



DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM PLACAS EM REGIME TRANSIENTE: COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA.

Gisele Vilela Almeida

gisele.vilela21@gmail.com

Universidade de Brasília

Nailde de Amorim Coelho

nailde.amorim@univasf.edu.br

Universidade de Brasília e Universidade Federal do Vale do São Francisco

Lineu José Pedroso

lineu@unb.br

Universidade de Brasília

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – Grupo de Dinâmica e Fluido – Estrutura (GDPE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919 – 970, Brasília – DF.

Asa Norte, Brasília - CEP 70919 – 900, DF, Brasil.

Abstract. *As simulações numéricas são métodos bastante utilizados para estudo da difusão do calor em sólidos, pois leva em consideração o modelo apropriado que apesar de ser complexo pode ser decomposto numa série progressiva e mais simples da abordagem, incorporando em cada passo novos elementos que permitem o tratamento completo da questão. Este trabalho apresenta um estudo comparativo do fluxo de calor em regime transiente numa placa, sem geração de calor interno, com soluções analíticas e numéricas através do método das diferenças finitas (MDF). Os resultados obtidos pela solução numérica apresentam uma boa concordância com os resultados analíticos.*

Keywords: *Equação de Fourier, Efeitos Térmicos, Diferenças Finitas, Regime Transiente, Soluções Analíticas.*

1 INTRODUÇÃO

A condução é um processo no qual o calor se propaga elevando a temperatura ao longo da seção do elemento originando gradientes térmicos. Esse fenômeno pode ser classificado como permanente (quando o calor transmitido em um sistema é constante e somente a temperatura varia em cada ponto do sistema) ou transiente (quando o fluxo de calor em um sistema é considerado transitório no qual a temperatura em vários pontos do sistema varia com o tempo).

Um dos objetivos principais da análise da condução de calor é determinar o campo de temperaturas em um meio resultante das condições impostas em suas fronteiras. Ou seja, deseja-se conhecer a distribuição de temperaturas, que representa como a temperatura varia com a posição no meio. Uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução (fluxo térmico condutivo) em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode ser determinado através da lei de Fourier. (Incropera et al., 2008).

O estudo do fluxo de calor através de modelos numéricos é uma ferramenta amplamente difundida, principalmente, devido às vantagens que esses possuem em relação aos métodos experimentais. Existem diversos métodos numéricos que podem ser utilizados para análise desse problema, como o método das diferenças finitas, dos elementos finitos, elementos de contornos, entre outros.

O Método das Diferenças Finitas é um procedimento numérico que resolve equações diferenciais parciais, por discretização do domínio físico contínuo em uma malha discreta finita, aproximando cada derivada parcial na EDP por aproximações de diferenças algébricas finitas. Ao substituir essas aproximações na EDP, será obtida uma equação algébrica de diferenças finitas para a variável dependente. (Hoffman, 2001).

Neste artigo, efetua-se uma análise transiente para o estudo do comportamento da temperatura numa placa em regime transiente, sem geração interna de calor, através de soluções analíticas e numéricas pelo método das diferenças finitas. O estudo da equação do calor tem sido objeto de vários estudos e pesquisas no grupo de dinâmica e fluido-estrutura da UnB (GDPE) (Coelho, 2012; Vasconcelos & Pedroso, 2014; Pedroso, 2011).

2 FORMULAÇÃO TEÓRICA

O fluxo de calor na estrutura é definido pela equação de condução do calor, também conhecida como equação de Fourier (Çengel & Ghajar, 2012):

$$\nabla^2 T + \frac{e}{k} = \frac{\rho C_p}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Onde, T = temperatura (°C); e = geração de calor (W/m³); k = condutividade térmica (w/m°C); C_p = calor específico (J/g°C); ρ = massa específica (Kg/m³);

A partir da definição da equação de condução do calor (Eq.1), desenvolve-se a equação por meio das aproximações por diferenças finitas com base em Coelho & Pedroso (2015).

Considere uma placa retangular no plano cartesiano e coberta por uma malha com pontos nodais espaçados Δx e Δy , ocorrendo fluxo de calor nas direções x e y, conforme ilustrado na Fig.1.

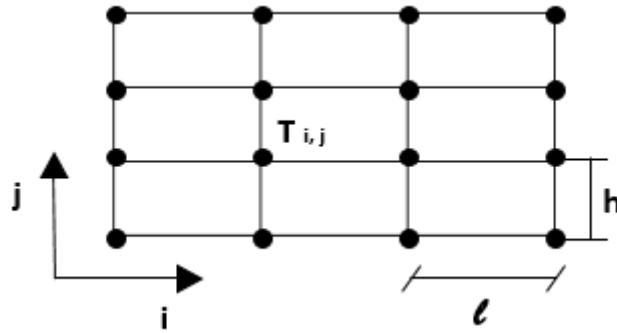


Figura 1. Diagrama de solução do método das diferenças finitas (Coelho & Pedroso, 2015).

