DESENVOLVIMENTO DE UM PRÉ-PROCESSADOR PARA ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Pedro Luiz Rocha

Evandro Parente Junior

pedroluizrr04@gmail.com

evandroparentejr@gmail.com

Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização, Universidade Federal do Ceará

Campus do Pici – Bloco 728, 60440-900, Fortaleza - CE, Brasil

Resumo. *A Análise Isogeométrica (AIG) é uma alternativa recente para a solução de problemas de engenharia, incluindo a análise de tensões em sólidos e estruturas. Esta abordagem tem muitas características em comum com o Método dos Elementos Finitos (MEF), mas tem como vantagem sobre este a capacidade de representar de forma exata geometrias complexas. Isso se deve à AIG utilizar na solução numérica das equações governantes do problema as mesmas funções utilizadas pelos sistemas CAD para a modelagem geométrica, como as B-Splines e NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Os modelos gerados pelas NURBS são definidos em função de um conjunto de pontos de controle, pesos e de intervalos paramétricos (knot vector), representando exatamente tanto formas livres quanto círculos, cilindros e quádricas. O refinamento das NURBS utilizadas na AIG é realizado utilizando os algoritmos de inserção de knot e elevação de grau, bastante utilizados na modelagem geométrica. Considerando estes aspectos, neste trabalho foi desenvolvida uma interface que realiza o pré-processamento para AIG baseado no refinamento de NURBS. A partir de uma geometria inicial, o programa permite a geração de um modelo para a AIG com o grau de refinamento escolhido pelo usuário. Os atributos do modelo, como material, carregamento e condições de contorno, são aplicados na geometria e depois associados à malha. Desta forma, o programa desenvolvido é capaz de gerar modelos completos para a AIG, possibilitando a visualização destes, e escrevê-los no formato requerido pelo programa de análise numérica. Este programa foi utilizado na análise de várias estruturas de forma complexa obtendo-se excelentes resultados.*

Palavras-chave: *Análise Isogeométrica, NURBS, Interface Gráfica*

1 INTRODUÇÃO

A grande maioria dos problemas de engenharia atualmente é solucionada utilizando-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), desde a análise de tensões e deslocamentos até o escoamento de fluidos.

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma alternativa recente ao MEF, que utiliza na solução numérica das equações governantes do problema as mesmas funções utilizadas pelos sistemas CAD para a modelagem geométrica, como as B-Splines e as NURBS (Cottrell et al., 2009).

As NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*) são modelos matemáticos amplamente utilizados atualmente para modelagem geométrica sendo ferramenta essencial tanto em CAD como nas indústrias cinematográfica e do entretenimento.

Similar ao MEF, também é possível realizar o refinamento do modelo NURBS, preparando-o para a AIG. Com base nesses conceitos, o foco da pesquisa foi o desenvolvimento de uma interface gráfica capaz de realizar o pré-processamento para AIG baseado no refinamento de NURBS.

A partir de uma geometria inicial, o programa permite a geração de modelos para a AIG refinados de acordo com as definições do usuário, escrevendo-os no formato requerido pelo programa de análise numérica, facilitando a entrada de dados e minimizando o tempo necessário para a realização da análise.

2 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

O MEF consiste na discretização do modelo analisado em pequenos elementos, possibilitando somente soluções aproximadas para o problema. A principal vantagem da AIG em comparação ao MEF é sua capacidade de representar de forma exata geometrias complexas, como placas e cascas (Cottrell et al., 2009).

A AIG vem sendo cada vez mais utilizada não somente por sua capacidade de representação, como também por sua facilidade de modificação e avaliação do modelo, possibilitando o refinamento do mesmo enquanto sua geometria permanece intacta, propriedades inerentes às NURBS (Hughes et al., 2005).

De acordo com Piegl e Tiller (1997), as NURBS são curvas definidas ao longo de intervalos paramétricos, em função de um conjunto de pontos de controle, pesos, associados a cada um desses pontos e vetores de *knots*, conjuntos de valores paramétricos crescentes e não-negativos delimitados pelos intervalos paramétricos do modelo.

