

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## ANÁLISE DE TENSÕES EM ESTRUTURAS AXISSIMÉTRICAS EMPREGANDO A FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS

**Arlan Ricardo Cavalcante dos Santos**

**Márcio André Araújo Cavalcante**

arlanrcs@gmail.com

marcio.cavalcante@ctec.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Rodovia AL 145, Km 3, Nº 3849, Cidade Universitária, Delmiro Gouveia, Alagoas, Brasil.

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma formulação para análise de tensões em estruturas axissimétricas, tais como tubos circulares, cilindros e anéis, elaborada com base em uma versão em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos. Esta formulação é bastante apropriada para análise de tensões em estruturas com contornos curvos, apresentando geometria e campos mecânicos expressos em termo de coordenadas polares, visando melhorar o desempenho do método em tais situações. Diferentemente de versões anteriores empregando coordenadas polares, esta formulação baseia-se na montagem da matriz de rigidez local, que relaciona vetores de tensões e de deslocamentos médios atuantes nas faces do subvolume, e no método da rigidez direta para montagem da matriz de rigidez global, com base nas incidências cinemáticas e estáticas da estrutura, ou seja, nas condições de compatibilidade cinemática e estática da estrutura. Alguns exemplos foram analisados e os resultados comparados com soluções analíticas da teoria da elasticidade linear (problema de Lamé, viga curva engastada e o problema de Kirsch), evidenciando a eficiência da formulação proposta.*

**Palavras-Chave:** *Estruturas Axissimétricas; Teoria de Volumes Finitos; Coordenadas Polares; Método da Rigidez Direta; Problema de Lamé; Viga Curva Engastada; Problema de Kirsch.*

## 1 INTRODUÇÃO

São chamadas de estruturas axissimétricas aquelas que resultam da rotação de uma figura plana em torno de um eixo. Tais estruturas podem ser encontradas em inúmeras aplicações, tanto na engenharia civil como na engenharia mecânica (Vaz, 2011). Considerando que o principal estágio do processo de concepção de uma estrutura consiste na análise das tensões internas que surgem em resposta as solicitações aplicadas, torna-se indispensável o desenvolvimento de novas técnicas de análise e o aprimoramento daquelas já existentes. Neste contexto, se insere os métodos numéricos voltados para análise de estruturas baseados na Teoria de Volumes Finitos.

Nas últimas décadas, foram publicados diversos trabalhos que apresentaram e comprovaram a eficiência de diferentes variações da formulação original em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos proposta por Bansal e Pindera (2003). Como exemplo, podem-se destacar formulações em coordenadas polares e paramétricas apresentadas por Cavalcante e Marques (2005) e Cavalcante et al. (2007), nesta ordem. Nos mencionados trabalhos foram realizadas várias análises de estruturas constituídas por materiais heterogêneos, e os resultados obtidos foram comparados com outros provenientes de soluções analíticas ou de análises empregando o Método dos Elementos Finitos.

No presente trabalho é apresentada uma formulação destinada à análise de tensões de estruturas axissimétricas elaborada com base em uma versão em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos (Cavalcante e Marques, 2005). Esta formulação emprega subvolumes com faces curvas na discretização da estrutura, e diferentemente da formulação apresentada em Cavalcante e Marques (2005), baseia-se na montagem da matriz de rigidez local, que relaciona vetores de tensões e de deslocamentos médios atuantes nas faces do subvolume, e no método da rigidez direta para montagem da matriz de rigidez global, com base nas incidências cinemáticas e estáticas da estrutura (Bansal e Pindera, 2003 e Cavalcante e Pindera, 2012). Acrescenta-se ainda, que na presente formulação, as equações diferenciais de equilíbrio são satisfeitas em termos médios nos subvolumes.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES DA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR EM COORDENADAS POLARES

Considere um sólido elástico de volume  $V$ , delimitado por uma superfície  $S$  e submetido à ação de forças de corpo  $\mathbf{b} = b_r \hat{\mathbf{e}}_r + b_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$  e de superfície  $\mathbf{t} = t_r \hat{\mathbf{e}}_r + t_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$ . Para realizar uma análise na qual se considera um regime de pequenos deslocamentos e deformações, utiliza-se a definição do tensor de deformação de engenharia, dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (\text{relação deformação-deslocamento}) \quad (1)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}$ ,  $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$  e  $\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$  representam o tensor de deformação de engenharia, o operador gradiente e o campo de deslocamentos em coordenadas polares, respectivamente.

