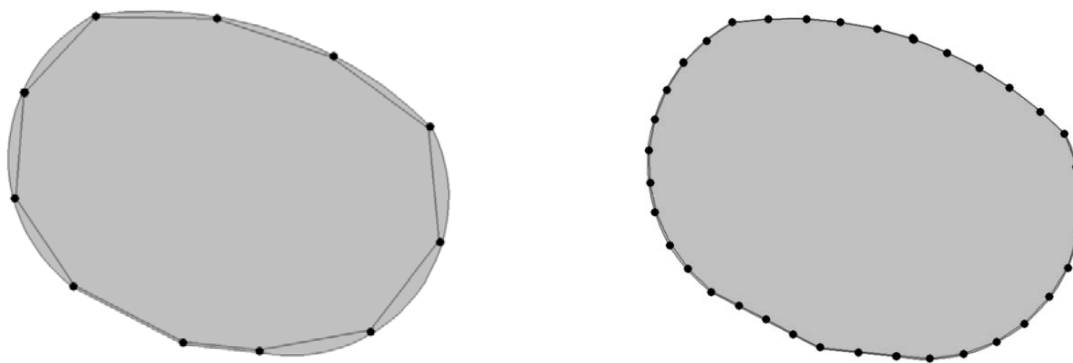


Figura 2. Influência da discretização na representação da geometria.

O sentido anti-horário da integração dos elementos representa que a parte analisada é o interior do domínio. Já o sentido horário, a parte externa. Isso é representado na Fig. 3.

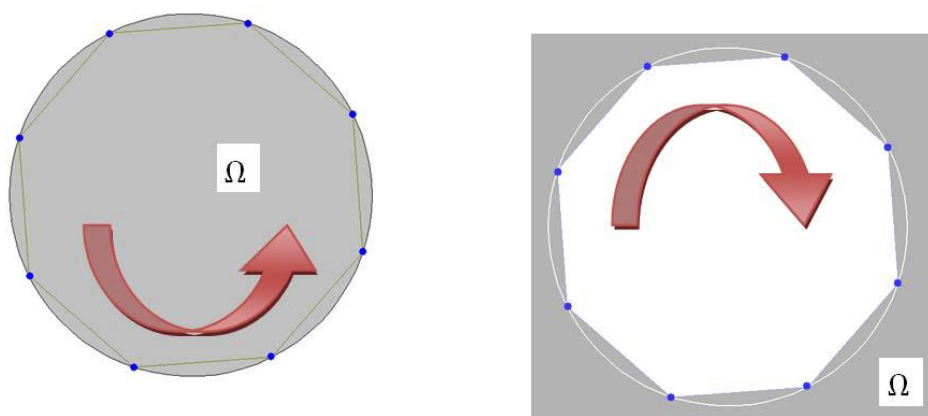


Figura 3. Sentido de integração.

A implementação do programa de análise em si é parte de outro trabalho de iniciação científica. A parte já implementada do programa permite obter os valores desconhecidos no contorno e valores de temperaturas em pontos internos utilizando elementos constantes. Mas com o estágio atual da pesquisa espera-se implementar as funções necessárias para que seja possível chegar à valores de fluxo em pontos internos, bem como adaptar o PreBEM para que seja possível fornecer os valores de temperatura e fluxo prescritos, por exemplo. Para que, assim, todos os dados necessários para a análise sejam reunidos no arquivo de texto.

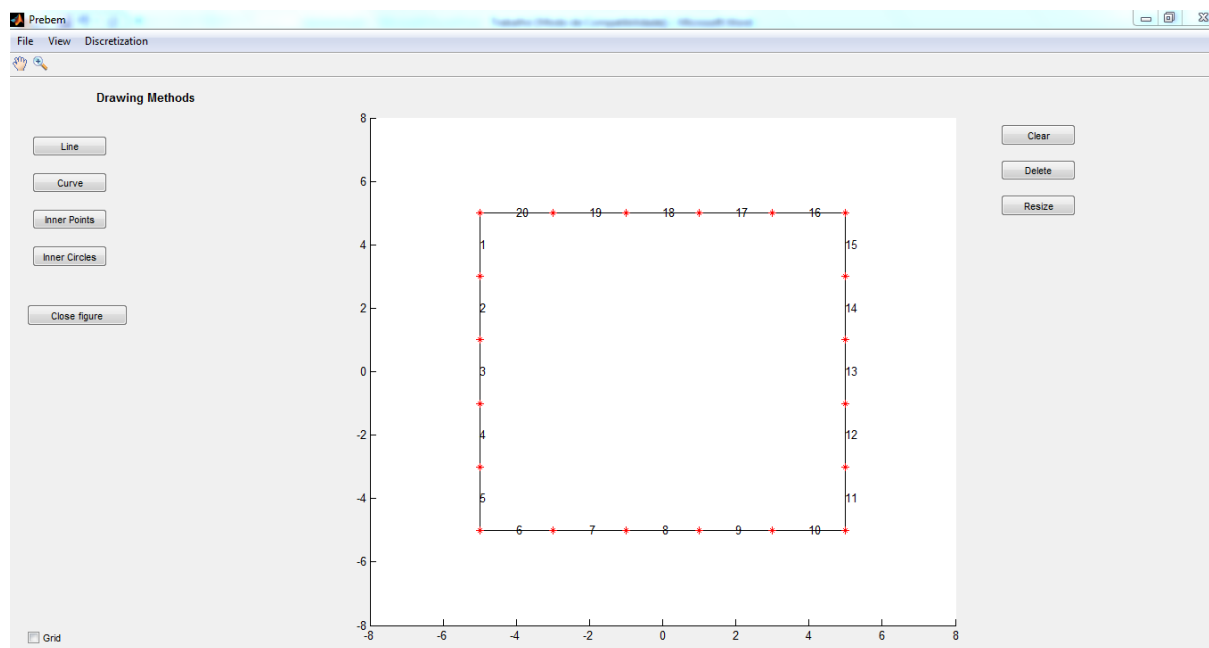


Figura 4. Discretização de chapa quadrada 10mx10m no PreBEM.

Para demonstrar o uso do programa desenvolvido utiliza-se um problema de condução de calor em uma chapa quadrada de dimensões 10m x 10m onde a temperatura é conhecida em dois lados e o fluxo é nulo nos outros dois. Utilizou-se a discretização em elementos constantes com cinco elementos em cada lado. Os valores obtidos no contorno são mostrados na Fig. 5.

A solução analítica para o problema apresentado é fácil de ser obtida e é representada pela Eq. (12).

$$T(x) = -8x + 100 \quad (12)$$

Na Fig. 6 são apresentados os valores obtidos em pontos internos, onde o valor inteiro representa a resposta analítica e o decimal representa a resposta obtida com a utilização do Método dos Elementos de Contorno da forma proposta. Observa-se que a margem de erro não ultrapassa $\pm 0,08 \%$ para os pontos analisados.