A equação para o cálculo de um ponto qualquer de uma curva NURBS é expressa por:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i N_{i,p}(\xi)\mathrm{p_i}}{\sum_{i=1}^{n} w_i N_{i,p}(\xi)} \tag{1}$$

onde p_i é o ponto de controle, w_i é o peso associado e $N_{i,p}$ é a função de base do ponto, definida pela fórmula recursiva de Cox-de Boor:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{2}$$

para certo vetor de *knots* delimitado pelo intervalo paramétrico $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, onde n é o número de funções de base e p é o grau da curva. Superfícies e sólidos NURBS são formados por produto tensorial de duas e três funções de base univariantes, respectivamente.

Após a geração da NURBS, a geometria da mesma pode ser refinada, utilizando os algoritmos de inserção de *knots* e elevação de grau, bastante utilizados na modelagem geométrica (Piegl e Tiller, 1997). Estes algoritmos alteram a descrição da NURBS sem alterar sua geometria.

A inserção de *knots* subdivide os intervalos paramétricos iniciais do modelo em regiões denominadas *knot spans*. Essa discretização (refinamento h) garante maior controle local do modelo. A elevação de grau é realizada nas diferentes direções paramétricas, aumentando assim o grau das funções base do modelo (refinamento p) e garantindo melhor solução numérica da análise. Aplicando ambos os algoritmos ao modelo (refinamento k), resulta em um modelo de maior grau e maior continuidade entre os elementos (*knot spans*).

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

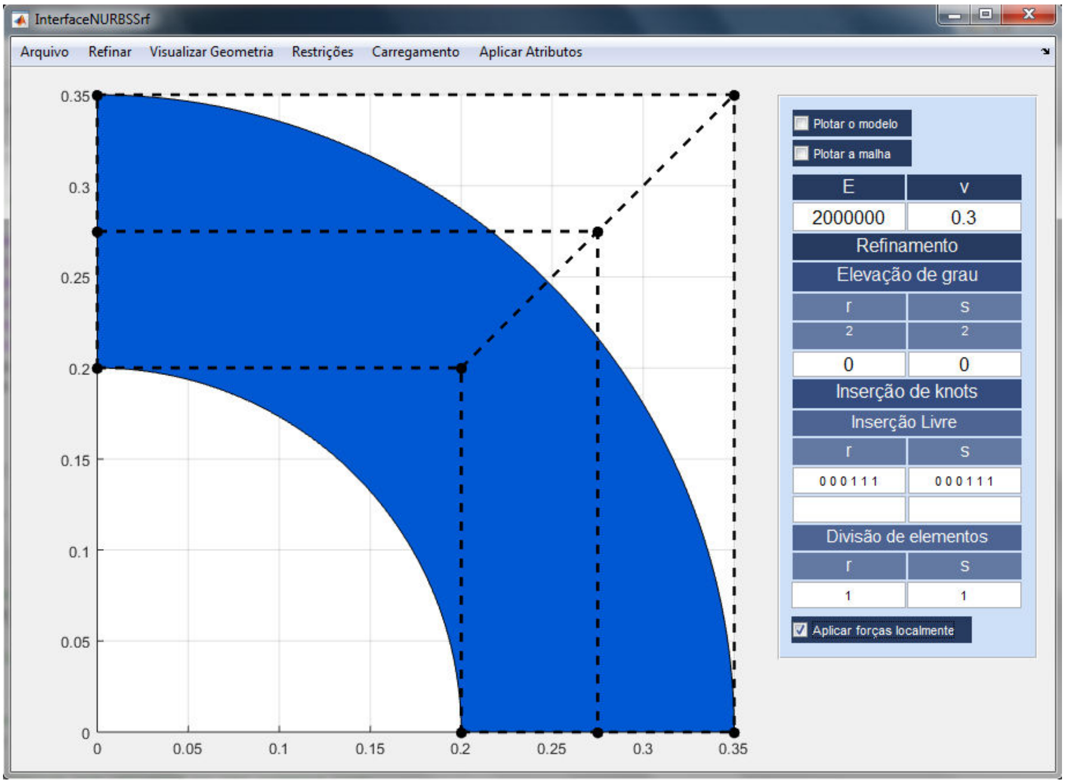

Figura 1. Interface gráfica para o pré-processamento de NURBS.