Para o nó interno (\cdot), a formulação transiente da Equação de fluxo térmico sem geração de calor, com κ representando o incremento de tempo, é expressa por:

$$\frac{T_{i+1,j}^{\kappa} - 2T_i^{\kappa} + T_{i-1,j}^{\kappa}}{l^2} + \frac{T_{i,j+1}^{\kappa} - 2T_i^{\kappa} + T_{i,j-1}^{\kappa}}{h^2} = \frac{1}{D} \frac{T_i^{\kappa+1} - T_i^{\kappa}}{\Delta t} \quad (2)$$

Simplificando a malha retangular para quadrada com $l = h = 1$:

$$T_i^{\kappa+1} - T_i^{\kappa} = (T_{i+1,j}^{\kappa} + T_{i-1,j}^{\kappa} + T_{i,j+1}^{\kappa} + T_{i,j-1}^{\kappa})F + (1 - 4F)T_i^{\kappa} \quad (3)$$

Em que: $F = \frac{D\Delta t}{l^2}$; $D = \frac{k}{\rho c}$ = difusividade térmica.

Em situações que o fluxo de calor é transiente, o incremento de tempo deve atender ao requisito:

$$F \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

Caso não ocorra o fenômeno transiente, a Eq.(1) discretizada por diferenças finitas torna-se a equação de Laplace, caso estático:

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \quad (5)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O caso proposto consiste em determinar a distribuição interna da temperatura em uma placa quadrada ($a \times a$) em função do tempo e da posição, sem geração interna de calor,

submetida as condições de contorno: $T(0, y) = 0, T(x, 0) = 0, T(a, y) = 0$ e condições iniciais: $T(x, a) = 100$. Foram consideradas as seguintes propriedades do material da placa: $k = 1.79$ (w/m°C); $C_p = 1000$ (J/g°C); $\rho = 2300$ (Kg/m³); F (número de Fourier) = 0.25 e dimensões geométricas unitárias.

Na Fig. 2 é gerada numa superfície a distribuição do fluxo de calor ao longo da placa através do método das diferenças finitas.

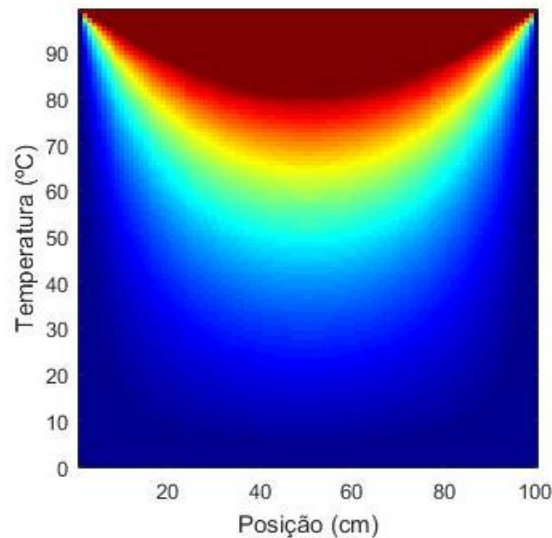


Figura 2. Distribuição do fluxo de calor numa placa em função da posição.

Na Fig. 3 é mostrada a comparação entre a solução analítica e numérica para determinação da temperatura em função da posição, ao longo do eixo x, para um incremento de tempo.

