



## MÉTODO DE LATTICE-BOLTZMANN E MÉTODO DAS FRONTEIRAS IMERSAS PARA SIMULAÇÃO DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

**Mateus Teixeira Magalhães**

mateusteixeiramagalhaes@ice.ufjf.br

**Bernardo Martins Rocha**

bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br

Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, Minas Gerais, Brazil

**Abstract.** *A interação de fluidos com estruturas tem sido objeto de estudo em muitas pesquisas e é muito explorado na engenharia e nas ciências devido à sua grande aplicabilidade em projeto de pontes, aeronaves e outras estruturas, sendo feita experimentalmente ou através de simulação computacional. No entanto a simulação computacional deve ser feita com cuidado e apresenta grandes desafios para que se obtenha um custo computacional aceitável e uma boa aproximação numérica do problema a ser estudado. Um método que vem sendo cada vez mais usado para simulação de escoamento de fluidos incompressíveis, escoamento em meios porosos e outros problemas, é o método de lattice Boltzmann que, além de sua simplicidade de implementação, tem um bom desempenho computacional com o uso de paralelização. Outro método muito utilizado para simulação de interação fluido-estrutura é o método das fronteiras imersas que tem como ideia representar objetos (obstáculos) imersos na malha do fluido e interagindo com o mesmo. O objetivo desse trabalho foi implementar o método de lattice-Boltzmann para simulação computacional de fluidos acoplado com o método das fronteiras imersas para o tratamento da interação do fluido com a estrutura. Tendo como conclusão, além do fácil acoplamento dos métodos, uma boa alternativa para simulação de escoamento de fluidos ao redor de geometrias complexas.*

**Keywords:** *Método de lattice Boltzmann, Método das Fronteiras Imersas*

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE) são de grande importância para a engenharia devido a sua aplicabilidade no projeto de pontes, design de carros, projeto de aeronaves e outras aplicações. O problema envolve a mecânica dos fluidos e das estruturas no qual a solução de um domínio depende do outro, formando assim um sistema acoplado. Vários métodos foram propostos para abordar esse tipo de problema, dos quais o método das Fronteiras Imersas (IBM, do inglês *Immersed Boundary Method*) vem sendo cada muito citado na literatura desde que foi proposto por Peskin (1972). A ideia do método é representar objetos viscoelásticos em uma malha separada e imersa na malha do fluido, interagindo com o mesmo. Assim tem-se uma malha fixa, para representar o fluido de forma euleriana e uma malha cartesiana para representar a estrutura (ou obstáculo) de forma lagrangiana. O acoplamento do IBM ao método de lattice-Boltzmann é feito através de interpolações de forças e velocidades entre as duas malhas e, principalmente, incorporando um termo forçante na equação de lattice-Boltzmann, a qual representa a força que age no fluido devido à presença do obstáculo.

## 2 MÉTODOS

Nesta seção visa-se explicar o funcionamento do método de lattice Boltzmann e o método das fronteiras imersas, bem como o acoplamento dos dois métodos.

### 2.1 Método de Lattice Boltzmann

O método de lattice Boltzmann (MLB) é um método numérico usado para simulação de escoamento de fluidos na escala mesoscópica. Variáveis macroscópicas, como pressão e velocidade, podem ser recuperadas a partir de funções de distribuição de partículas do lattice-Boltzmann. Através do MLB problemas de escoamento de fluidos são resolvidos pela solução da equação de lattice-Boltzmann (ELB). O trabalho de He & Luo (1997) descreve como as equações de Navier-Stokes, que descrevem a dinâmica de fluidos em uma macroescala, são recuperadas a partir da equação de Lattice-Boltzmann utilizando análise multiescala de Chapman-Enskog. A ELB é discretizada no espaço em uma região na qual distribuições de partículas podem se deslocar com velocidade e direção bem definida. Para duas dimensões uma configuração do MLB muito usada e que também foi usada nesse trabalho é a d2q9, que possui duas dimensões e oito direções de deslocamento, conforme mostrado na Figura 1.

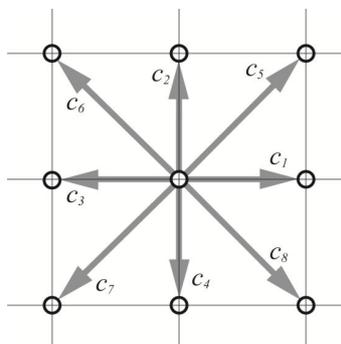


Figura 1: Lattice d2q9.