A interface gráfica, mostrada na Figura 1, foi implementada no software MATLAB, que possui uma base de ferramentas para este fim (Chapman, 2011). Foi utilizada uma biblioteca de NURBS desenvolvida inicialmente para o programa Octave.

O programa recebe inicialmente os dados da geometria a ser modelada (pontos de controle, pesos e vetores de *knots*), montando o modelo inicial e disponibilizando sua visualização. Em seguida o usuário escolhe qual o refinamento (h, p ou k) a ser aplicado e a intensidade do mesmo. Ao executá-lo, o modelo refinado é gerado e representado graficamente, como ilustrado na Figura 2.

Em seguida são inseridos os dados do material e as restrições e carregamentos a serem aplicados. Com essas informações o arquivo de entrada é gerado com as informações necessárias para a análise. A AIG então é realizada pelo programa de análise, gerando um arquivo contendo os dados de deslocamentos e tensões aplicadas sobre a malha refinada.

4 RESULTADOS

A fim de ilustrar a capacidade da AIG e do programa desenvolvido, será utilizado como exemplo a análise de tensões em um cilindro espesso submetido à pressão interna (problema de Lamé), como ilustrado na Figura 2.

A solução analítica desse problema para o deslocamento radial é dada por:

$$u(r) = \left(\frac{1-\nu}{E} \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2) r} \right) \mathrm{p} \tag{3}$$

onde $u(r)$ é o deslocamento radial, R_i é o raio interno do cilindro, R_e é o raio externo do cilindro, E é o Módulo de Elasticidade, ν é o Coeficiente de Poisson e p é a pressão interna.

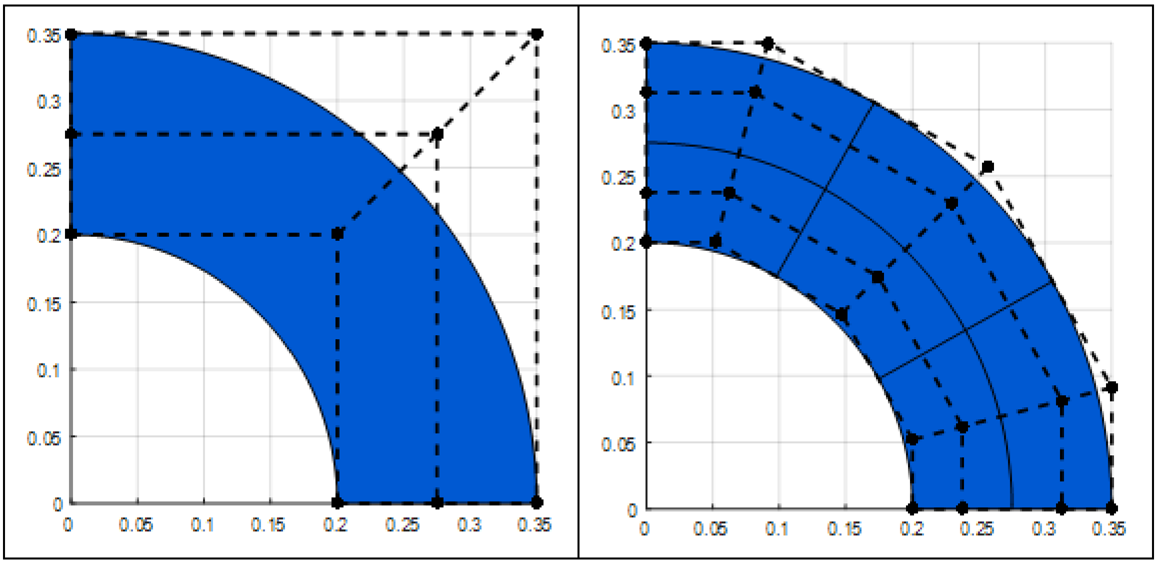

Figura 2. Modelo inicial e modelo após refinamento *h*.