Uma vez conhecidas as componentes de deformação, pode-se determinar as componentes de tensão através da Lei de Hooke Generalizada, mostrada a seguir:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (\text{relação constitutiva do material}) \quad (2)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  os tensores de tensões e de deformações em qualquer ponto no sólido, nesta ordem, e  $C_{ijkl}$  o tensor constitutivo do material. Além disto, no caso de uma análise de tensões, dispõem-se da seguinte forma integral das equações de equilíbrio:

$$\int_V (\nabla \sigma + \mathbf{b}) dV = \mathbf{0} \quad (\text{equações de equilíbrio}) \quad (3)$$

### 3 TEORIA DE VOLUMES FINITOS EM COORDENADAS POLARES

A Figura 1 ilustra uma estrutura axissimétrica subdividida em  $N_q = N_\beta N_\gamma$  sub-domínios retangulares (retângulos polares) denominados subvolumes. Os parâmetros  $N_\beta$  e  $N_\gamma$  indicam o número de subdivisões correspondentes aos intervalos  $R_I < r < R_I + E$  e  $0 < \theta < A$ , respectivamente. Cada subvolume pode ser denotado por um único número inteiro  $1 \leq q \leq N_q$  ou por um par de números inteiros  $\beta = 1, \dots, N_\beta$  e  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$ , sendo o primeiro parâmetro dado em função destes dois últimos. Por exemplo, o subvolume  $(\beta, \gamma)$  é aquele que ocupa a posição  $\beta$  na posição radial e  $\gamma$  na posição circunferencial, ou  $q = \beta + (\gamma - 1)N_\beta$  na estrutura discretizada. Além disso, as solicitações e deslocamentos impostos à estrutura são aplicados nas faces externas dos subvolumes localizados na periferia do modelo estrutural em termos de valores médios das grandezas estáticas e cinemáticas.

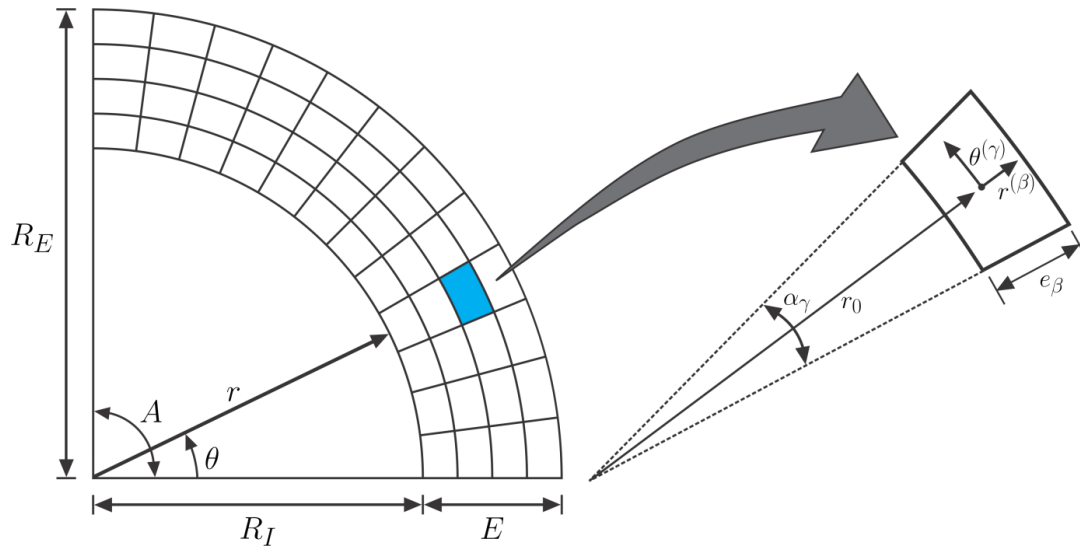


Figura 1. Estrutura discretizada em subvolumes retangulares (retângulos polares) e sistema de coordenadas locais de um subvolume genérico.

A presente formulação utiliza polinômios de segundo grau expressos em função das coordenadas locais para aproximar as componentes do campo de deslocamentos em cada subvolume, viabilizando, assim, a realização de análises de tensões em estruturas que se apresentam em estado plano de tensões ou de deformações. Estes polinômios são dados por:

$$u_i^{(q)} = U_{i(00)}^{(q)} + r^{(q)} U_{i(10)}^{(q)} + \theta^{(q)} U_{i(01)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(r^{(q)})^2 - \frac{e_q^2}{4} \right) U_{i(20)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(\theta^{(q)})^2 - \frac{\alpha_q^2}{4} \right) U_{i(02)}^{(q)} \quad (4)$$

onde os valores  $U_{i(mn)}^{(q)}$  (para  $i = r, \theta$ ) representam os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

### 3.1 Montagem da Matriz de Rigidez Local

Na presente formulação, faz-se necessário calcular os valores médios das componentes do campo de deslocamentos nas faces dos subvolumes. Para isso, são utilizadas as seguintes equações:

$$\bar{u}_i^{(q,p)} = \frac{1}{\alpha_q} \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} u_i^{(q)}(\mp e_q / 2, \theta^{(q)}) d\theta^{(q)}, \text{ para } p = 1,3 \quad (5)$$

$$\bar{u}_i^{(q,p)} = \frac{1}{e_q} \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} u_i^{(q)}(r^{(q)}, \mp \alpha_q / 2) dr^{(q)}, \text{ para } p = 2,4 \quad (6)$$

onde  $\bar{u}_i^{(q,p)}$  são os deslocamentos médios na face  $p$  de um subvolume genérico  $q$ .

