



AVALIAÇÃO DA RESISTÊNCIA DE MATERIAIS COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS LONGAS UNIDIRECIONAIS EMPREGANDO MODELOS DA MICROMECAÂNICA

Alex Oliveira da Silva

Márcio André Araújo Cavalcante

alex.oliveira@ctec.ufal.br

marcio.cavalcante@ctec.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Rodovia AL 145, Km 3, Nº 3849, Cidade Universitária, Delmiro Gouveia, Alagoas, Brasil.

Resumo. *O emprego de materiais compósitos nas mais diversas áreas da engenharia se justifica por algumas características apresentadas pelos mesmos que não estão presentes nos materiais convencionais. A principal diferença está na possibilidade de projetá-los, com o intuito de atender demandas específicas da indústria, por meio da combinação de diferentes materiais constituintes e da adoção de diferentes configurações microestruturais. Os materiais compósitos podem apresentar propriedades que não poderiam ser atendidas pelos seus constituintes isoladamente, além da possibilidade de serem projetados visando-se um desempenho mecânico otimizado. No entanto, diferentemente dos materiais convencionais, na sua maioria homogêneos e isotrópicos, os materiais compósitos apresentam heterogeneidade e anisotropia, tornando a análise mecânica dos mesmos mais complexa. A micromecânica de materiais heterogêneos se utiliza de técnicas de homogeneização, de modelos analíticos e de simulações numéricas para a obtenção das propriedades macroscópicas efetivas destes materiais, além de possibilitar a realização de análises de tensões e uma melhor compreensão dos seus mecanismos de falha. Neste trabalho, propõem-se a utilização de modelos micromecânicos baseados na teoria da elasticidade linear (CCA e Auto-Consistente Generalizado) para avaliação dos parâmetros de resistência e geração das superfícies de falha de materiais compósitos com constituintes isotrópicos e reforçados por fibras longas unidirecionais. Apresenta-se ainda comparações destes parâmetros de resistência com aqueles obtidos por expressões e valores experimentais encontrados na literatura e das superfícies de falha geradas pelos modelos micromecânicos com aquelas obtidas por critérios de falha polinomiais iterativos (Tsai-Hill e Tsai-Wu).*

Palavras-Chave: *Materiais Compósitos Reforçados por Fibras; Modelo CCA; Modelo Auto-Consistente Generalizado; Superfície de Falha; Critérios de Falha Polinomiais Iterativos.*

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são materiais que consistem em um sistema de duas ou mais fases em escala macroscópica, em que são projetados para apresentar propriedades e desempenho mecânico superiores aos dos materiais constituintes agindo de forma isolada (Kaw, 2006). Uma das fases normalmente é rígida e resistente, chamada de reforço, enquanto que a outra fase é menos rígida e mais fraca, conhecida como matriz. Os reforços sempre estão imersos na matriz, estes têm como função suportar os carregamentos transmitidos pela matriz, e a matriz por sua vez tem como papel manter os reforços unidos e transferir a tensão de um para o outro.

As propriedades dos materiais compósitos dependem das propriedades dos materiais constituintes, assim como da geometria e da distribuição das fases. No caso dos materiais compósitos reforçados por fibras, um dos parâmetros mais importantes é a fração volumétrica de fibras, que representa a proporção em volume de fibras no material compósito. Dentre as vantagens apresentadas pelos materiais compósitos em relação aos materiais convencionais, destacam-se: altas razões rigidez/peso e resistência/peso, excelente resistência à corrosão, baixa expansão térmica, isolamento térmico e acústico, bom desempenho com relação à fadiga, tolerância ao dano, facilidade de transporte e manuseio, além do baixo consumo de energia na fabricação do material (Jones, 1999).

Por conta dessas vantagens, justifica-se a aplicação dos materiais compósitos em diversos setores industriais, como, aeroespacial, aéreo, automotivo, construção, transporte marítimo e artigos esportivos, onde pode-se verificar o seu emprego em aeronaves militares, plataformas de lançamento de nave espacial, aeronaves civis, antenas espaciais, carros de corrida de alto desempenho, colunas de pontes em áreas de atividade sísmica, reforço de vigas e tabuleiros de ponte, torres elétricas, cascos de embarcações que vão desde pequenos barcos de pesca até grandes iates de corrida, navios de guerra, pás para grandes turbinas eólicas, tubos para gases oriundos da exploração do petróleo, esquí, prancha de surfe, raquetes de tênis, tacos de golfe e varas de pesca.