Foram realizados refinamentos de diferentes intensidades, de forma a avaliar a convergência dos resultados obtidos. Para tal, calculou-se o erro de deslocamento (e) do ponto de controle com coordenada x = 0.2 e y = 0, localizado no raio interno do cilindro, comparando o valor obtido pela análise (u_{IGA}) com o analítico (u):

$$e = \frac{u_{IGA} - u}{u} \tag{4}$$

Os resultados mostram que à medida que os erros são progressivamente reduzidos à medida que aumenta a discretização e o grau do modelo. Verifica-se que tanto o aumento do grau dos polinômios (refinamento *p*) quando a redução no tamanho dos elementos (refinamento *h*) contribuem para a redução do erro. É interessante notar que os erros obtidos no caso de polinômios de graus elevados são muitos pequenos, mesmo utilizando poucos elementos.

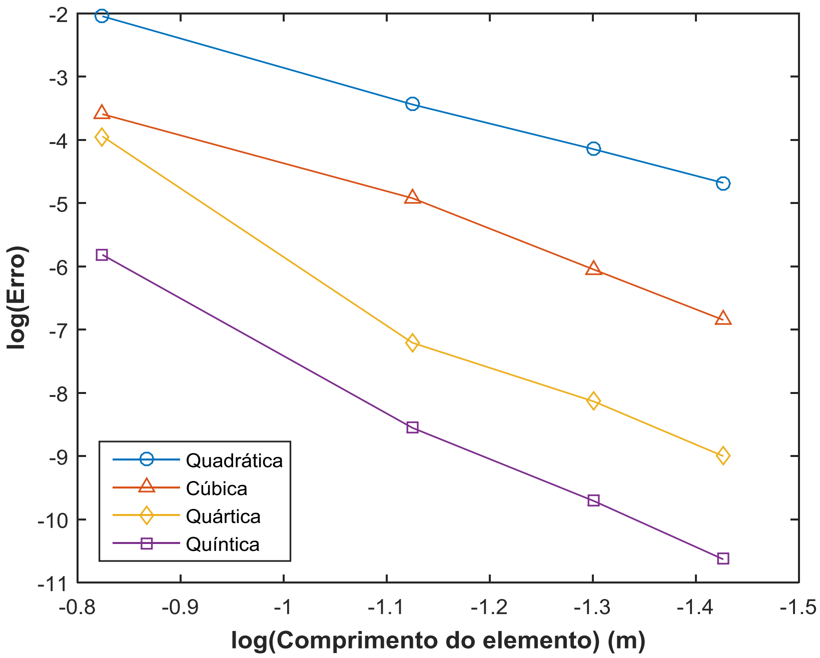

Figura 3. Convergência dos resultados para diferentes refinamentos.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi desenvolvido um pré-processador para Análise Isogeométrica (IGA) de modelos bidimensionais. Este programa possui uma interface gráfica simples e intuitiva que facilita a aplicação dos refinamentos *h* e *p* a um modelo plano e geração dos dados necessários para à análise numérica, minimizando o tempo necessário para a realização da AIG. O programa foi validado através de análise de um problema cuja solução analítica é conhecida, o que permitiu o estudo da convergência da resposta com a discretização. Excelentes resultados foram obtidos.

REFERÊNCIAS

Chapman, S. J., 2011. *Programação em MATLAB para Engenheiros*. Cengage Learning.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., & Bazilevs, Y., 2009. *Isogeometric analysis: Toward integration of cad and fea*. John Wiley & Sons, Inc.

Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y., 2005. *Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, n. 39–41, p. 4135 – 4195, 2005.

Piegl, L., & Tiller, W., 1997. *The NURBS Book*. Springer Publishing.