O método de lattice-Boltzmann, bem como suas aplicações e implementação de código, estão muito bem explicados no trabalho de Mohamad (2011). Nesse trabalho foi implementado uma simples forma do LBM com operador de colisão dado pela aproximação BGK (Bhatnagar et al., 1954). Pela aproximação BGK a equação de lattice-Boltzmann é dada por:

$$f_i(\mathbf{x} + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{feq}(\mathbf{x}, t) - f_i(\mathbf{x}, t)) + \Delta t F_i \quad (1)$$

onde  $f_i(\mathbf{x}, t)$  é a função de distribuição de partículas na direção de velocidade  $c_i$  (ver Figura 1),  $f_i^{feq}(\mathbf{x}, t)$  é a distribuição de equilíbrio,  $\tau$  é o tempo de relaxamento que controla a convergência da aproximação para o equilíbrio e  $F_i$  é o termo que incorpora as força de corpo agindo no escoamento, representado aqui seguindo o esquema proposto por Guo et al. (2002).

A distribuição de equilíbrio  $f_i^{feq}(\mathbf{x}, t)$  depende da densidade de partículas local  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e da velocidade macroscópica  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . A densidade local é calculada somando as distribuições de partículas  $f_i(\mathbf{x}, t)$  para as  $n$  direções de deslocamento do lattice:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

A velocidade no lattice é calculada pela soma das distribuições de partículas de acordo com sua contribuição nos sentidos de velocidade  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{c}_i. \quad (3)$$

A partir da equação 2 e 3, a distribuição de equilíbrio é dada por:

$$f_i^{(eq)}(\rho, \mathbf{v}) = w_i \rho \left[ 1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{v}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{v})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2c_s^2} \right], \quad (4)$$

onde  $w_i$  são os pesos associados a cada direção do lattice e  $c_s (= \frac{1}{\sqrt{3}})$  é a velocidade do som no lattice. Uma configuração de pesos muito usada para lattice d2q9, e que foi usada nesse trabalho é dada por:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4.0}{9.0} & \text{para } i=0 \\ \frac{1.0}{9.0} & \text{para } i=1...4 \\ \frac{1.0}{36.0} & \text{para } i=5...8. \end{cases} \quad (5)$$

A simulação no MLB ocorre em uma malha discreta formada por vários pontos (nós) nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  (para simulações em 3 dimensões) e passa por várias etapas que são: definição de condições iniciais, etapa de colisão, etapa de propagação, cálculo de variáveis macroscópicas e aplicação das condições de contorno. Na etapa de colisão a distribuição de equilíbrio é calculada em cada nó da malha pela equação 4 e é aplicada na solução da equação 1 para o cálculo das distribuição de partículas  $f_i(\mathbf{x}, t)$ , depois as distribuições de partículas são propagadas em cada direção do lattice na etapa de propagação. A Figura 2 ilustra a etapa de colisão e propagação do lattice-Boltzmann.

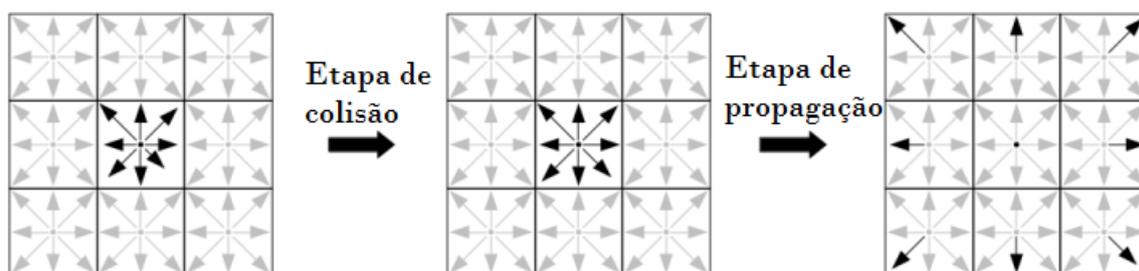


Figura 2: Etapa de colisão e propagação.

Na etapa de cálculo das variáveis macroscópicas, a velocidade  $v(\mathbf{x}, t)$  é determinada pela equação 3 e a densidade de partículas local  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , pela equação 2 e a etapa final tem-se a aplicação das condições de contorno. Essas etapas são repetidas durante a simulação para cada intervalo de tempo, até que o tempo desejado seja atingido.