Substituindo as componentes do campo de deslocamentos, Eq. (4), nas duas equações acima, são obtidas oito expressões para os deslocamentos médios nas faces em função dos coeficientes do campo de deslocamentos. Tais expressões podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}^{(q)} + \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (7)$$

sendo  $\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = [\bar{u}_r^{(q,1)}, \bar{u}_\theta^{(q,1)}, \bar{u}_r^{(q,2)}, \bar{u}_\theta^{(q,2)}, \bar{u}_r^{(q,3)}, \bar{u}_\theta^{(q,3)}, \bar{u}_r^{(q,4)}, \bar{u}_\theta^{(q,4)}]^T$  o vetor local de deslocamentos médios nas faces,  $\mathbf{U}^{(q)} = [U_{2(10)}^{(q)}, U_{2(01)}^{(q)}, U_{2(20)}^{(q)}, U_{2(02)}^{(q)}, \dots, U_{3(02)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem e  $\mathbf{U}_{(00)}^{(q)} = [U_{2(00)}^{(q)}, U_{2(00)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero. O vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem pode ser avaliado como função dos deslocamentos médios nas faces e dos coeficientes de ordem zero como segue:

$$\mathbf{U}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (8)$$

Substituindo as componentes do campo de deslocamentos nas Eqs. (1) e (2), são obtidas as componentes locais dos campos de deformações e de tensões para um subvolume genérico  $q$  em função dos coeficientes do campo de deslocamentos. Vale ressaltar que para determinar as componentes do tensor de tensões, considerou-se o material do subvolume como sendo elástico linear, isotrópico e homogêneo. De posse de tais componentes, pode-se determinar as componentes dos vetores de tensões atuantes nas faces de um subvolume genérico, conforme mostrado abaixo:

$$t_r^{(q,p)}(\theta^{(q)}) = \mp \sigma_{rr}^{(q)}(\theta^{(q)}, \mp e_q / 2), \quad t_\theta^{(q,p)}(\theta^{(q)}) = \mp \sigma_{r\theta}^{(q)}(\theta^{(q)}, \mp e_q / 2) \quad (\text{para } p = 1,3) \quad (9)$$

$$t_r^{(q,p)}(r^{(q)}) = \mp \sigma_{\theta r}^{(q)}(r^{(q)}, \mp \alpha_q / 2), \quad t_\theta^{(q,p)}(r^{(q)}) = \mp \sigma_{\theta\theta}^{(q)}(r^{(q)}, \mp \alpha_q / 2) \quad (\text{para } p = 2,4) \quad (10)$$

Avaliando as Equações (9) e (10) em termos médios nas faces de um subvolume genérico, utilizando-se definições semelhantes àquelas apresentadas nas Eqs. (5) e (6), são encontradas oito expressões que podem ser organizadas matricialmente como segue:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}^{(q)} + \mathbf{b}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (11)$$

sendo  $\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = [\bar{t}_r^{(q,1)}, \bar{t}_\theta^{(q,1)}, \bar{t}_r^{(q,2)}, \bar{t}_\theta^{(q,2)}, \bar{t}_r^{(q,3)}, \bar{t}_\theta^{(q,3)}, \bar{t}_r^{(q,4)}, \bar{t}_\theta^{(q,4)}]^T$  o vetor local médio de tensões atuantes nas faces de um subvolume genérico  $q$ .

Nesta formulação, as equações diferenciais de equilíbrio relativas a um subvolume são satisfeitas em termos médios no volume, Eq. (3), resultando na seguinte equação matricial:

$$\Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}^{(q)} + \Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (12)$$

onde são desprezadas as forças de corpo  $b_r$  e  $b_\theta$ . Substituindo a expressão que relaciona o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem, Eq. (8), na equação de equilíbrio mostrada acima, Eq. (12), e isolando o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero na equação resultante, torna-se possível expressar este último vetor em função do vetor local de deslocamentos médios nas faces de um subvolume, conforme mostrado abaixo:

$$\mathbf{U}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (13)$$

sendo  $\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} = \left( \Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} - \Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} \right)^{-1} \Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1}$ . Substituindo a Eq. (13) na Eq. (8), pode-se encontrar uma relação matricial entre o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos com o vetor local de deslocamentos médios nas faces, resultando em:

$$\mathbf{U}^{(q)} = \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (14)$$

onde  $\bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)}$ . Finalmente, substituindo as Eqs. (13) e (14) na Eq. (11), chega-se no sistema local de equações de um subvolume como mostrado a seguir:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (15)$$

onde  $\mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} + \mathbf{b}_{(8 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)}$  representa a matriz de rigidez local de um subvolume genérico  $q$ .