Entretanto, pode-se verificar que a indústria não realiza uma análise de resistência adequada dos materiais compósitos, optando-se pela realização de procedimentos experimentais onerosos, que visam a determinação das tensões de ruptura nas direções principais destes materiais, algo que precisa ser feito para as diversas configurações possíveis, definidas por vários parâmetros de projeto, o que inclui a fração volumétrica de fibras. Destaca-se ainda que, ao fim do procedimento experimental, nem sempre é possível identificar onde houve a falha (a nível de constituinte), sabe-se somente que o material compósito falhou para determinado carregamento aplicado.

Isso acontece devido as características dos materiais compósitos, que apresentam heterogeneidade e anisotropia, diferentemente dos materiais convencionais, na sua maioria homogêneos e isotrópicos, levando-se à necessidade de uma análise mecânica mais complexa para obter as propriedades macroscópicas efetivas destes materiais, e para compreender melhor as distribuições de tensões e seus mecanismos de falha. Para isso, faz-se uso da micromecânica de materiais heterogêneos, utilizando-se de técnicas de homogeneização, de modelos analíticos e de simulações numéricas.

Neste trabalho, apresenta-se uma análise de resistência de materiais compósitos com matrizes isotrópicas reforçadas por fibras longas unidirecionais também isotrópicas, onde os parâmetros de resistência e as superfícies de falha são obtidos com base nos campos de tensão gerados pelos modelos micromecânicos, CCA e Três Fases, e empregando critérios de

resistência para materiais isotrópicos a nível de constituinte, no caso da metodologia proposta, os critérios de von Mises e da máxima tensão, para materiais dúcteis e frágeis, respectivamente. Desta forma, esta metodologia permite identificar a falha a nível de constituinte. Os parâmetros de resistência avaliados pela metodologia proposta são comparados com aqueles obtidos por expressões baseadas na Resistência dos Materiais e com valores experimentais encontrados na literatura. Além disso, as superfícies de falha geradas pela metodologia proposta são comparadas com as obtidas por critérios de falha polinomiais interativos, como os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

2 CRITÉRIOS DE FALHA PARA MATERIAIS COMPÓSITOS REFORÇADOS POR FIBRAS LONGAS UNIDIRECIONAIS

As teorias de falha macromecânicas para materiais compósitos foram desenvolvidas a partir das teorias de falha para materiais isotrópicos, levando-se em conta a anisotropia dos compósitos quanto a rigidez e a resistência (Daniel e Ishai, 1994). Todas essas teorias são baseadas no comportamento elástico linear do material, e podem ser expressas a partir dos parâmetros de resistência referentes aos eixos principais das lâminas de material compósito, que são:

- $(S_x)^T$, Resistência a tração longitudinal na direção x,
- $(S_x)^C$, Resistência a compressão longitudinal na direção x,
- $(S_y)^T$, Resistência a tração transversal na direção y,
- $(S_y)^C$, Resistência a compressão transversal na direção y,
- S_{xy} , Resistência ao cisalhamento no plano x-y,

onde x e y são os eixos longitudinais e transversais às fibras, respectivamente.

2.1 Teoria de Falha de Tsai-Hill

Esta teoria é baseada no critério da máxima energia de distorção para materiais isotrópicos, ou critério de von Mises, onde são realizadas modificações para materiais anisotrópicos. A energia de distorção é uma das parcelas da energia de deformação de um corpo, pois a mesma consiste de duas parcelas, uma relacionada com a mudança de volume do corpo, denominada de energia de dilatação, e a segunda com a mudança de forma, conhecida como energia de distorção. Desta forma, supõe-se que a falha no material ocorre somente quando a energia de distorção é maior do que a energia de distorção de falha do material. Assim, chega-se na seguinte relação para o critério de falha de Tsai-Hill, aplicada às lâminas de materiais compósitos:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{(S_x)^T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{(S_y)^T}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{((S_x)^T)^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{xy}}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

2.2 Teoria de Falha de Tsai-Wu

Esta teoria de falha baseia-se no critério da energia total de deformação de Beltrami. Nesta teoria, Tsai e Wu (1971) aplicaram este critério de falha para um material compósito em estado plano de tensão. A falha ocorre de acordo com a condição a seguir:

$$H_1\sigma_{11} + H_2\sigma_{22} + H_6\sigma_{12} + H_{11}(\sigma_{11})^2 + H_{22}(\sigma_{22})^2 + H_{66}(\sigma_{12})^2 + 2H_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} = 1. \quad (2)$$

onde $H_1 = \frac{1}{(s_x)^T} - \frac{1}{(s_x)^C}$; $H_{11} = \frac{1}{(s_x)^T(s_x)^C}$; $H_2 = \frac{1}{(s_y)^T} - \frac{1}{(s_y)^C}$; $H_{22} = \frac{1}{(s_y)^T(s_y)^C}$; $H_6 = 0$ e $H_{66} = \frac{1}{(s_{xy})^2}$.

