



## Sizing process for 2D reinforced concrete structures based on the direct evaluation of stress tensors

**Marcus V. S. Souza**

bauem.mvss@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000, Minas Gerais, Ouro Preto, Brazil

**Francisco C. de Araujo**

dearaujofc@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000, Minas Gerais, Ouro Preto, Brazil

**Abstract.** *In this paper, a general strategy for sizing plane surface reinforced concrete structures is proposed, which takes into account the direct evaluation of stress tensors in a number of points of the framework structure. Thus, it has the advantage of being applicable also to size structural elements whose responses are not given in terms of stress resultants as e.g in 2D reinforced concrete walls or 3D solid elements. Particularly in this paper, we apply the technique proposed to size the shear reinforcement in 2D framework elements, while the bending reinforcement is calculated by the classical process for line concrete elements. Additionally, we present a computer-aided design platform that integrates the structural analysis and the sizing process. The code offers options of modeling 2D frames with complex cross-section geometries and varying rigidities along the axis of the elements.*

**Keywords:** *2D frameworks, reinforced concrete, stress-based design approach, elements with varying rigidity*

## 1 INTRODUÇÃO

Classicamente, o dimensionamento de elementos lineares (como vigas e pilares) em concreto armado tem sido realizado a partir do estabelecimento do equilíbrio entre os esforços solicitantes e esforços resistentes de cálculo, e esses processos têm sido difundidos em uma

vasta literatura técnica sobre concreto armado ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]–[11], [12], [13], e em normas técnicas [14], [15], [16], [17].

No caso porém de elementos estruturais planos do tipo vigas-parede, ao contrário de elementos lineares como vigas esbeltas, as respostas não são diretamente obtidas em termos de esforços solicitantes, como e.g. o momento fletor, e soluções em termos de tensores de tensões são diretamente obtidas via formulações para a análise de problemas bidimensionais de estado plano de tensão (EPT). Neste caso, faz-se, na verdade, necessário empregar métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (FEM) [18] ou o Método dos Elementos de Contorno (BEM) [19] na análise do problema, embora, em casos mais simples, as solicitações possam ser determinadas como em vigas esbeltas, e processos simplificados de dimensionamento possam ser adotados [11]. Todavia, será mais conveniente, nesses casos, adotar processos de dimensionamentos que considerem diretamente a resposta na estrutura em termos dos estados planos de tensão.

No que se refere especificamente ao dimensionamento de elementos lineares, tem-se verificado, ao longo de décadas e décadas de prática, que o processo de dimensionamento de armadura longitudinal à flexão fornece resultados que reproduzem satisfatoriamente bem os resultados experimentais, fato que não se verifica e.g. em relação ao cisalhamento. Neste caso, o intertravamento entre os grãos dos agregados e o ângulo varável das bielas comprimidas, entre outros, tornam o problema de análise de cisalhamento em vigas de concreto armado consideravelmente mais complexo. Neste particular, estratégias de análise baseadas na denominada teoria de campo de compressão (*compression field theory*) proposta por Vecchio e Collins [20] possibilitaram a reconstituição mais precisa de respostas em elementos de concreto armado sob cisalhamento.

Neste artigo, apresenta-se uma estratégia de dimensionamento de vigas de concreto armado ao cisalhamento que parte diretamente dos estados de tensão de cálculo determinados no plano médio de vigas esbeltas. Essa estratégia de dimensionamento se fundamentará na condição de que as tensões solicitantes de cálculo na estrutura não excedam a resistência dos materiais (análise limite baseada no teorema inferior da plasticidade) [21]. O estado plano de tensão nos pontos do elemento estrutural é determinado a partir da resposta do pórtico plano em termos de esforços solicitantes (momento fletor, normal e cortante), por sua vez obtida via Método da Rigidez Direta (DSM). O processo de dimensionamento permitirá a consideração de diferentes inclinações das bielas comprimidas. Comparações com as expressões clássicas de dimensionamento ao cisalhamento são apresentadas nas aplicações.