### 3.2 Montagem da Matriz de Rigidez Global

A matriz de rigidez global da estrutura é montada considerando-se a contribuição individual de cada subvolume utilizado em sua discretização. Se uma estrutura é subdividida em  $N_q$  subvolumes, considerando-se dois graus de liberdade por face, chega-se a um total de  $N_{gl} = 2N_\beta(N_\gamma + 1) + 2(N_\beta + 1)N_\gamma$  graus de liberdade globais associados à estrutura. Com base nas condições de compatibilidade cinemática e estática, as quais são satisfeitas em termos médios nas interfaces compartilhadas por subvolumes vizinhos, chega-se na seguinte equação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}_{(N_{gl}, N_{gl})} \mathbf{U} \quad (16)$$

onde  $\mathbf{U} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N_{gl}}]^T$  e  $\mathbf{T} = [\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{N_{gl}}]^T$  são os vetores globais de deslocamentos e de tensões médias atuantes nas faces da estrutura discretizada, respectivamente. Com base nas

condições de compatibilidade mencionadas acima, a matriz de rigidez global da estrutura pode ser calculada como segue:

$$\mathbf{K}_{(N_{gl}, N_{gl})} = \sum_{q=1}^{N_q} \left( \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \quad (17)$$

sendo  $\mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)}$  e  $\left( \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T$  as matrizes de compatibilidade estática e cinemática da estrutura, nesta ordem.

### 3.3 Solução do Sistema de Equações Global

O sistema de equações global da estrutura pode ser escrito na forma mostrada abaixo, após serem consideradas as condições de contorno nos vetores globais de deslocamentos e de tensões médias nas faces da estrutura discretizada:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{T}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cd} & \mathbf{K}_{cc} \\ \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_c \end{Bmatrix} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{T}_c$  e  $\mathbf{T}_d$  representam os vetores de tensões conhecidas e desconhecidas, respectivamente, e  $\mathbf{U}_c$  e  $\mathbf{U}_d$  simbolizam os vetores de deslocamentos conhecidos e desconhecidos, nesta ordem. Assim, os vetores de deslocamentos e de tensões desconhecidas podem ser determinados através das equações apresentadas a seguir:

$$\mathbf{U}_d = (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{T}_c - (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{K}_{cc} \mathbf{U}_c \quad (19)$$

$$\mathbf{T}_d = \mathbf{K}_{dd} \mathbf{U}_d - \mathbf{K}_{dc} \mathbf{U}_c \quad (20)$$

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1 Problema de Lamé

A Figura 2(a) ilustra o caso de um tubo de parede grossa de raio interno  $a = 1.00$  in e raio externo  $b = 1.35$  in, constituído de material isotrópico elástico linear, cujas propriedades são  $E = 29.10^6$  psi e  $\nu = 0.22$ , submetido à pressões uniformes nos bordos interno e externo, cujos valores são  $P_i = 5000$  psi e  $P_e = 1000$  psi, respectivamente. A solução analítica deste problema foi apresentada pela primeira vez por Lamé no ano de 1852.

A solução analítica para este problema, considerando-se o tubo em estado plano de deformações, pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1980). Na análise numérica, utilizou-se uma malha constituída por 25x1 subvolumes dispostos na direção radial e circunferencial, respectivamente. Em virtude das simetrias geométrica e das condições de contorno do problema, apenas um quarto do tubo foi analisado.

Na Figura 3 são confrontados os resultados obtidos com a presente formulação e a solução analítica encontrada por Lamé, onde pode-se constatar uma boa concordância dos resultados numéricos em relação àqueles obtidos com a solução analítica.