O termo H_{12} pode ser obtido por meio de um ensaio biaxial. Segundo Narayanaswami e Adelman (1977), este termo é geralmente insignificante para aplicações em engenharia, sugerindo assumi-lo nulo. Algumas expressões empíricas para esse termo são apresentadas nas Eqs. (6-8), no entanto, será adotado neste trabalho o valor de H_{12} apresentado na Eq. (8).

$$H_{12} = -\frac{1}{2((s_x)^T)^2}, \text{ (Hill, 1950).} \quad (3)$$

$$H_{12} = -\frac{1}{2(s_x)^T(s_x)^C}, \text{ (Hoffman, 1967).} \quad (4)$$

$$H_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(s_x)^T(s_x)^C(s_y)^T(s_y)^C}}, \text{ (Tsai, 1980).} \quad (5)$$

Vale ressaltar que esta teoria é mais geral que a teoria de falha de Tsai-Hill, pois faz uma distinção entre às resistências à tração e à compressão do material.

3 MODELOS MICROMECAÑICOS BASEADOS NA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

3.1 Modelo CCA (Composite Cylinder Assemblage Model)

Neste trabalho, propõe-se a utilização do modelo micromecânico CCA (Composite Cylinder Assemblage), proposto por Hashin e Rosen (1964), em que o compósito é representado por um conjunto de cilindros concêntricos, onde as fibras são consideradas infinitamente longas com formato cilíndrico e a matriz contínua. O modelo é mostrado na Fig. 1(a), onde cada fibra de raio a apresenta no seu entorno uma matriz de raio interno a e raio externo b . Pode-se notar que os cilindros não têm o mesmo raio, pois os mesmos devem variar de forma que os cilindros possam preencher completamente o volume do compósito. Entretanto, as frações volumétricas dos constituintes permanecem as mesmas para todos os cilindros, incluindo aqueles cujo raio tende a zero. Nesse modelo, o cilindro de compósito é submetido a condições de contorno homogêneas, ou seja, a deslocamentos ou a tensões de superfície que geram campos de deformações ou de tensões uniformes equivalentes em um cilindro homogêneo.

As mesmas condições de contorno homogêneas são aplicadas à todos os cilindros de compósito, logo, os campos resultantes são cinematicamente ou estaticamente admissíveis e semelhantes em todos os cilindros de compósito que compõem o modelo (Dvorak, 2013). Aplicando-se as condições de contorno homogêneas e os teoremas de energia mínima, é possível obter as propriedades macroscópicas efetivas do material e determinar os campos de tensões no cilindro, conhecendo-se assim a distribuição de tensões no compósito.

3.2 Modelo Auto-Consistente Generalizado (Modelo de Três Fases)

Para esse trabalho, também será utilizado o modelo Auto-Consistente Generalizado (*Generalized Self-Consistent Method*, sigla GSCM), também conhecido como modelo de Três Fases, desenvolvido por Christensen e Lo (1979) e Christensen (1990), que consiste em um único elemento compósito cilíndrico ou esférico de duas fases, similar ao modelo CCA,

embebido em um meio homogêneo infinito de propriedades efetivas desconhecidas, que está submetido a condições de contorno homogêneas a grandes distâncias a partir da origem, Christensen (1979). Contudo, é necessário que o meio efetivo homogêneo possua as mesmas condições médias de tensão e de deformação que o elemento compósito. Assim, o modelo apresentado na Fig. 1(b) equivale a um material completamente homogêneo.

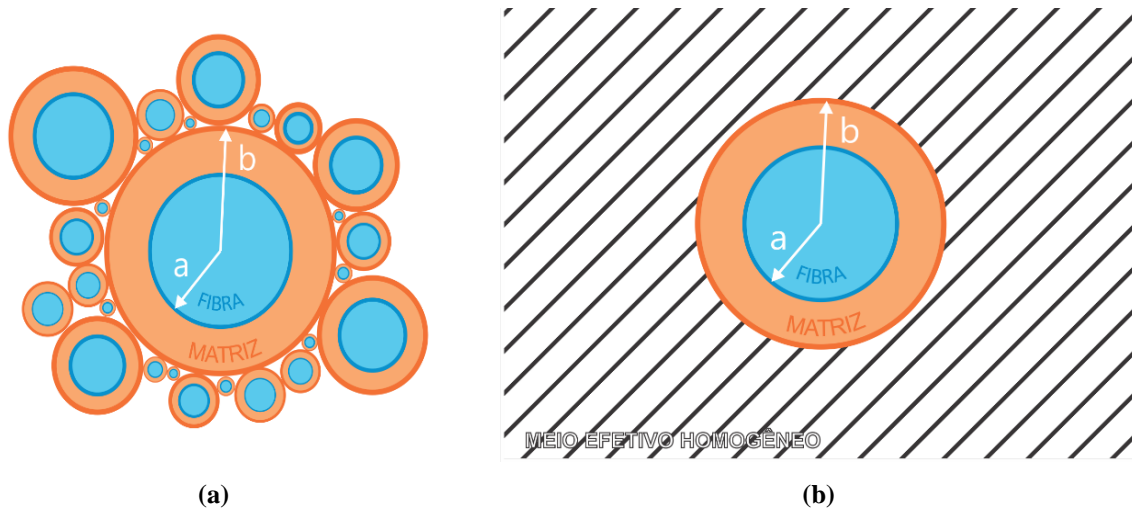


Figura 1. Modelos da micromecânica: CCA (a) e Três Fases (b).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Campos de Tensão para Casos Particulares de Tensão Macroscópica

Através dos dois modelos micromecânicos, CCA e Três Fases, foram obtidos os campos de tensão para os seguintes casos de tensão macroscópica: tensão macroscópica uniaxial na direção das fibras, tensão macroscópica hidrostática em estado plano de deformação, tensão macroscópica de cisalhamento longitudinal e tensão macroscópica de cisalhamento transversal. Para o caso de tensão macroscópica uniaxial na direção transversal às fibras foi utilizado o princípio da superposição dos efeitos, superpondo os campos de tensão para os casos de tensão macroscópica hidrostática em estado plano de deformação, tensão macroscópica de cisalhamento transversal e tensão macroscópica uniaxial na direção das fibras. As propriedades dos materiais constituintes utilizadas nas análises que se seguem encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades mecânicas dos materiais constituintes

Constituinte	$E(MPa)$	$G(MPa)$	$(\sigma)_{ult}(MPa)$	$(\tau)_{ult}(MPa)$	$(\epsilon)_{ult}(\%)$	$(\gamma)_{ult}$
<i>Matriz Epoxy</i>	4080	1478	98,9	110,8	2,42	0,075
<i>Fibra E-glass</i>	72395	30336,9	2150	-	2,97	-

Vale ressaltar que o modelo CCA não se trata de um elemento de volume representativo (*Representative Volume Element*, sigla RVE) para os casos de tensão macroscópica de cisalhamento transversal e de tensão macroscópica uniaxial na direção transversal às fibras, uma vez que diferentes respostas seriam obtidas para condições de contorno homogêneas em deslocamento e em tensão. Por outro lado, o modelo de Três Fases apresenta respostas

idênticas para condições de contorno homogêneas em deslocamento e em tensão para todos os casos de tensão macroscópica citados anteriormente. Destaca-se ainda que os campos de tensão para os casos de tensão macroscópica em que o modelo CCA se comporta como elemento de volume representativo são iguais aos obtidos pelo modelo de Três Fases. Assim, foram gerados os campos de tensão para o caso de tensão macroscópica uniaxial na direção transversal às fibras, onde os modelos apresentam diferentes respostas, Fig. 2. Neste caso, é utilizada uma condição de contorno homogênea em tensão para o modelo CCA, que corresponde a um limite inferior para o módulo de elasticidade transversal efetivo e, segunda a literatura, representa uma melhor estimativa em comparação ao limite superior, quando se aplica uma condição de contorno homogênea em deslocamento, Dvorak (2013).

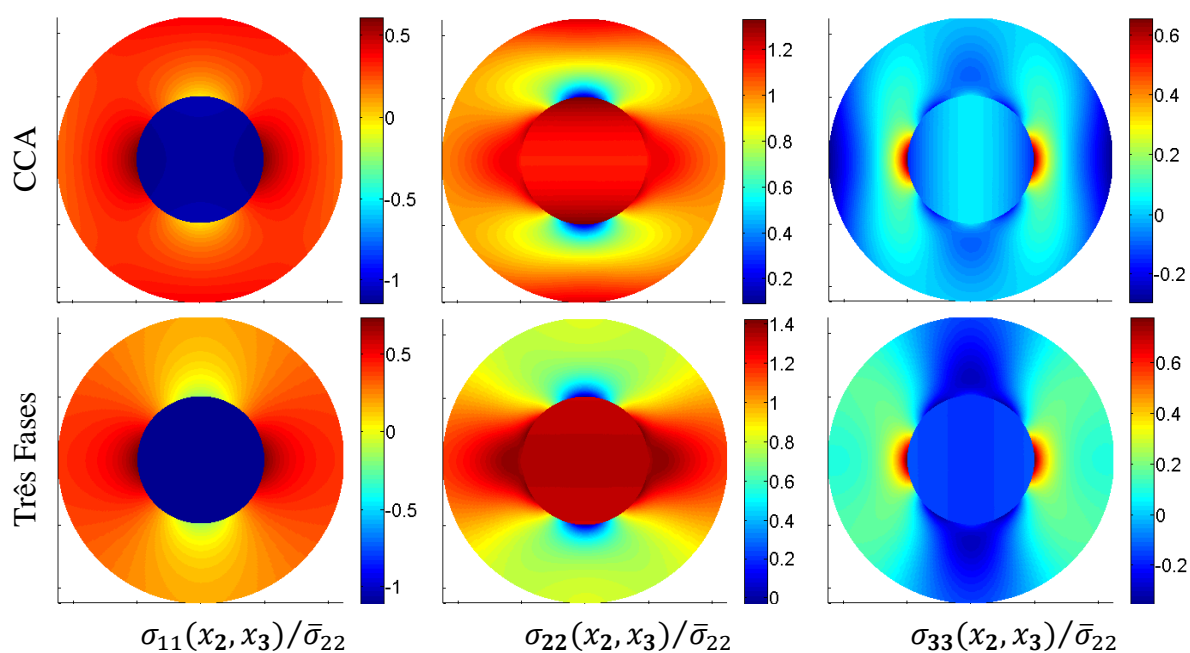


Figura 2. Campos de tensão para o caso de tensão macroscópica uniaxial na direção transversal às fibras ($\bar{\sigma}_{22} \neq 0$).

4.2 Avaliação dos Parâmetros de Resistência

A avaliação dos parâmetros de resistência do material compósito pode ser feita a partir das propriedades individuais dos materiais constituintes, fibra e matriz, empregando fórmulas baseadas na Resistência dos Materiais. A avaliação dos parâmetros de resistência é mais complicada em comparação aos parâmetros de rigidez, visto que a resistência é mais sensível à não homogeneidade do material, à geometria, à interfase fibra-matriz, ao processo de fabricação e ao ambiente (Kaw, 2006). Por essas razões, alguns modelos teóricos e empíricos estão disponíveis para determinar esses parâmetros de resistência, contudo, é preferível realizar uma avaliação experimental, pois nos permite encontrar valores mais confiáveis. A Tabela 2 traz expressões baseadas na Resistência dos Materiais para avaliação dos parâmetros de resistência do material compósito reforçado por fibras longas unidirecionais, onde as propriedades elásticas efetivas empregadas nestas expressões foram obtidas pelo modelo de Três Fases.

Tabela 2. Expressões para avaliação dos parâmetros de resistência do material compósito

Parâmetros de Resistência	Expressões baseadas na Resistência dos Materiais
Resistência longitudinal à tração	$(S_x)^T = E_{11}(\varepsilon_f)_{ult}$
Resistência transversal à tração	$(S_y)^T = E_{22} \left[\frac{d}{s} \frac{E_m}{E_f} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] (\varepsilon_m^T)_{ult}$
Resistência ao cisalhamento	$S_{xy} = G_{12} \left[\frac{d}{s} \frac{G_m}{G_f} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] (\gamma_m)_{ult}$

E_{11} = módulo de elasticidade longitudinal do compósito; E_{22} = módulo de elasticidade transversal do compósito;
 G_{12} = módulo de elasticidade angular do compósito; E_m = módulo de elasticidade da matriz;
 E_f = módulo de elasticidade da fibra; G_m = módulo de elasticidade angular da matriz;
 G_f = módulo de elasticidade angular da fibra; $(\varepsilon_f)_{ult}$ = deformação normal última da fibra;
 $(\varepsilon_m^T)_{ult}$ = deformação normal última à tração da matriz; $(\gamma_m)_{ult}$ = deformação angular última da matriz.

A relação d/s está relacionada à forma como as fibras estão distribuídas ao longo do plano de isotropia do material compósito (Kaw, 2006). A Figura 3 ilustra dois possíveis arranjos de fibra encontrados na literatura, onde s representa o espaçamento entre os centroides de cada fibra, e d o diâmetro das fibras. Para o caso de arranjos quadráticos, tem-se $d/s = \left(\frac{4 \times f_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$, enquanto que para arranjos hexagonais, tem-se $d/s = \left(\frac{2 \times \sqrt{3} \times f_f}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$.

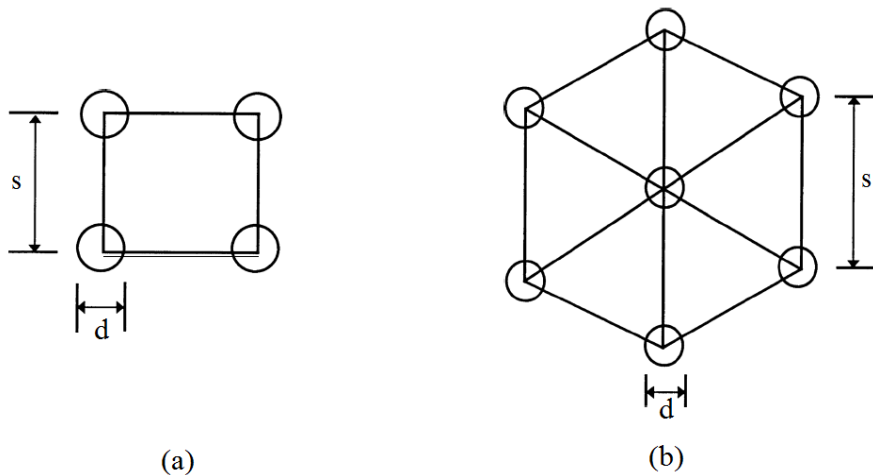


Figura 3. Espaçamento entre fibras para arranjos quadrático (a) e hexagonal (b).

Na Tabela 3, encontram-se os resultados obtidos para os parâmetros de resistência para um material compósito com matriz *Epoxy* e reforçado com fibra *E-glass*, apresentando 55% de fração volumétrica de fibras. Através dos campos de tensões obtidos pelos modelos micromecânicos, CCA e Três Fases, também foi possível avaliar os parâmetros de resistência do material compósito, empregando os critérios de falha de von Mises e da máxima tensão para a matriz polimérica e para as fibras de vidro, respectivamente. No procedimento proposto, considera-se que houve falha no compósito quando há ocorrência de falha em um dos seus constituintes. A nível de constituinte, considera-se a falha quando o seu ponto crítico satisfaz o critério de falha adotado. Além disso, são encontrados na Tabela 3 os valores obtidos experimentalmente para estes parâmetros de resistência.

A resistência longitudinal à tração obtida pelos modelos micromecânicos está mais próxima do resultado experimental em comparação ao valor obtido pela expressão baseada na

Resistência dos Materiais. Para a resistência transversal à tração, a diferença entre os modelos micromecânicos resulta da diferença entre os campos de tensão para a tensão macroscópica aplicada transversalmente, como mostrado na Fig. 2. O modelo de Três Fases prevê uma resistência transversal à tração maior do que o modelo CCA, e um pouco mais distante do valor obtido experimentalmente. Observa-se, ainda, que a resistência transversal à tração obtida pela expressão baseada na Resistência dos Materiais, admitindo-se um arranjo quadrilateral, está mais próxima do valor experimental. Por fim, o valor da resistência ao cisalhamento obtido pelo procedimento proposto está bem abaixo do valor experimental, com uma vantagem considerável para a expressão baseada na Resistência dos Materiais admitindo-se um arranjo hexagonal.

Tabela 3. Resultados obtidos para os parâmetros de resistência

	Resistência dos Materiais		Resultados com o procedimento proposto		Dados Experimentais obtidos por Daniel e Ishai (1994)
	Arranjo Quadrilateral	Arranjo Hexagonal	CCA	Três Fases	
$(S_x)^T$ (MPa)	1250	1250	1014,66	1014,66	1080
$(S_y)^T$ (MPa)	57,79	72,85	81,34	100,56	39
S_{xy} (MPa)	67,62	85,94	38,29	38,29	89

4.3 Geração das Superfícies de Falha

No procedimento proposto, para a geração das superfícies de falha de materiais compósitos, são utilizados critérios de falha para os seus constituintes, considerando o comportamento dúctil ou frágil na falha, e os campos de tensões obtidos pelos modelos micromecânicos. Assim, considera-se que houve falha no compósito quando há ocorrência da falha em um dos constituintes, e a falha no constituinte quando da ocorrência da falha no seu ponto crítico. Para o material compósito analisado a seguir, a nível de constituinte, foram utilizados os critérios de falha de von Mises e da máxima tensão para a matriz polimérica e para as fibras de vidro, respectivamente. Apresenta-se nas Figs. 4 e 5 uma comparação das superfícies de falha geradas pelo procedimento proposto com aquelas obtidas por critérios de falha polinomiais interativos, como os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu, para os estados de tensão $\sigma_{11} \times \sigma_{12}$ e $\sigma_{11} \times \sigma_{22}$, adotando-se 20% e 50% para as frações volumétricas de fibras. Vale ainda ressaltar que os parâmetros de resistência do material compósito utilizados pelos critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu foram obtidos pelo procedimento proposto.

Para o estado de tensão $\sigma_{11} \times \sigma_{12}$, verificou-se que os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu geraram superfícies de falha idênticas, uma vez que está se admitindo que o compósito apresenta o mesmo comportamento na tração e na compressão. Para este estado de tensão, o procedimento proposto apresentou uma excelente concordância com os critérios de falha polinomiais, para ambas as frações volumétricas. No caso das superfícies de falha geradas para o estado de tensão $\sigma_{11} \times \sigma_{22}$, nota-se que há uma pequena diferença entre os critérios de falha de Tsai-Hill e Tsai-Wu. Além disso, para este estado de tensão, o procedimento proposto apresentou uma razoável concordância com os critérios de falha polinomiais.

É importante destacar que o procedimento proposto permite verificar onde ocorreu a falha a nível de constituinte, diferentemente dos critérios polinomiais interativos. Para ambos os casos, verificou-se que a falha acontece somente na matriz.

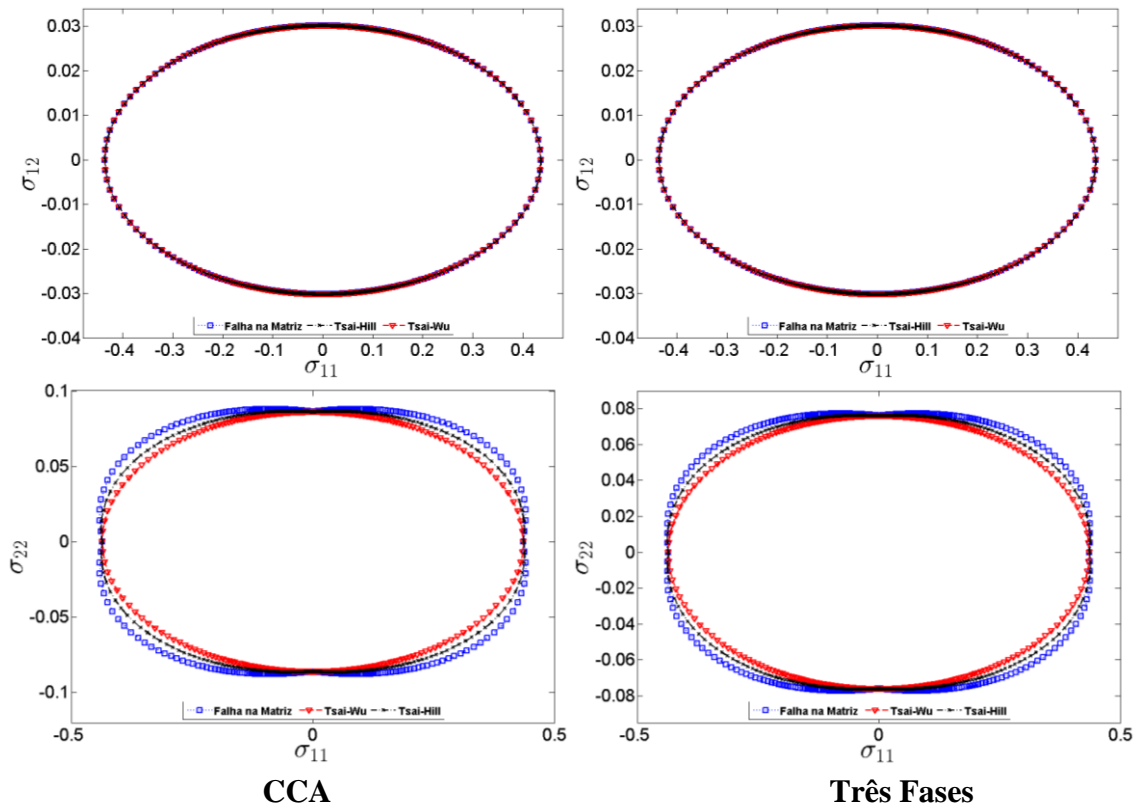


Figura 4. Superfícies de falha para o E-glass/Epoxy com fração volumétrica de fibras de 20%.

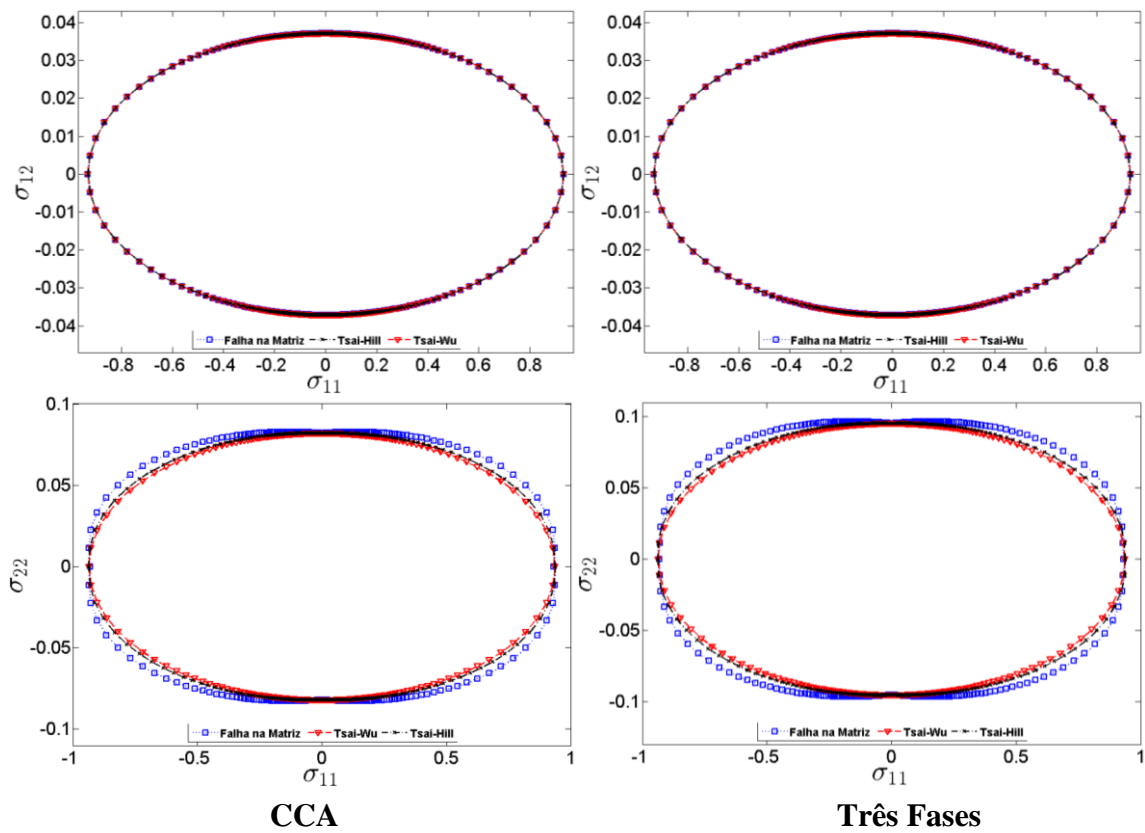


Figura 5. Superfícies de falha para o E-glass/Epoxy com fração volumétrica de fibras de 50%.

5 CONCLUSÕES

Através do procedimento proposto, é possível realizar a avaliação dos parâmetros de resistência e a geração de superfícies de falha de materiais compósitos com constituintes isotrópicos e reforçados por fibras longas unidirecionais, indicando se a falha acontece na fibra ou na matriz. Desta forma, este procedimento é uma importante ferramenta para avaliação da resistência de materiais compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais, considerando-se as várias configurações possíveis, variando-se não apenas os constituintes, mas também suas frações volumétricas, o que resulta numa economia significativa de tempo e de insumos em comparação com ensaios experimentais, normalmente laboriosos e onerosos. Tal procedimento também poderá ser empregado com o auxílio de técnicas de otimização, visando-se um projeto otimizado deste material compósito.

AGRADECIMENTOS

Ao LCCV (Laboratório de Computação Científica e Visualização) do Campus do Sertão, por disponibilizar a infraestrutura necessária à realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Christensen, R. M., 1979. *Mechanics of Composite Materials*. Wiley.
- Christensen, R. M., 1990. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, p. 379-404.
- Christensen, R. M., & Lo, K. H., 1979. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 27, p. 315-330.
- Daniel, I. M., Ishai, O., 1994. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford University Press.
- Dvorak, G. J., 2013. *Micromechanics of Composite Materials*. Springer.
- Hashin, Z., & Rosen, B. W., 1964. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, p. 223-232.
- Hill, R., 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- Hoffman, O., 1967. The brittle strength of orthotropic materials, *Journal of Composite Materials*, vol. 1, p. 200-206.
- Jones, R. M., 1999. *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press.
- Kaw, A. K., 2006. *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press.
- Narayanaswami, R., & Adelman, H. M., 1977. Evaluation of the polynomial and Hoffman strength theories for composite materials. *Journal of Composite Materials*. vol. 11, p. 366-377.
- Tsai, S. W., & Wu, E. M., 1971. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, vol. 5, p.58-80.
- Tsai, S.W., & Hahn, H.T., 1980. *Introduction to Composite Materials*. Technomic.