## 2.2 Método das Fronteiras imersas

O método das fronteiras imersas é um método utilizado para simulação de interação fluido-estrutura em escoamento de fluidos onde objetos viscoelásticos incompressíveis são imersos na malha do fluido e interagem com o mesmo. Nesse caso são utilizadas duas malhas, uma malha cartesiana fixa para as variáveis que representa o fluido (visão euleriana) e outra malha móvel para o obstáculo (visão lagrangiana), como ilustra a Figura 3.

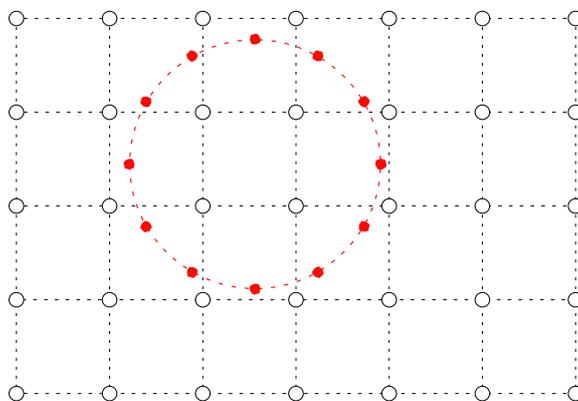


Figura 3: Pontos da malha do obstáculo(em vermelho) e pontos da malha do fluido(em branco).

Usualmente condições de contorno no LBM são feitas através da manipulação local das distribuições de partículas de tal forma que pressão e velocidade sejam obtidas conforme desejado. Outra possibilidade é usar o termo forçante  $F_i$  da equação de lattice-Boltzmann (1), para imitar condições de contorno, por exemplo, ao redor de um obstáculo. Quando um fluido escoar através de um obstáculo ele exerce uma força normal (pressão) ao obstáculo e exerce também uma força tangencial (arrasto). Por outro lado o obstáculo também exerce as mesmas forças, de sinal oposto, no fluido, fazendo com que a velocidade seja zero na superfície do obstáculo. Dessa forma as forças que agem no obstáculo são transmitidas para o fluido e inseridas na equação de lattice-Boltzmann como termo forçante, alterando assim as distribuições

de partículas e, conseqüentemente, a velocidade do fluido nas regiões próximas do obstáculo. Uma opção para a inserção do termo forçante na equação de lattice-Boltzmann, bem como as correções necessárias foram detalhadas no trabalho de Guo et al. (2002). A Figura 4 ilustra as forças que agem no obstáculo.

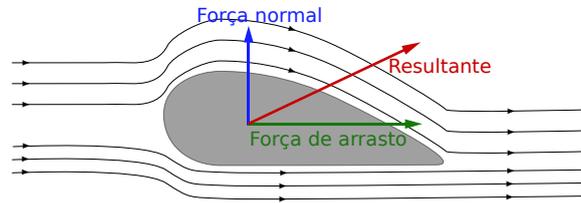


Figura 4: Forças agindo no obstáculo.

O primeiro ponto para o acoplamento do método de lattice-Boltzmann e o método das fronteiras imersas está na interpolação das forças e velocidade entre as duas malhas. Existem várias formas de fazer a interpolação usando uma área maior ou menor, dependendo do número de pontos a serem interpolados (Peskin, 1972). A Figura 5 ilustra a interpolação.

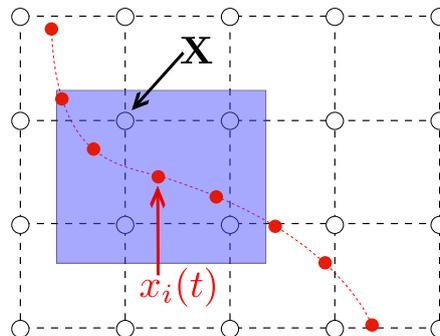


Figura 5: Interpolação entre nós da malha fluido ( $\mathbf{X}$ ) e nós da malha do obstáculo ( $x_i$ )

O cálculo da força agindo nos nós do obstáculo é baseado em uma lei constitutiva que estabelece a interação fluido-estrutura em função da deformação do obstáculo e de suas propriedades materiais. Para representar obstáculos rígidos essa lei constitutiva pode ser simplificada de modo a punir o deslocamento de um nó do obstáculo através de uma constante, fazendo com que o deslocamento de nós do obstáculo seja o mínimo possível. Assim a força que age em cada nó do obstáculo ( $\mathbf{F}_i$ ), para obstáculo rígido, é dada por:

$$\mathbf{F}_i(t+1) = -k(x_i(t) - x_i^{ref}(t)), \quad (6)$$

onde  $x_i^{ref}(t)$  é a posição inicial dos nós do obstáculo e  $x_i(t)$  é a posição atual.