## 2 Método da Rigidez Direta

Para a resolução das estruturas reticuladas, destaca-se o Método da Rigidez Direta (*Direct Stiffness Method* – DSM), também chamado por Método dos Deslocamentos (DM). Esse método é muito conveniente para a implementação computacional, pois, para um dado número de elementos no modelo de análise, há um único sistema principal. Por isso, esse tipo de método ou formulação (baseada em deslocamento) é largamente empregado em diversos programas comerciais, como o TQS<sup>©</sup>, SAP2000<sup>©</sup>, Ansys<sup>©</sup>, dentre outros. Ele consiste no estabelecimento das equações de equilíbrio de cada nó do sistema em termos de seus deslocamentos (incógnitas do método). Na verdade, o DSM é a forma mais simples de implementação do Método dos Elementos Finitos (FEM), a partir do qual todo o método se desenvolveu.

---

### 3 O processo de dimensionamento

O processo de dimensionamento apresentado aqui fundamenta-se, na verdade, no teorema do limite inferior da análise limite (*lower bound limit analysis*), segundo o qual, a carga de colapso é determinada de modo que as tensões não excedam o limite de resistência dos materiais (concreto e aço), em qualquer ponto da estrutura. O processo baseia-se diretamente na determinação do estado de tensão,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , em uma certa quantidade de pontos da estrutura, em vez de considerar, como de forma convencional para estruturas reticuladas, as resultantes de tensão em seções dos elementos.

Em geral, os tipos de estados de solitação indicados abaixo, definidos com base nas tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2$  (com  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ) associadas ao tensor de tensões  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , serão possíveis:

- (a) Compressão pura, definida por  $\sigma_1 \leq 0, \sigma_2 \leq 0$ ,
- (b) Tração pura, definida por  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ ,
- (c) Estado de tensão misto (compressão-tração), definida por  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 \leq 0$ .

Em relação ao dimensionamento, as seguintes condições genéricas serão observadas:

- (i) Em caso de compressão pura, devem-se verificar as condições de ruptura no concreto, dadas por  $\sigma_{c1} \leq f_c, \sigma_{c2} \leq f_c$ , sendo  $\sigma_{ci}, i = 1, 2$ , as tensões principais no concreto e  $f_c$  o limite de resistência do concreto.
- (ii) As tensões de tração serão resistidas exclusivamente pelo aço, i.e., em estado misto de tensão ter-se-á  $\sigma_{c2} < \sigma_{c1} = 0$ , e em caso de tração pura,  $\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = 0$ .

#### 3.1 Expressões básicas para as tensões

As componentes de tensão  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , em termos das respectivas tensões principais,  $\sigma_1, \sigma_2$ , onde a direção do eixo  $x, \theta_x$ , é determinada pelo ângulo  $\varphi$ , medido a partir de  $x_{1p}$  ou  $x_{2p}$  no sentido horário (vide Figs. 1a e 1b), são dadas, respectivamente, por:

(i) Para  $x$  medido a partir de  $x_{1p}$  ( $\theta_x = -\varphi, \theta_y = -\varphi + \pi/2$ ):

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_n(-\varphi) = \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 \sin^2(\varphi) \\ \sigma_y = \sigma_n(-\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sigma_1 \sin^2(\varphi) + \sigma_2 \cos^2(\varphi) \\ \tau_{xy} = \tau_n(-\varphi) = +(\sigma_1 - \sigma_2) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (1)$$

(ii) Para  $x$  medido a partir de  $x_{2p}$  ( $\theta_x = -\varphi + \pi/2, \theta_y = \pi - \varphi$ )

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_n(-\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sigma_1 \sin^2(\varphi) + \sigma_2 \cos^2(\varphi) \\ \sigma_y = \sigma_n(\pi - \varphi) = \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 \sin^2(\varphi) \\ \tau_{xy} = \tau_n(-\varphi + \frac{\pi}{2}) = -(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{cases} \quad (2)$$

Note-se que  $\varphi > 0$  se no sentido horário (vide Fig. 1).