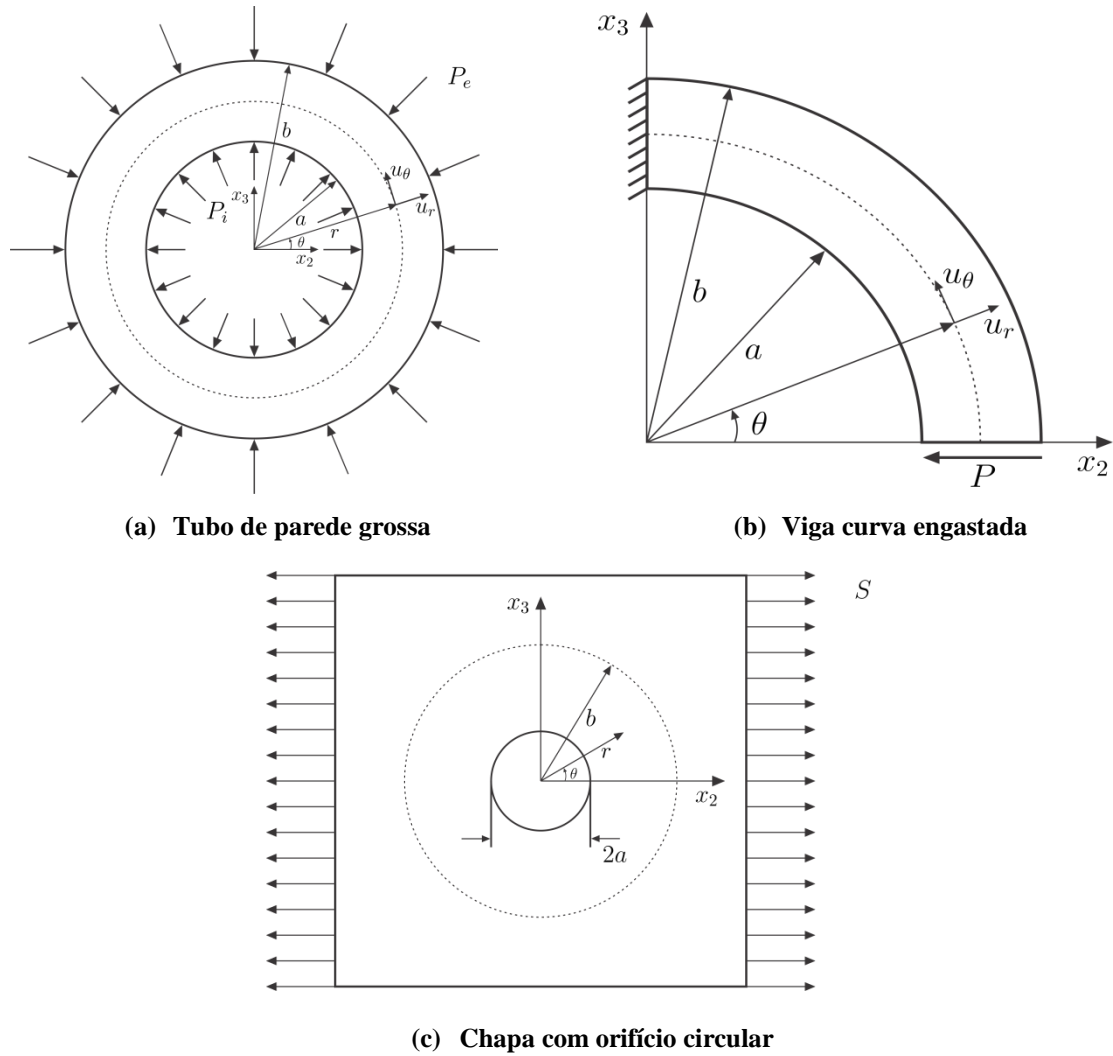


Figura 2. Estruturas analisadas com a formulação em coordenadas polares da Teoria de volumes Finitos.

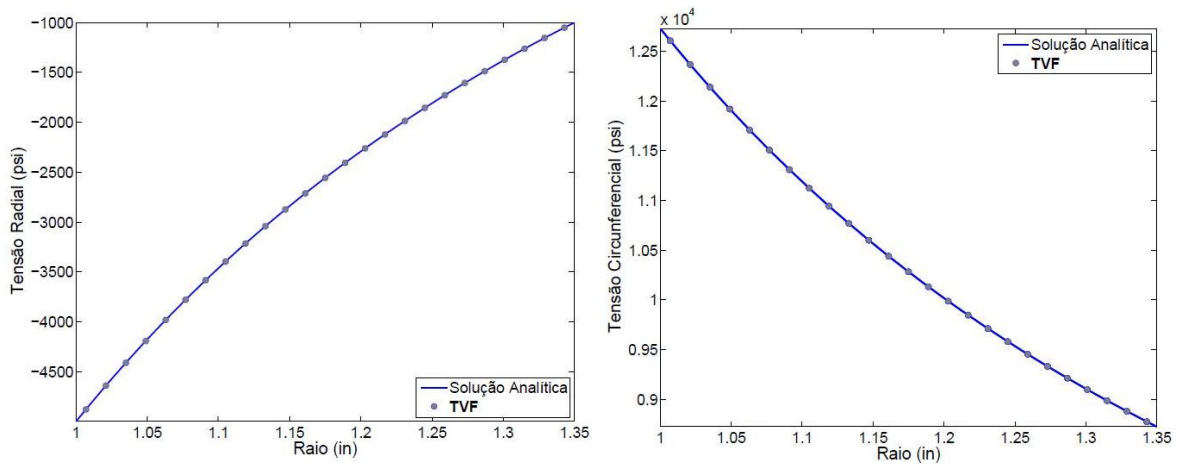


Figura 3. Variação da tensão radial e circunferencial ao longo da parede do tubo.