A força  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  que age nos nós do fluido é transmitida através da interpolação das malhas e calculada pelo somatório do produto da força que age em cada nó do obstáculo. Essa força entra na equação de lattice-Boltzmann como termo forçante e é a principal conexão entre o fluido e a estrutura, sendo que a interação do obstáculo com o fluido é feita através dela. A expressão para o cálculo da força que age nos nós do fluido é dada por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{F}_i(t) \Delta(x_i(t) - \mathbf{X}). \quad (7)$$

A função  $\Delta$  é definida como  $\Delta(\mathbf{r}) = \phi(x)\phi(y)\phi(z)$ , com  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , contribui para a força em cada direção e é chamada de núcleo de interpolação. Tal função depende da distância ( $r$ ) entre os nós do fluido e do obstáculo. Para uma interpolação local, no qual cada nó do obstáculo é interpolado usando os 4 nós vizinhos do fluido, a função  $\Delta$  é construída usando:

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 - |r| & \text{para } 0 \leq |r| \leq 1, \\ 0 & \text{para } 1 \leq |r|. \end{cases} \quad (8)$$

A velocidade do fluido deve ser então recalculada, levando em consideração o termo forçante e transmitida para os nós do obstáculo através da interpolação das malhas. A velocidade dos nós do obstáculo, a partir da interpolação dos nós do fluido ( $i$ ) é calculada por:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t+1) = \sum_i \mathbf{u}(\mathbf{x}, t+1) \Delta(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}), \quad (9)$$

em que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t+1)$  é a velocidade dos nós do fluido interpolados. A etapa final é atualizar a posição dos nós do obstáculo por  $\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \dot{\mathbf{x}}_i(t+1)$  com base na velocidade calculada e considerando que  $\Delta x = 1$  no MLB. O algoritmo do método das fronteiras imersas passa por varias etapas em cada intervalo de tempo, podendo ser ilustrado de forma resumida da seguinte forma:

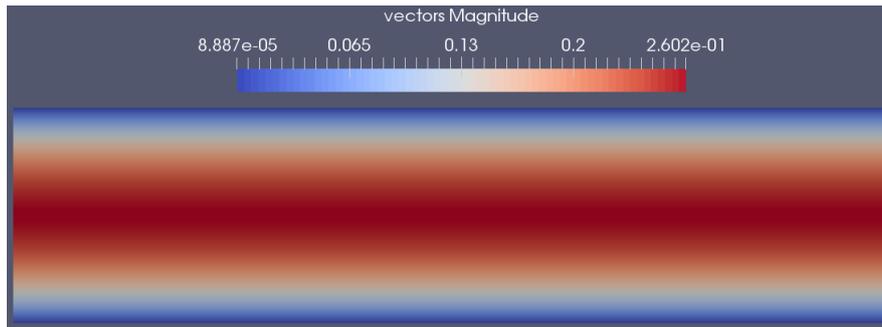
1. Cálculo das forças que agem nos nós do obstáculos, equação (6).
2. Cálculo das forças que agem nos nós do fluido, equação (7).
3. Transmissão das forças que agem no fluido para a equação (1).
4. Cálculo da velocidade dos nós do fluido, equação (3).
5. Cálculo da velocidade dos nós do obstáculo, equação (9).
6. Atualização da posição dos nós do obstáculo.
- 7 Voltar para etapa 1.

### 3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

As simulações computacionais foram realizadas utilizando uma implementação própria, na linguagem de programação C++, a qual foi desenvolvida estendendo a implementação anterior do trabalho de Campos et al. (2016) para incluir o acoplamento do método das fronteiras imersas. O primeiro experimento simulado foi o escoamento de Poiseuille e o segundo experimento a situação de um escoamento com interação com um obstáculo.