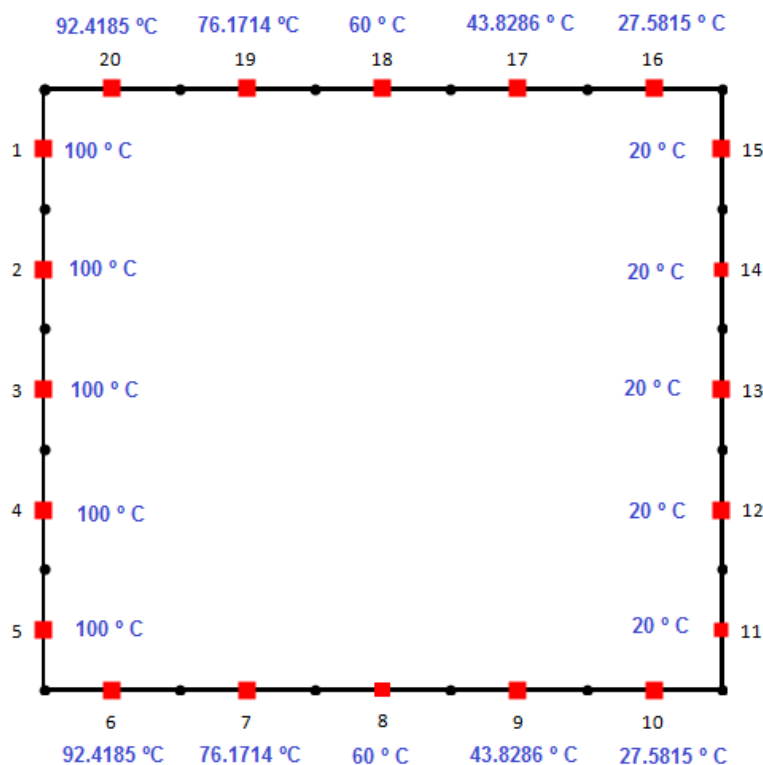


Figura 5. Resultados em pontos do contorno obtidos com elementos constantes.

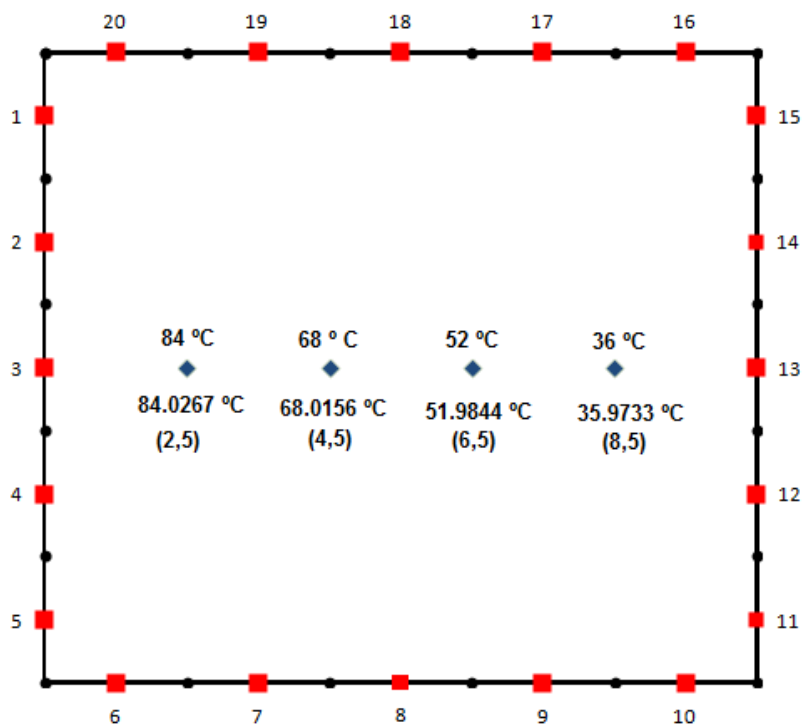


Figura 6. Resultados em pontos internos obtidos com elementos constantes.

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho visa à utilização do Método dos Elementos de Contorno (MEC) como uma forte alternativa aos métodos de discretização de domínio. Comparando a resposta analítica do problema tratado no trabalho com a resposta numérica obtida utilizando o método, percebe-se que a diferença é pequena e seria ainda menor caso o contorno fosse discretizado numa maior quantidade de elementos.

Aliado a isso, a utilização do pré-processador dos dados necessários para as análises, o PreBEM, vem facilitar a interação com o usuário, pois este já permite a criação de formas bidimensionais e sua discretização em elementos constantes. No entanto, espera-se que no final da pesquisa de iniciação científica em andamento o PreBEM também permita que o usuário forneça os dados prescritos do problema, por exemplo, temperatura e fluxo de calor.

5 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece à UFAL pela concessão de bolsa de iniciação científica por meio do edital PIBIC 2015-2016.

REFERÊNCIAS

Aquino, C. T. Transferência de calor em regime transiente utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Monografia de graduação para título de bacharel em Engenharia Civil – Universidade Federal de Alagoas. Maceió/AL, 2007;

Dória, A.S.. Abordagem de Problemas de Engenharia Através do Método dos Elementos de Contorno. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Maceió/AL, 2005;

Incropera, F. P. Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. Rio de Janeiro: LTC, 2008;

Matlab. Disponível em: <<http://www.mathworks.com>>. Acesso em: Jun. 2016.