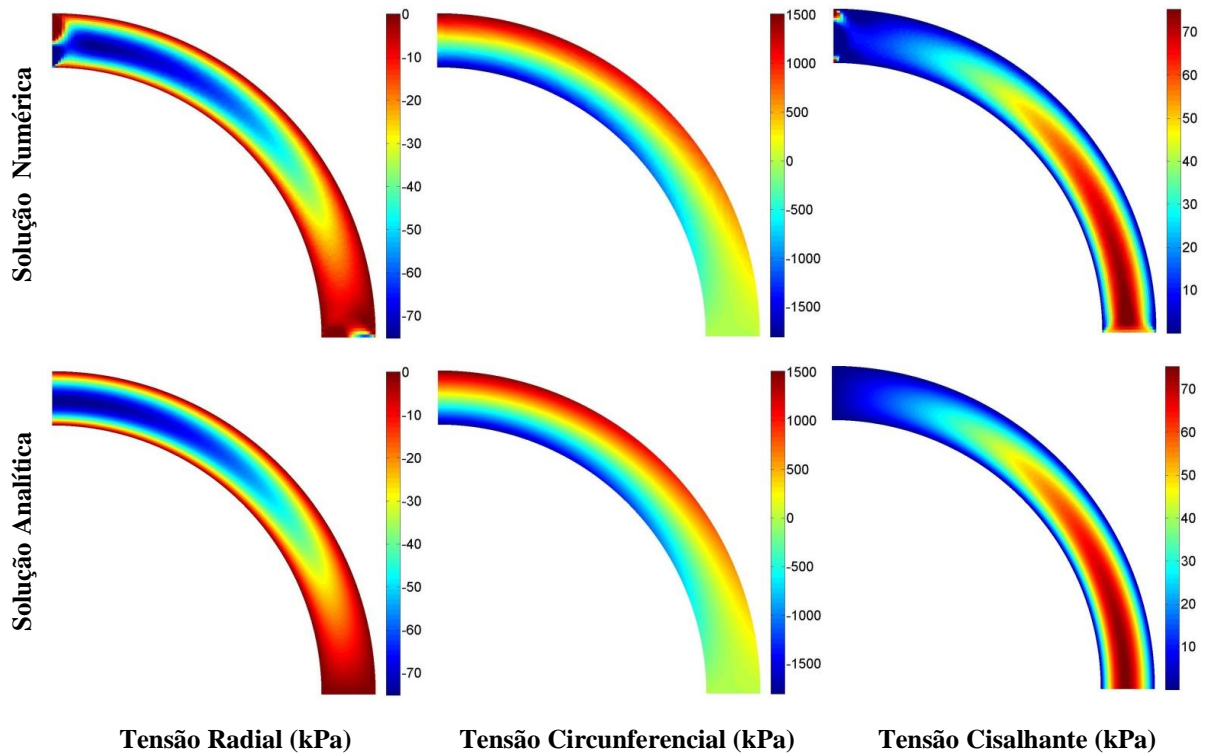


Figura 4. Campos de tensão para a viga engastada.