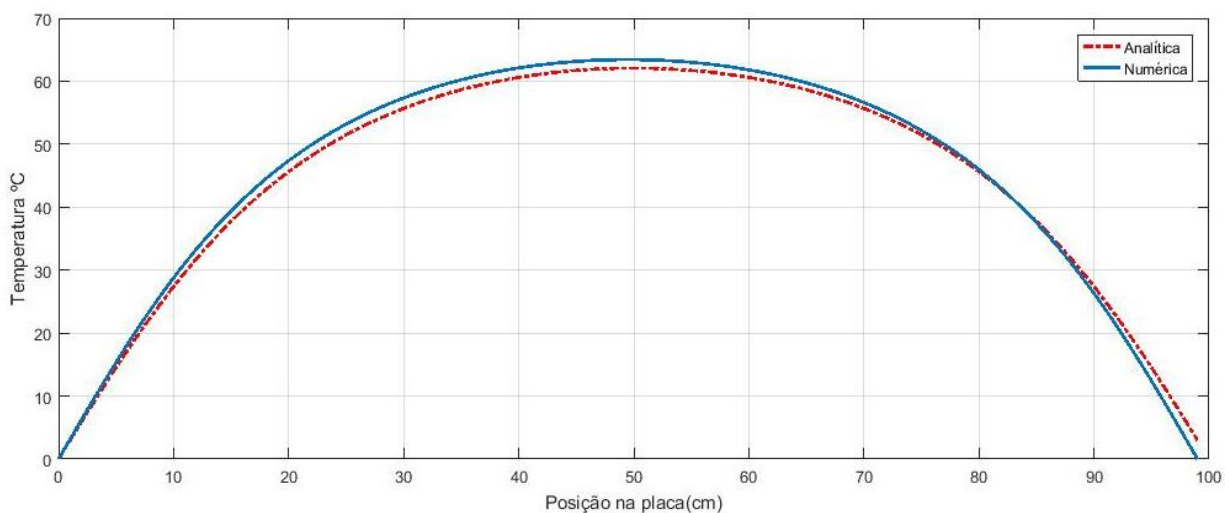


Figura 3. Comparação entre resultado analítico e numérico para a variação de temperatura em função da posição.

A Fig. 4 apresenta uma comparação entre a solução analítica e numérica da temperatura para um ponto em função do tempo, na posição $x = 0.35$ m e $y = 0.35$ m.

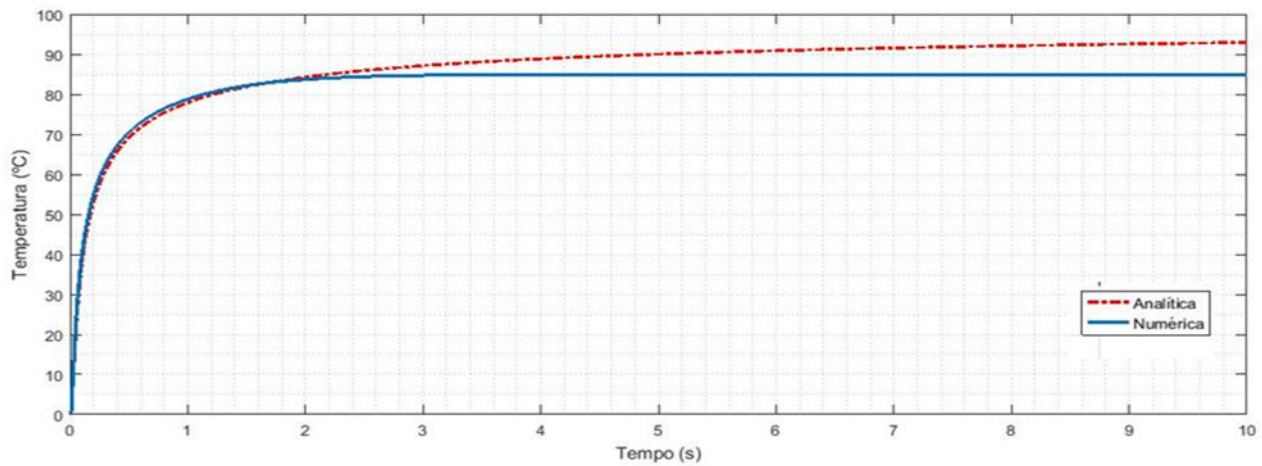


Figura 4. Comparação entre resultado analítico e numérico para a variação da temperatura em função do tempo para a posição $x=y=0,35m$.

4 CONCLUSÃO

A partir da análise dos resultados é possível constatar que a difusão de calor em placas pode ser satisfatoriamente modelada e prevista através do Método das Diferenças Finitas, pois os resultados foram precisos quando comparados aos analíticos. Assim, o método apresenta-se como excelente alternativa para a solução de problemas relacionados à natureza térmica em Engenharia. Recomenda-se, para trabalhos futuros, que sejam estudadas outras geometrias através do Método das Diferenças Finitas em regime transiente e com geração interna de calor devido as possíveis aplicações, por exemplo, em estruturas de concreto-massa

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UnB, ao PECC-UnB, a Univasf e ao CNPq pelo apoio no desenvolvimento dessa pesquisa.

6 REFERÊNCIAS

- Çengel, Y. A. 2006. *Heat and Mass Transfer: A Practical Approach*, 3ª Ed., McGraw-Hill, Singapore.
- Coelho, N. A.. *Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012..
- Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.. *Aplicação do método das diferenças finitas à equação do calor*. 9 f. Relatório Técnico - RTP-NAC-16/2015. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2013.
- Hoffman, J. D., 2001. *Numerical methods for engineers and scientists*, Marcel Dekker, Inc.
- Incropera, F. P.; Dewitt, D. P.; Bergman, T. L.; Lavine, A. S.. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- Pedroso, L. J., 2011. *Uma Introdução do Método das Diferenças Finitas Centrais em Cavidades Acústicas 2D*. Publicação Didática, Universidade de Brasília.
- Vasconcelos, M. A., & pedroso, l. J. (2014). *Aplicação do Método das Diferenças Finitas a Problemas Envolvendo Barragem-Reservatório*. 20o Congresso de Iniciação Científica da UnB.