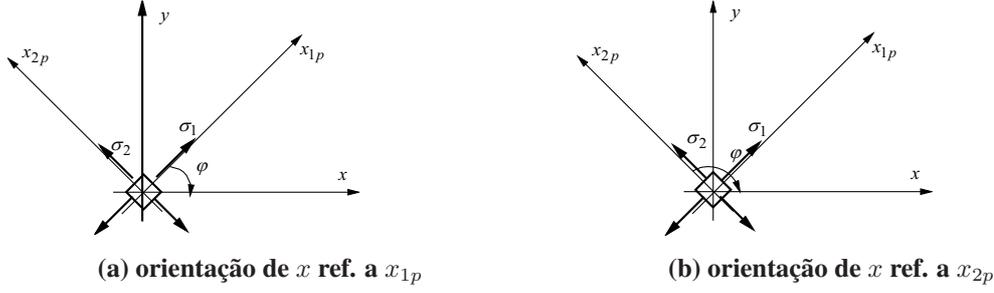


Figura 1: Sistemas de referência  $x, y$

### 3.2 Tensões no concreto e no aço

A partir das equações (2), vê-se que, em caso de estado misto de tensão, definido por  $\sigma_{c1} = 0$ ,  $\sigma_{c2} = \sigma_c$ , o estado de tensão em um ponto localizado no concreto será dado por

$$\begin{cases} \sigma_{c,x} = \sigma_c \cos^2(\varphi_c) \\ \sigma_{c,y} = \sigma_c \sin^2(\varphi_c) \\ \tau_{c,xy} = \sigma_c \sin(\varphi_c) \cos \varphi_c \end{cases}, \quad (3)$$

onde  $\varphi_c$  indica a direção do eixo  $x$  a partir de  $x_{2p}$  (direção da biela comprimida), sendo  $\sigma_c$  e  $\varphi_c$  incógnitas do processo de dimensionamento.

Por definição, o estado de tensão no aço é uniaxial e, assim, as tensões principais na armadura, na  $i$ -ésima direção, são dadas por  $\sigma_{s_{i1}} \neq 0$  (de tração ou compressão), e  $\sigma_{s_{i2}} = 0$ . Desse modo, adotaremos a notação  $\sigma_{s_i} = \sigma_{s_{i1}}$ , cuja direção (principal) será a direção da armadura,  $\varphi_{s_i}$  (vide Fig. 3b). Tem-se, então, para o aço, das relações (1), que o estado de tensão associado à armadura na direção  $i$ , em certo ponto da armadura, será dado por

$$\begin{cases} \sigma_{s_i,x} = \sigma_{s_i} \cos^2(\varphi_{s_i}) \\ \sigma_{s_i,y} = \sigma_{s_i} \sin^2(\varphi_{s_i}) \\ \tau_{s_i,xy} = \sigma_{s_i} \sin \varphi_{s_i} \cos \varphi_{s_i} \end{cases}, \quad i = 1, 2 \text{ (orientação da armadura)}. \quad (4)$$

Neste processo de dimensionamento, limita-se a 2 orientações de armadura por ponto (e.g.  $i = 1 = x$ ,  $i = 2 = y$ ), e  $\varphi_{s_i}$ ,  $\sigma_{s_i}$ ,  $i = 1, 2$  são incógnitas.

### 3.3 Elementos em concreto armado – equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio entre um estado de tensão solicitante de cálculo,  $(\sigma_{x_d}, \sigma_{y_d}, \tau_{xy_d})$  e as tensões resistentes dadas pelas equações (3) e (4) são então escritas, para um ponto qualquer do concreto armado, por (vide Fig. 2)

$$\begin{cases} \sigma_{x_d} = \sigma_{c,x} + \sum_{i=1}^2 \sigma_{s_i,x} \rho_{s_i} \\ \sigma_{y_d} = \sigma_{c,y} + \sum_{i=1}^2 \sigma_{s_i,y} \rho_{s_i} \\ \tau_{xy_d} = \sigma_{c,xy} + \sum_{i=1}^2 \tau_{s_i,xy} \rho_{s_i} \end{cases}, \quad (5)$$