#### 3.1 Escoamento de Poiseuille

O escoamento de Poiseuille é um escoamento em regime estacionário de um fluido dentro de um tubo. A velocidade no centro do tubo é máxima e vai diminuindo ao se afastar do centro até atingir velocidade zero na parede do tubo, formando um perfil parabólico. A Figura 6 mostra



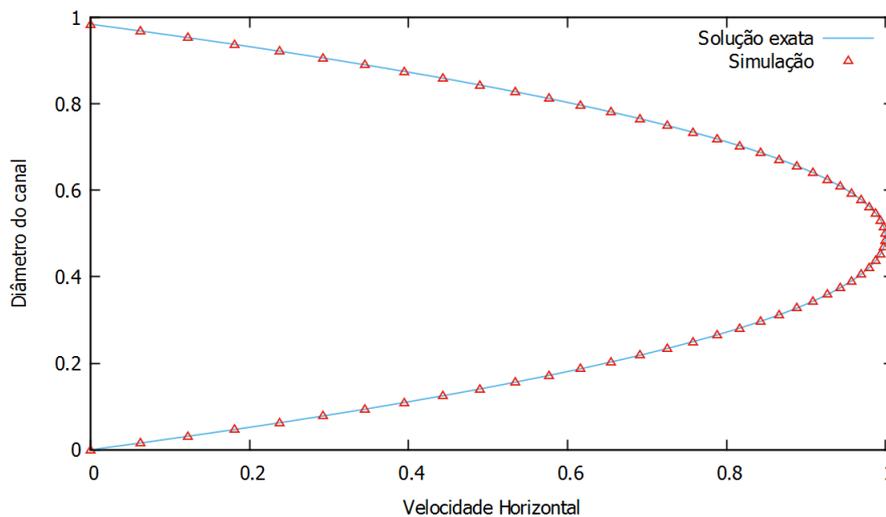
**Figura 6: Escoamento de Poiseuille.**

a simulação realizada com número de Reynolds igual a 100, ilustrando a velocidade máxima (em vermelho) e mínima (em azul) ao longo do canal.

Sabe-se que para esse problema (Dupuis, 2002), a velocidade máxima no centro do canal é dada por:

$$U_x(y) = 4U_c \frac{y}{D} \left(1 - \frac{y}{D}\right), \quad (10)$$

onde  $U_x$  é a velocidade no eixo  $x$  e  $U_c$  é a velocidade máxima no canal. A Figura 7 mostra o gráfico da curva de velocidade em relação à velocidade máxima, ao longo do eixo  $y$ . A simulação foi realizada em uma malha com 256 pontos no eixo  $x$  e 64 pontos no eixo  $y$ .

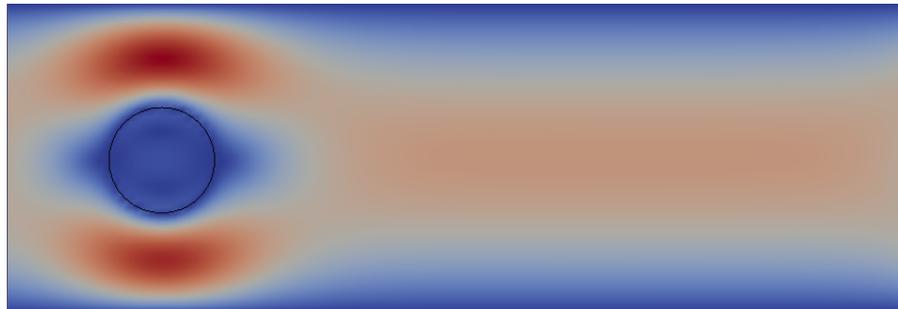


**Figura 7: Perfil parabólico de velocidade para o escoamento de Poiseuille.**

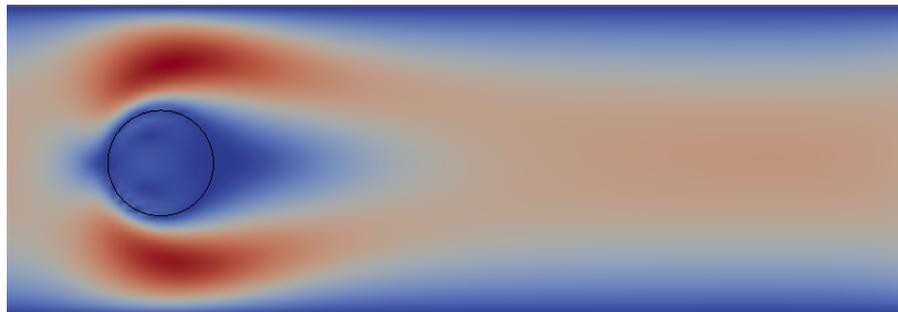
Para se obter o resultado mostrado no gráfico foi necessário rodar a simulação por um tempo considerável e com uma tolerância de erro, que está relacionado a mudança de estado no tempo atual em relação ao tempo anterior, muito pequena com valor de  $10^{-9}$ . Pode-se notar a partir do gráfico que a simulação do problema obteve uma aproximação boa em relação à solução analítica.

### 3.2 Escoamento com obstáculo rígido

Como segunda simulação foi realizada um escoamento, inicializado como o de Poiseuille, mas considerando agora um obstáculo rígido de forma circular. Para essa simulação foi utilizado o método de lattice-Boltzmann e o método das fronteiras imersas. Os resultados desse experimentos são apresentados na Figura 8 para Reynolds igual a 20 e 200, respectivamente.



(a) Re=20



(b) Re=200

**Figura 8:** Simulações de escoamento com obstáculo utilizando número de Reynolds (a) 20 e (b) 200. O obstáculo circular foi representado de preto e sobreposto ao campo escalar que representa a magnitude do campo de velocidades.

As simulações foram realizadas com 120 pontos na direção  $x$ , 42 pontos na direção  $y$ . O obstáculo circular de raio 7 foi posicionado com centro em  $x = 20$  e  $y = 20$  e foi representado utilizando 32 partículas (representação lagrangiana).

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi implementado o método das fronteiras imersas e seu acoplamento ao método de lattice-Boltzmann para se estudar o escoamento de fluidos e a sua interação com estruturas, incluindo aquelas com geometrias complexas. Foi utilizado como base o trabalho de Campos et al. (2016) que implementou o escoamento de Poiseuille utilizando o método de lattice-Boltzmann padrão d2q9. O acoplamento dos métodos foi feito de forma relativamente simples, com poucas alterações no método de Lattice-Boltzmann, sendo que a maior mudança está na inserção do termo forçante  $F_i$  na equação (1) que representa as forças que agem no obstáculo e são transmitidas para o fluido.

As simulações realizadas foram limitadas a problemas de escoamento com obstáculos rígidos, porém com o método das fronteiras imersas também é possível a simulação de escoamento com obstáculos deformáveis, que seguem uma lei constitutiva relacionada às propriedades do material. A partir das simulações realizadas pode-se concluir que o método das fronteiras imersas oferece uma boa alternativa para simulação de escoamento de fluidos com interação com estruturas complexas, suprimindo a deficiência do método lattice-Boltzmann padrão.

O próximo passo do presente trabalho é realizar uma validação mais detalhada da simulação com obstáculo rígido comparando os resultados numéricos aqui obtidos com dados experimentais da força de arrasto e da força normal disponíveis na literatura (Borthwick, 1986; Dennis & Chang, 1970; Silva et al., 2003). Outro passo importante é um estudo detalhado sobre a simulação do escoamento com obstáculos deformáveis.

## AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi desenvolvido com o apoio da FAPEMIG(Fundação de Amparo à Pesquisa de MG), dando suporte para participação do evento e no desenvolvimento do trabalho.

## Referências Bibliográficas

- Bhatnagar P.L., Gross E.P., & Krook M. A model for collisional processes in gases i: small amplitude processes in charged and in neutral one-component systems. *Phys Rev*, 94:511, 1954.
- Borthwick A.G. Comparison between two finite difference schemes for computing the flow around a cylinder. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 6:275–290, 1986.
- Campos J., Oliveira R.S., dos Santos R., & Rocha B. Lattice boltzmann method for parallel simulations of cardiac electrophysiology using gpus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, páginas 70–82, 2016.
- Dennis S. & Chang G.Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100. *J Fluid Mech*, 42:471–489, 1970.
- Dupuis A. From a lattice boltzmann model to a parallel and reusable implementation of a virtual river. *Diss. Thèse soutenue à Genève en Suisse*, pagina 54, 2002.
- Guo Z., Zheng C., & Shi B. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, 65(4):046308, 2002.
- He X. & Luo L.S. Lattice boltzmann model for the incompressible navier-stokes equation. *J. Stat. Phys.*, 88:927–944, 1997.
- Mohamad A.A. *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer, 2011.
- Peskin C.S. *Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion*. UMI, 1972.
- Silva A.L.E., Silveira-Neto A., & Damasceno J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189(2):351–370, 2003.