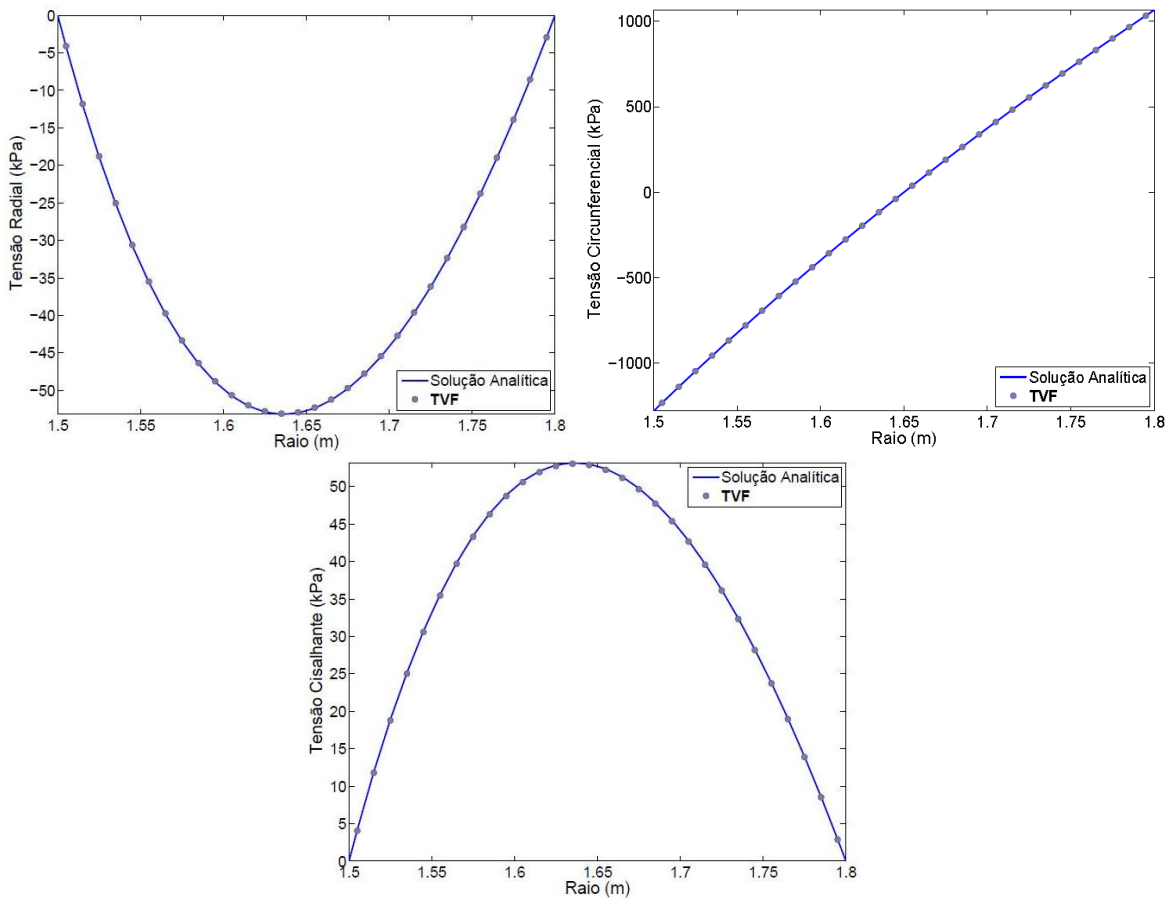


Figura 5. Variação das tensões ao longo da seção transversal média da viga ( $\theta = \pi/2$ ).



## 4.2 Viga Curva Engastada

A Figura 2(b) ilustra o caso de uma viga de seção transversal retangular e com eixo curvo, engastada no bordo anti-horário e submetida a uma carga concentrada por unidade de comprimento  $P = 15 \text{ kN}$  no bordo horário, constituída de material isotrópico elástico linear, cujas propriedades são  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0.22$ . A altura da seção transversal mede  $h = b - a$ , onde  $a = 1.50 \text{ m}$  e  $b = 1.80 \text{ m}$  indicam a distância do centro de curvatura da viga aos bordos interno e externo, nesta ordem.

A solução analítica, considerando-se o tubo em estado plano de tensões, encontra-se em Timoshenko e Goodier (1980). Na análise numérica, utilizou-se uma malha constituída por  $30 \times 133$  subvolumes dispostos nas direções radial e circunferencial, respectivamente.

As Figuras 4 e 5 exibem os resultados obtidos com a presente formulação e a solução analítica. Como se observa, os resultados numéricos apresentaram uma boa concordância com àqueles provenientes da solução analítica, principalmente nas regiões mais afastadas dos bordos engastado e livre, devido ao Princípio de Saint-Venant, uma vez que nas regiões mais próximas das extremidades da viga, pode-se verificar algumas perturbações nas distribuições de tensão radial e cisalhante, que estão relacionadas às diferenças nas condições de contorno impostas à formulação numérica em relação àquelas empregadas na solução analítica.