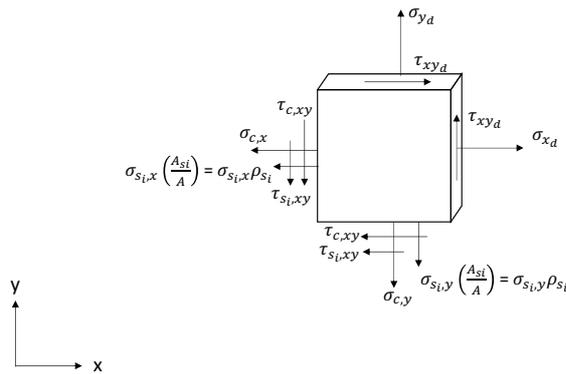


Figura 2: Tensões em um ponto de um elemento em concreto armado

em que  $\rho_{s_i} = A_{s_i}/A_i$  denota a taxa de armadura na direção  $i$ , onde  $A_i$  é a área de elemento em concreto armado, de 1m pela largura do elemento,  $b_w$ , perpendicular à direção  $i$  em que a armadura  $A_{s_i}$  é efetivamente distribuída, ou seja,  $\rho_{s_i}$  é a taxa de armadura por unidade de comprimento de elemento 2D de concreto armado de largura  $b_w$  (vide Figs. 3a,b).

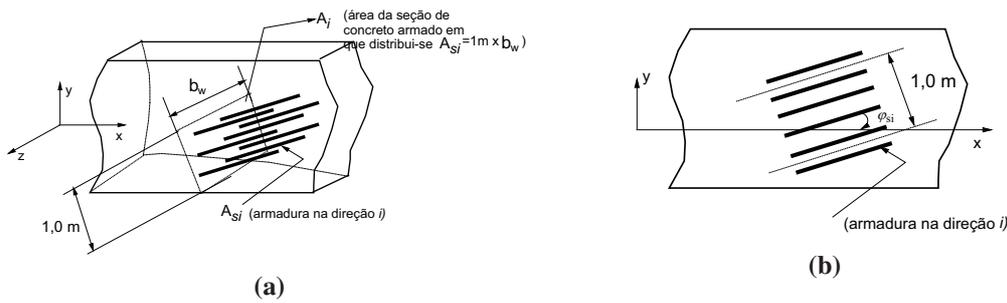


Figura 3: Taxa de armadura,  $\rho_{s_i}$  por largura  $b_w$  por  $m$

Levando-se em conta que as orientações das armaduras,  $\varphi_{s_1}$  e  $\varphi_{s_2}$ , são dados de projeto, há então, no processo de dimensionamento, 6 incógnitas a serem determinadas, quais sejam,  $\sigma_c, \varphi_c, \sigma_{s_1}, \sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, \rho_{s_1}, \rho_{s_2}$ , para as quais há 3 equações de equilíbrio, de modo que tem-se um sistema de equações indeterminado. Considerando porém as equações de compatibilidade cinemática de deformações, o sistema torna-se determinado e solução única será obtida [20]. De outro modo, pode-se usar uma estratégia baseada no teorema do limite inferior da análise limite (*lower bound limit analysis*, [21]) para determinar essas incógnitas de dimensionamento. Um caso especial, comum na prática de dimensionamento, é aquele definido por  $\varphi_{s_1} = 0$  (eixo  $x$ ),  $\varphi_{s_2} = \frac{\pi}{2}$  (eixo  $y$ ). Neste caso tem-se, adotando-se a notação  $\sigma_{s_1,x} = \sigma_{s_1} = \sigma_{s_x}$  (já que  $\sigma_{s_1,y} = 0$ ),  $\sigma_{s_2,y} = \sigma_{s_2} = \sigma_{s_y}$  (já que  $\sigma_{s_2,x} = 0$ ) e  $\rho_{s_1} = \rho_{s_x}, \rho_{s_2} = \rho_{s_y}$ , as relações:

$$\begin{cases} \rho_{s_x} \sigma_{s_x} = \sigma_{x_d} - \sigma_c \cos^2(\varphi_c) \\ \rho_{s_y} \sigma_{s_y} = \sigma_{y_d} - \sigma_c \sin^2(\varphi_c) \\ \sin(\varphi_c) \cos(\varphi_c) = \frac{\tau_{xy_d}}{\sigma_c} \end{cases} \quad (6)$$

sendo  $\sigma_c < 0$  a tensão principal algebricamente menor no concreto, e com incógnitas  $\rho_{s_x}, \rho_{s_y}, \sigma_{s_x}, \sigma_{s_y}, \sigma_c$  e  $\varphi_c$ .

### 3.4 Dimensionamento de vigas

Particularmente em vigas, tomando-se por base pontos do elemento estrutural entre os banzos inferior e superior, nos quais, por se tratar de elemento reticulado, o estado de tensão de projeto tem componentes  $\sigma_{x_d} \neq 0$ ,  $\tau_{xy_d} \neq 0$ ,  $\sigma_{y_d} = 0$ , e considera-se adicionalmente  $\rho_{s_2} = 0$ ,  $\varphi_{s_1} = \varphi_s \neq 0$  (inclinação dos estribos, conhecida, medida a partir do eixo  $x$  no sentido anti-horário),  $\rho_{s_1} = \rho_s$  e  $\sigma_{s_1} = \sigma_s$  (já que  $\rho_{s_2} = 0$ ,  $\sigma_{s_2} = 0$ ). E, considerando que  $\sigma_s = f_{y_d}$ ,  $\varphi_s$  (inclinação dos estribos) e  $\varphi_c$  sejam parâmetros de dimensionamento, então o sistema não-linear obtido por 5, para tensões normal e cisalhante solicitantes quaisquer, possui as seguintes soluções:

$$\rho_s f_{y_d} = - \frac{\tau_{xy_d}}{\sin^2 \varphi_s \cot \varphi_c - \sin \varphi_s \cos \varphi_s} \quad , \quad (7)$$

$$\sigma_c = \frac{\tau_{xy_d}}{\sin \varphi_c \cos \varphi_c - \cot \varphi_s \sin^2 \varphi_s} \quad . \quad (8)$$

De (7), considerando a inclinação das bielas comprimidas como  $\varphi_c = \frac{\pi}{4}$  (como classicamente considerado), tem-se:

$$\rho_s f_{y_d} = \frac{\tau_{xy}}{\sin^2(\varphi_s) \cdot 1 - \sin^2(\varphi_s) \cot(\varphi_s)} = \frac{\tau_{xy_d}}{\sin^2(\varphi_s)(1 - \cot(\varphi_s))} \quad , \quad (9)$$

e assim, com a eq. (9), calcula-se a taxa de armadura para uma dada inclinação dos estribos,  $\varphi_s$ .

Conforme a fórmula clássica convencional, segundo Mörsch, define-se a taxa volumétrica de armadura por [6]

$$\rho_{sw,\alpha} = \frac{\text{Vol. de aço}}{\text{Vol. de concreto}} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w h} \right) \left( \frac{h}{s \sin(\alpha)} \right) \quad ,$$

em que  $A_{sw}$  é a área de aço (i.e., da seção transversal da barra de aço para resistir à uma sollicitação de cortante  $V_d$ ),  $l$  é o comprimento do estribos,  $b_w$  é a largura da seção transversal,  $s$  é o espaçamento dos estribos,  $\alpha$  a inclinação da armadura transversal e  $h$  a altura da seção transversal, conforme o esquema da Fig. 4. Considerando uma seção retangular de área  $A = b_w h$ , e o concreto no estágio I (não fissurado), tem-se que:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \left( \frac{V_d}{b_w h} \right) = \frac{3}{2} \frac{V_d}{b_w \left( \frac{3}{2} z \right)} = \frac{V_d}{b_w z} \quad (10)$$

e, assim,

$$\rho_{s\alpha,max} = \frac{A_{sw}}{A_\alpha} = \frac{A_{sw}}{b_w s \sin(\alpha)} = \frac{\tau_{xy_d,max}}{f_{y_d} \sin^2(\varphi_s)(1 - \cot(\varphi_s))} \quad (11)$$

$$= \left( \frac{V_d}{b_w z} \right) \frac{1}{f_{y_d} \sin^2(\varphi_s)(1 - \cot(\varphi_s))} = \rho_{sw,\alpha} \quad , \quad (12)$$

que é equivalente à expressão para o cálculo da taxa de armadura aqui proposta [cf eq. (9)].

Assim, pela formulação acima, fornecendo-se  $\varphi_c$  como parâmetro de dimensionamento, como usual (e.g. na formulação de Mörsch adota-se  $\varphi_c = 45^\circ$ ), a taxa de armadura,  $\rho_s$ , será

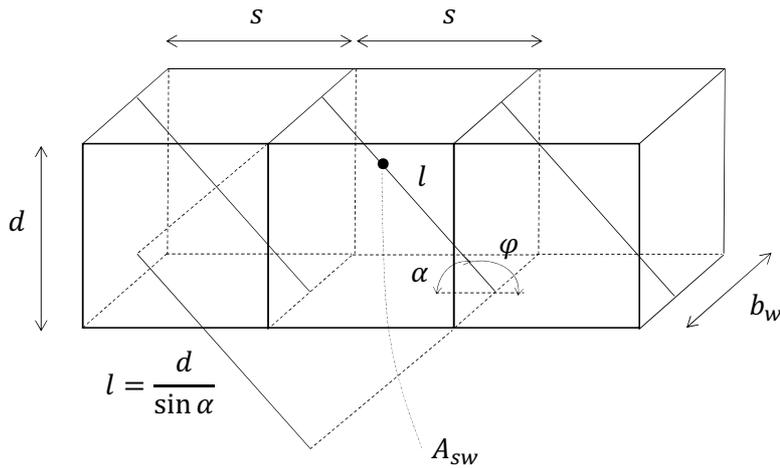


Figura 4: Área  $A_{sw}$  em um trecho de peça em concreto armado

determinada de (7) e a tensão de esmagamento no concreto,  $\sigma_c$ , da expressão (8). Note-se que os resultados obtidos com a formulação proposta para a tensão cisalhante máxima,  $\tau_{max}$ , de cada seção, degeneram-se para os respectivos resultados clássicos obtidos segundo Mörsh ou com outro  $\varphi_c$  qualquer. Por outro lado, a formulação ora apresentada não se limita à adoção de um valor  $\varphi_c$ , o qual poderá ser calculado com os valores de  $\sigma_{x_d}, \tau_{xy_d}$  e  $\varphi_s$  (conhecidos). A formulação é geral e se aplica a quaisquer problemas 2D, já que possibilita dimensionamento diretamente do estado de tensão.

#### 4 Aplicação

Seja o pórtico apresentado na Fig. 5, em concreto armado, com seção transversal retangular  $0,40m \times 0,60m$ , o qual deseja-se dimensionar. Com vistas ao dimensionamento, avaliam-se os tensores de tensão em 5 seções igualmente espaçadas por elemento, e em 10 pontos ao longo da seção transversal (vide Figs. 6 e 7). O pórtico é resolvido por meio do Método dos Deslocamentos e, em cada uma dessas seções, são calculados os esforços cortante, normal, e o momento fletor.

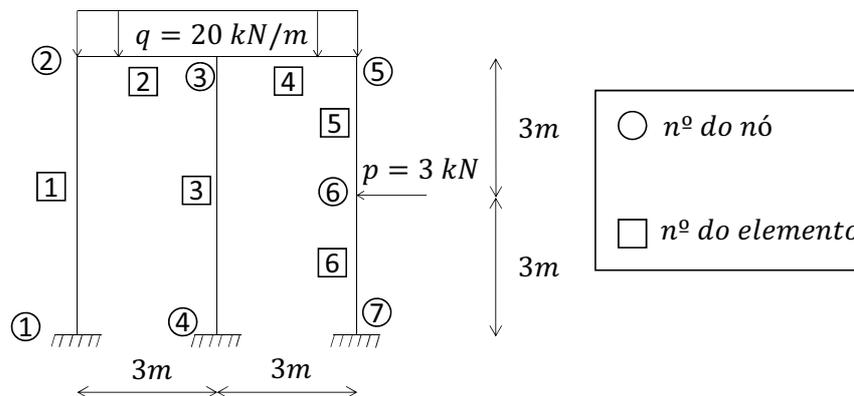


Figura 5: Aplicação – Pórtico



Figura 6: Posição das seções no elemento

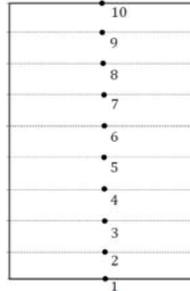


Figura 7: Posição dos pontos na seção

A resposta em termos de tensões cisalhantes é calculada para os elementos 2, 4, 5 e 6, e aplicando-se a formulação para o dimensionamento proposta anteriormente, considerando a inclinação das bielas comprimidas  $\varphi_c = 45^\circ$  e a inclinação dos estribos  $\varphi_s = 90^\circ$ , chega-se às áreas de aço, não mostradas aqui.

Esses resultados das áreas  $A_{sw}/s$  foram comparados aos obtidos usando uma formulação convencional, e como de se esperar, pela comparação analítica das expressões de dimensionamento feita acima, os resultados de  $A_{sw}/s$  obtidos, não apresentados aqui, em geral, majoram os obtidos via a presente estratégia, já que se igualam apenas para os valores de tensão cisalhante máxima,  $\tau_{max}$ , de cada seção.

## 5 Conclusões

Neste artigo, apresenta-se uma formulação para dimensionamento de elementos em concreto armado que baseia-se diretamente na resposta do problema em termos dos tensores de tensão na estrutura. A formulação mostra-se especialmente conveniente para o dimensionamento da armadura de cisalhamento, já que não se limita a adoção de valores pré-estabelecidos da inclinação das bielas comprimidas, embora na aplicação mostrada, valor de  $\varphi_c = 45^\circ$  tenha sido considerado. Os resultados apresentam excelente coincidência com os resultados calculados pela formulação clássica.

## Acknowledgments

Esta pesquisa foi financiada pelo Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) no âmbito do Programa de Iniciação Científica (PIBIC)/ Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), do qual participa o primeiro autor, e via bolsa de Produtividade em Pesquisa (PQ-1D), concedida ao segundo autor.

# Bibliografia

- [1] F. Leonhardt (1977). *Construções de concreto.*, Rio de Janeiro, 1977.
- [2] P. B. Fusco (1981). *Estruturas de concreto - solicitações normais.*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
- [3] P. B. Fusco (1995). *Técnica de armar as estruturas de concreto.*, Pini, São Paulo, 1995.
- [4] J. C. Suessekind (1979). *Curso de concreto.*, vol. 1, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1979.
- [5] J. C. Suessekind (1984). *Curso de concreto.*, vol. 2, Editora Globo, Rio de Janeiro, 1984.
- [6] R. C. Carvalho, J. R. de Figueiredo Filho (2009). *Cálculo e detalhamento de estruturas usais de concreto armado segundo a NBR6118:2013*, EdUFSCar - Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2009.
- [7] R. C. Carvalho, L. M. Pinheiro (2009). *Cálculo e detalhamento de estruturas usais de concreto armado.*, vol. 2, Pini, São Paulo, 2009.
- [8] J. M. Araújo (2014). *Curso de concreto armado.* vol. 1, Editora Dunas, 2014.
- [9] J. M. Araújo (2014). *Curso de concreto armado.* vol 2, Editora Dunas, 2014.
- [10] J. M. Araújo (2014). *Curso de concreto armado.* vol 3, Editora Dunas, 2014.
- [11] J. M. Araújo (2014). *Curso de concreto armado.* vol 4, Editora Dunas, 2014.
- [12] P. Bindseil (2000). *Massivbau.* Vieweg & Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 2000.
- [13] J. C. McCormac, R. H. Brown (2009). *Reinforced concrete.* 8th, edition, Wiley, 2009.
- [14] Associação Brasileira de Normas Técnicas, *NBR 6118:2014: projeto de estruturas de concreto - procedimento.*, Rio de Janeiro, 2014.
- [15] *Design of concrete structures, Part 1: general rules and rules for building*, Brussels, 2004.
- [16] CEB-FIP (2010). *Model code for concrete structures.* International Federation for Structural Concrete FIB, Lausanne, 2012.
- [17] American Concrete Institute (2008). *ACI-318-08: building code requirements for structural concrete.*, Detroit, 2008.
- [18] K. J. Bathe (2007). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.*, Prentice-Hall, 2007.
- [19] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel (1984). *Boundary Element Techniques.* Springer Verlag, 1984.

- [20] F. J. Vecchio, M. P. Collins (1986). *The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*. ACI Journal, v.83, n.22, p.219-231, 1986.
- [21] U. Haeussler–Combe (2015). *Computational methods for reinforced concrete structures*. Wiley, Berlin, 2015
- [22] W. Weaver, J. Gere, *Matrix Analysis of Framed Structures*, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, USA, 1965.