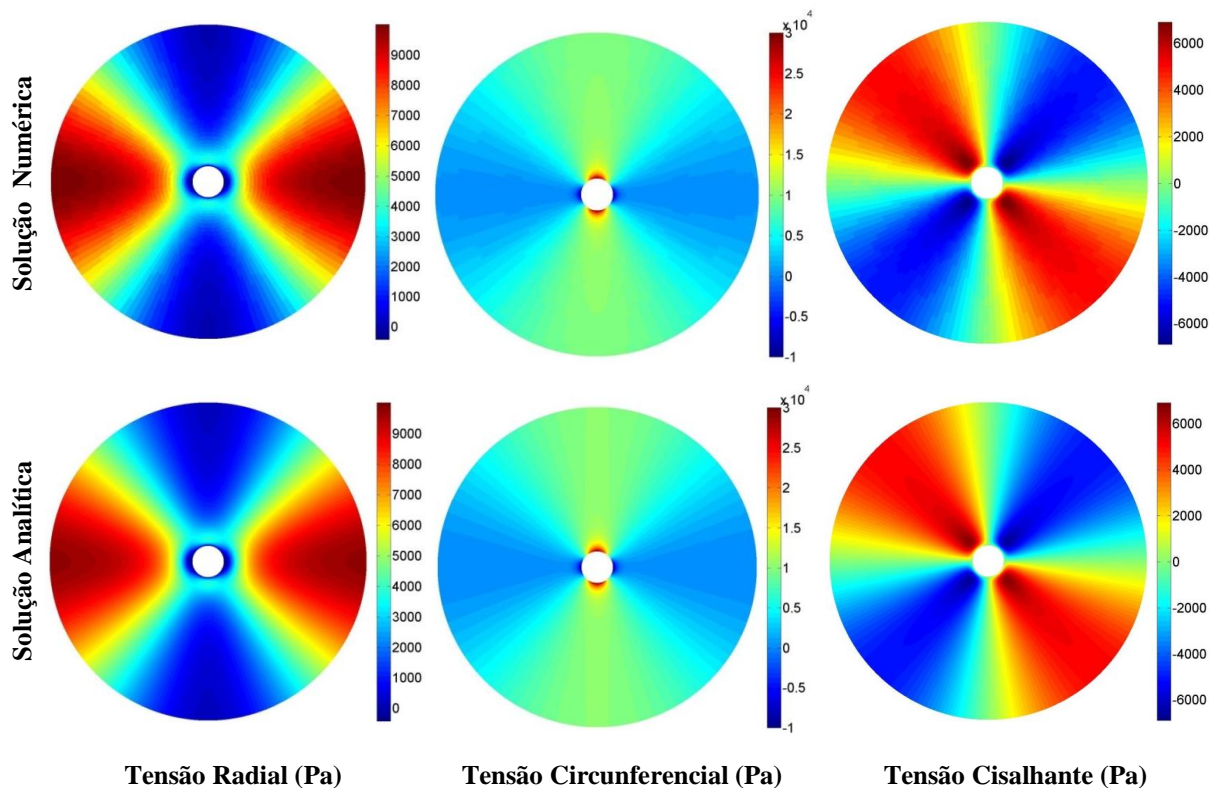


Figura 6. Campos de tensão para a chapa tracionada com orifício circular.

## 4.3 Problema de Kirsch

A Figura 2(c) ilustra o caso de uma chapa com um orifício circular de raio  $a = 0.1 \text{ m}$  submetida a um estado de tensão uniaxial na direção horizontal definido por  $S = 10 \text{ kPa}$ . As distribuições de tensão nas regiões mais afastadas do orifício tendem a permanecer idênticas àquelas encontradas para uma chapa sem orifício submetida à mesma solitação, em virtude

do princípio de Saint-Venant. Entretanto, na periferia do orifício surgem altas concentrações de tensões que podem ser analisadas numericamente considerando-se uma porção circular de raio  $b = 1.0m$  no interior da chapa e concêntrica com o orifício, impondo-se condições de contorno em coordenadas polares equivalentes àquelas produzidas por um estado de tensão uniaxial horizontal. A solução exata deste problema, considerando-se uma chapa com dimensões infinitas, foi encontrada por Kirsch em 1898.

As expressões da solução analítica para o campo de tensões, considerando-se o tubo em estado plano de tensões, pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1980). Devido à simetria do problema, foi analisado apenas um quarto da chapa, utilizando-se uma malha constituída por 39x39 subvolumes nas direções radial e circunferencial, respectivamente. A Figura 6 exhibe os resultados obtidos com a presente formulação e a solução analítica. Como se observa, os resultados numéricos apresentaram uma boa concordância com àqueles provenientes da solução analítica.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentada uma formulação em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos voltada para análise de tensões de estruturas axissimétricas. Com o objetivo de verificar a formulação proposta, foram analisados três problemas cujas soluções analíticas são fornecidas pela Teoria da Elasticidade Linear. A comparação dos resultados numéricos com os obtidos a partir das soluções analíticas confirmaram a eficiência da mencionada formulação na análise bidimensional de estruturas axissimétricas.

## AGRADECIMENTOS

Ao LCCV (Laboratório de Computação Científica e Visualização) do Campus do Sertão, por disponibilizar a infraestrutura necessária à realização desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bansal, Y., & Pindera, M. J. (2003). Efficient reformulation of the thermoelastic higher-order theory for functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, 26(11-12), 1055-1092.
- Cavalcante, M. A. A., & Marques, S. P. C. (2005). Análise Termoelástica Transiente de Estruturas Radialmente Simétricas de Materiais Compósitos com Gradação Funcional. In *Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational methods in Engineering CILAMCE*.
- Cavalcante, M. A., Marques, S. P., & Pindera, M. J. (2007). Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials—part I: analysis. *Journal of Applied Mechanics*, 74(5), 935-945.
- Cavalcante, M. A., & Pindera, M. J. (2012). Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics - Part I: Framework. *Journal of Applied Mechanics*, 79(5), 051006.
- Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1980). *Teoria da Elasticidade* (3ª ed.). (S. F. Villaça, H. L. Soriano, & H. S. Souza, Trads.) Rio de Janeiro: Guanabara Dois.
- VAZ, L. E. (2011). *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier.