



## ANÁLISE TERMOELÁSTICA EM CONCRETO MASSA UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Nasser Alkmim**

**Lineu José Pedroso**

nasser.alkmim@gmail.com

lineu@unb.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE). Caixa Postal 04493, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF

Asa Norte, Brasília, 70910-900, DF, Brazil

**Abstract.** *Nesse trabalho serão apresentados os modelos matemáticos para o problema elastodinâmico plano e para o problema da transferência de calor, em seguida suas respectivas discretizações por meio do método dos elementos finitos. Ambos os modelos são utilizados para descrever o problema de indução de tensões causadas por efeitos não mecânico, por exemplo, efeitos térmicos. Em grandes estruturas de concreto massa a indução de tensões por efeitos térmicos pode ser nociva à integridade da estrutura, uma variação de 10°C pode ser suficiente para induzir tensões de tração superiores às tensões últimas resistidas pelo material. Os problemas podem ser tratados de forma independente assumindo que a resposta mecânica não afeta as condições do problema térmico, um pseudo acoplamento que simplifica a implementação computacional. A solução das equações discretas pelo método dos elementos finitos é realizada por meio das bibliotecas `elastopy` e `diffuspy`, produzidas em Python, ambas são softwares livres e estão disponibilizadas através do índice de pacotes PyPi.*

**Keywords:** *Elastodinâmica, Transferência de Calor, Elementos Finitos, Python, Concreto Massa*

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de tensões induzidas por variações térmicas em grandes estruturas de concreto é importante para avaliação da integridade do material quando ao surgimento de fissura e danos em geral. O concreto por ser um material frágil, resiste pouco à deformação de tração. A resistência última do concreto à deformação de tração está entre  $0.6$  a  $1.0 \times 10^{-4}$ , que pode ser causada por uma variação de temperatura entre  $6$  a  $10^\circ C$ , Bofang (2013). A resistência do concreto é afetada negativamente pela variação periódica das tensões que são induzidas pelo gradiente de temperatura, Ballivy, Benmokrane and Chaallal (1991). Leger, Venturelli and Bhattacharjee (1993) apresentam uma metodologia de análise térmica e mecânica de longo prazo para uma barragem gravidade sujeita a diversas condições de contorno térmicas, no entanto, se limita à estimar o valor das tensões por meio de um coeficiente de relaxação do concreto. Daoud, Galanis and Ballivy (1997) apresenta uma análise térmica transiente em uma barragem de concreto gravidade usando o Método dos Elementos Finitos. Kuzmanovic, Savic and Stefanakos (2010) também fazem uma análise térmica em uma barragem e compara modelos bidimensionais e tridimensionais. Cervera, Oliver and Prato (1999) fazem um estudo acoplado do problema térmico, químico e mecânico do concreto e idades recentes onde foca-se na modelagem do fenômeno da geração interna de calor.

No presente artigo, será apresentado a modelagem matemática para tratar do problema termoelástico em estruturas. Os problemas térmicos e mecânicos serão tratados de forma independente, dessa forma, pacotes independentes são criados para resolvê-los, `elastopy` e `diffuspy`. Ambos foram desenvolvidos em Python e estão disponíveis no repositório oficial PyPi. A discretização em elementos é feita utilizando o programa `gmsh`, que gera um arquivo de texto que é interpretado por um módulo do pacote. O pós processamento também é realizado em Python por meio das bibliotecas `matplotlib` e `networkx`.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos matemáticos utilizados para descrever os fenômenos físicos são representados por equações diferenciais. A formulação diferencial é obtida considerando um volume finito representativo do corpo e por meio da operação de limite calculam-se as densidades das variáveis físicas que são funções pontuais.

### 2.1 Elasticidade linear plana

O problema da elasticidade consiste em: *dado* um corpo, suas propriedades, suas restrições de movimento, as forças de superfície, as forças de corpo, um intervalo de tempo, a posição inicial, a velocidade inicial, *encontrar* a posição de todos os pontos do corpo em todo o intervalo de tempo.

As variáveis envolvidas no problema podem ser divididas entre fonte e configuração. As variáveis de fonte<sup>1</sup> para o problema da elasticidade são o *impulso da força volumétrica*, *impulso da força de superfície* e o *momento* contido no corpo. As respectivas *densidades*<sup>2</sup> dessa

---

<sup>1</sup>Variáveis de fonte são aquelas que geram campos ou são a causa de algum fenômeno. Suas densidades também são de fonte, Tonti (2013)

<sup>2</sup>As densidades são quantidades obtidas pela divisão das variáveis globais pela extensão do espaço ou tempo ao qual se referem.

variáveis são *forças de corpo por unidade volumétrica*  $\mathbf{f}$ , *forças de superfície por unidade de área*  $\mathbf{t}$  e *densidade de momento*  $\mathbf{p}$ . As variáveis de configuração<sup>3</sup> são o *deslocamento total*  $\mathbf{u}$ , o *gradiente de deslocamento* e a *velocidade*  $\mathbf{v}$ . As variáveis são então ligadas por meio de equações de campo. A equação que liga as variáveis de fonte do problema dinâmico é o balanço de momento, em sua forma matricial

$$\partial_t \mathbf{p} \stackrel{\text{law}}{=} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

onde,  $\mathbf{D}$  é o operador gradiente simétrico,  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor com as componentes do tensor tensão simétrico e o operador  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ . A conexão entre as variáveis de configuração, deslocamento de deformações específicas  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , é realizada por meio das relações cinemáticas. Em forma matricial é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{D} \mathbf{u}. \quad (2)$$

A conexão entre variáveis de fonte e variáveis de configuração é feita por meio de leis constitutivas do *material*. Nesse trabalho o modelo linear isotrópico é utilizado para relacionar deformação e deslocamento. A densidade de momento também é relacionada por uma relação constitutiva ao deslocamento. Ambas mostradas nas equações abaixo.

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{mat}}{=} \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{p} \stackrel{\text{mat}}{=} \rho \partial_t \mathbf{u},$$

onde,  $\rho$  é a densidade de massa do corpo e  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  é a deformação causada por efeitos não mecânicos.

Explicitamente, as matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são dadas por,

$$\mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \equiv \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Transferência de calor

O problema da transferência de calor consiste em: *dado* um corpo, suas propriedades, as condições de contorno, a distribuição e intensidade de calor gerado no tempo e espaço, um intervalo de tempo, distribuição inicial de temperatura, *encontrar* a temperatura em todos os pontos do corpo e em todo o intervalo de tempo.

As variáveis de fonte são a *densidade de corrente de calor*  $\mathbf{q}$  em  $[W/m^3]$ , a *densidade de energia interna*  $U$  em  $[J/m^3]$  e a *fonte de calor interna*  $\sigma_u$ . As variáveis de configuração são a temperatura  $T$  em  $[^\circ C]$  e o gradiente de temperatura  $\mathbf{g}$  em  $[^\circ C/m]$ .

A ligação entre as variáveis de fonte é dada por uma lei de balanço, Eq. (3), na qual a quantidade física equilibrada é a energia térmica.

$$\partial_t U \stackrel{\text{law}}{=} \nabla^T \mathbf{q} + \sigma_q, \quad (3)$$

onde,  $\nabla^T \equiv [\partial_x \ \partial_y]$ .

<sup>3</sup>Variáveis de configuração são aquelas que descrevem a configuração de um sistema físico, Tonti (2013).

A conexão entre as variáveis de configuração é realizada por meio de uma definição,

$$\mathbf{g} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T. \quad (4)$$

A conexão entre as variáveis de fonte e configuração é obtida por,

$$\mathbf{q} \stackrel{\text{mat}}{=} -\lambda \mathbf{g} \quad \text{e} \quad U \stackrel{\text{mat}}{=} U_0 + \rho c T,$$

onde,  $\lambda$  é a condutividade térmica isotrópica em  $[W/m \cdot ^\circ C]$ ,  $c$  é o calor específico do material em  $[J/kg \cdot ^\circ C]$  e  $U_0$  é a densidade de energia num instante inicial.

### 3 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Discretização é o processo pelo qual reduz-se o número de graus de liberdade da formulação diferencial a um número finito. Nesse trabalho utiliza-se o Método dos Elementos Finitos, Rao (2013); Felippa (2004); Bathe (2006); Zienkiewicz (2005). Inicia-se o método assumindo a forma da solução em subdomínios denominados *elementos*, denotados por sobrescrito “(e)”. A solução assumida depende do tipo de elemento utilizado na divisão do domínio, nesse trabalho utilizou-se o elemento plano de retangular de quatro nós, funções interpoladoras bilineares. Nesse caso a aproximação das variáveis de interesse primário num elemento são dadas por,

$$\mathbf{u}(x, y, t) \approx \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad \text{e} \quad T(x, y) \approx \tilde{\mathbf{N}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)}$$

onde,  $\mathbf{u}^{(e)}$  é o vetor com constantes desconhecidas para cada dimensão e cada um dos 4 nós do elemento,  $\mathbf{T}^{(e)}$  é o vetor com constantes desconhecidas para cada nó. As matrizes  $\mathbf{N}^{(e)}$  e  $\tilde{\mathbf{N}}^{(e)}$  contém a coleção de funções interpoladoras para o problema com 2 graus de liberdade por nó e para 1 grau de liberdade por nó, respectivamente, e são dadas por,

$$\mathbf{N}^{(e)} \equiv \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{N}}^{(e)} \equiv \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}.$$

As funções interpoladoras são funções das coordenadas naturais e podem ser expressas por,

$$N_n(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_n \xi)(1 + \eta_n \eta) \quad (5)$$

onde,  $(\xi_n, \eta_n)$  são as coordenadas de cada um dos 4 nós no espaço isoparamétrico.

Substituindo a solução aproximada nos respectivos problemas na forma fraca, obtém-se um conjunto de equações algébricas que podem ser representadas matricialmente por,

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{P}^{(e)} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{K}}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} = \tilde{\mathbf{P}}^{(e)},$$

nesse caso, utiliza-se a forma estacionária do problema térmico tendo em vista que esse será resolvido em cada passo do problema dinâmico. As matrizes e vetores do problema dinâmico são formadas por,

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^{(e)})^T \rho \mathbf{N}^{(e)} d\Omega^e, \quad (6)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B})^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega^e, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{f} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} (\mathbf{B})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^{(e)})^T \mathbf{t} d\Gamma^e. \quad (8)$$

Nesse caso, a matriz  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{D}\mathbf{N}^{(e)}$ ,  $\Omega^e$  e  $\Gamma^e$  são a superfície e contorno de um elemento respectivamente.

Para o problema térmico têm-se a seguinte matriz e vetor,

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\tilde{\mathbf{B}})^T \lambda \tilde{\mathbf{B}} \, d\Omega^e, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(e)} = \int_{\Omega^e} (\tilde{\mathbf{N}}^{(e)})^T \sigma_q \, d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} (\tilde{\mathbf{N}}^{(e)})^T \Phi \, d\Gamma^e, \quad (10)$$

onde  $\tilde{\mathbf{B}} \equiv \nabla \tilde{\mathbf{N}}^{(e)}$ .

## 4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

A discretização temporal para o problema dinâmico é efetuada por meio do método de Newmark. O intervalo  $[0, t]$  é dividido em  $n$  partes iguais. Dessa forma, utilizando a notação  $f_n = f(nt)$ , o método pode ser utilizando por meio das seguintes relações.

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + t\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2}t^2\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta t^2(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + t\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma t(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n) \end{cases} \quad (11)$$

Isolando  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  na segunda expressão e substituindo na primeira, chega-se a um sistema linear onde a solução é o deslocamento no passo seguinte. Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  são ajustes do método. O método é incondicionalmente estável para o caso  $\beta = 0.25$  e  $\gamma = 0.5$ , Chiba and Kako (1999).

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A modelagem do problema termomecânico dinâmico foi feita utilizando duas bibliotecas produzidas em Python, `elastopy` e `diffuspy`.

A biblioteca `elastopy` permite a solução do problema da elasticidade plana utilizando o Método dos Elementos Finitos com elemento de quatro lados. No problema dinâmico a discretização temporal é realizada utilizando o Método de Newmark. A entrada do programa é a malha em formato padrão produzido pelo software `gmsh`. O problema é definido por um *script* e a solução é obtida chamando as funções `solver` nos módulos estático ou dinâmicos.

A biblioteca `diffuspy` permite a solução do problema da difusão em um plano também utilizando o Método dos Elementos Finitos. Nesse caso será utilizada como difusão de energia térmica, ou problema de transferência de calor. Ela funciona da mesma forma que `elastopy`, um *script* define o problema e a solução é obtida por uma função `solver` dos módulos estacionário e transiente. O problema termoelastodinâmico pode ser resolvido utilizando a rotina apresentada na Fig. 1.

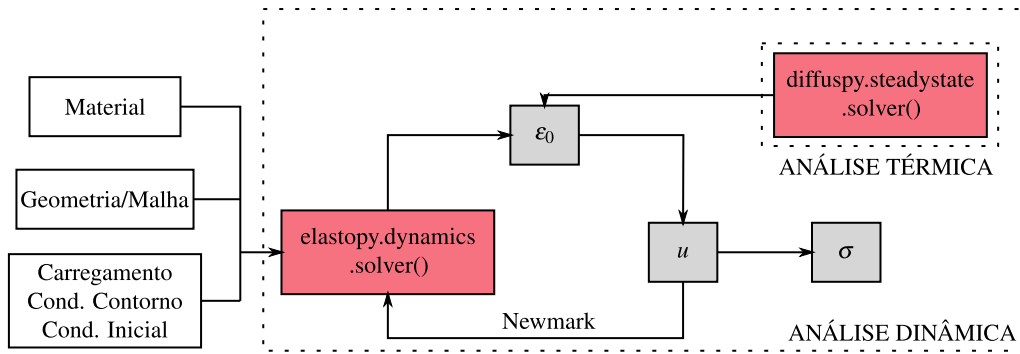


Figura 1: Esquema simplificado da rotina de cálculo realizada através dos pacotes `elastopy` e `diffuspy`.

## 6 RESULTADOS

Um estudo de caso será apresentado para demonstrar a utilização das bibliotecas produzidas. O problema estudado será o de uma barragem de concreto gravidade submetida à solicitações mecânicas da pressão do reservatório e da força gravitacional distribuída no corpo da barragem. As solicitações não mecânicas são a variação da temperatura ao longo de um dia, e a geração de calor interno devido a hidratação do cimento. Ambas as condições de contorno podem ser fornecidas como função no tempo e espaço uma vez que Python permite passar funções como argumento de outras funções. Dessa forma o programa pode ser utilizado na modelagem de problemas utilizando funções obtidas por meio de instrumentação.

A Figura 2(a), produzida utilizando `matplotlib`, mostra a geometria da barragem e a Fig. 2(b), produzida pelo `gmsh`, mostra a malha utilizada. Na Figura 2(b), a malha ainda apresenta o valor do parâmetro `gamma` que mede a qualidade dos elementos. Foram utilizados 436 elementos.

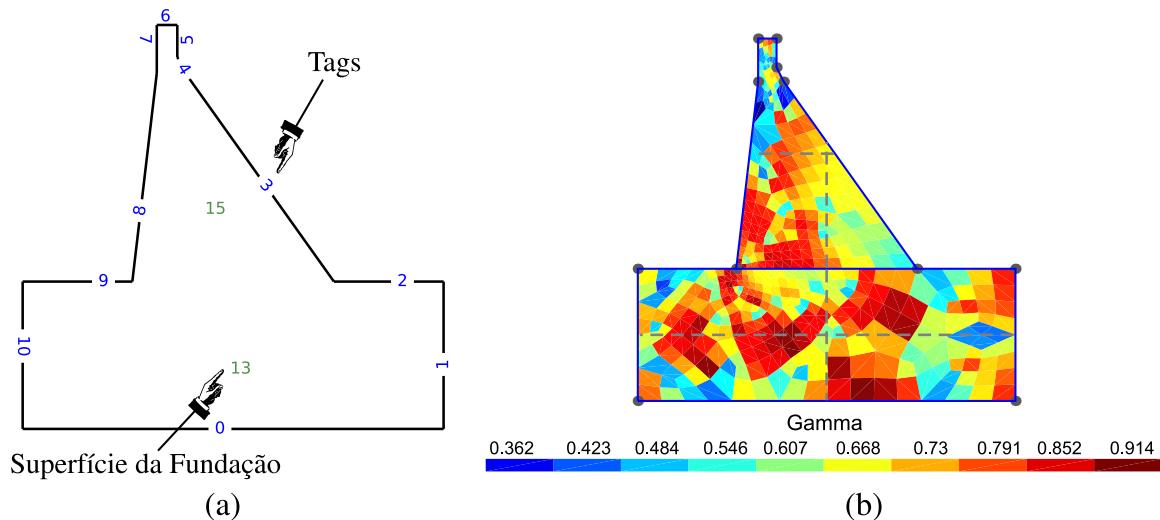


Figura 2: Geometria do problema (a), malha e qualidade da malha em (b).

### 6.1 Condições de contorno

Os carregamentos térmicos e mecânicos para o problema estão exemplificados na Fig. 3.

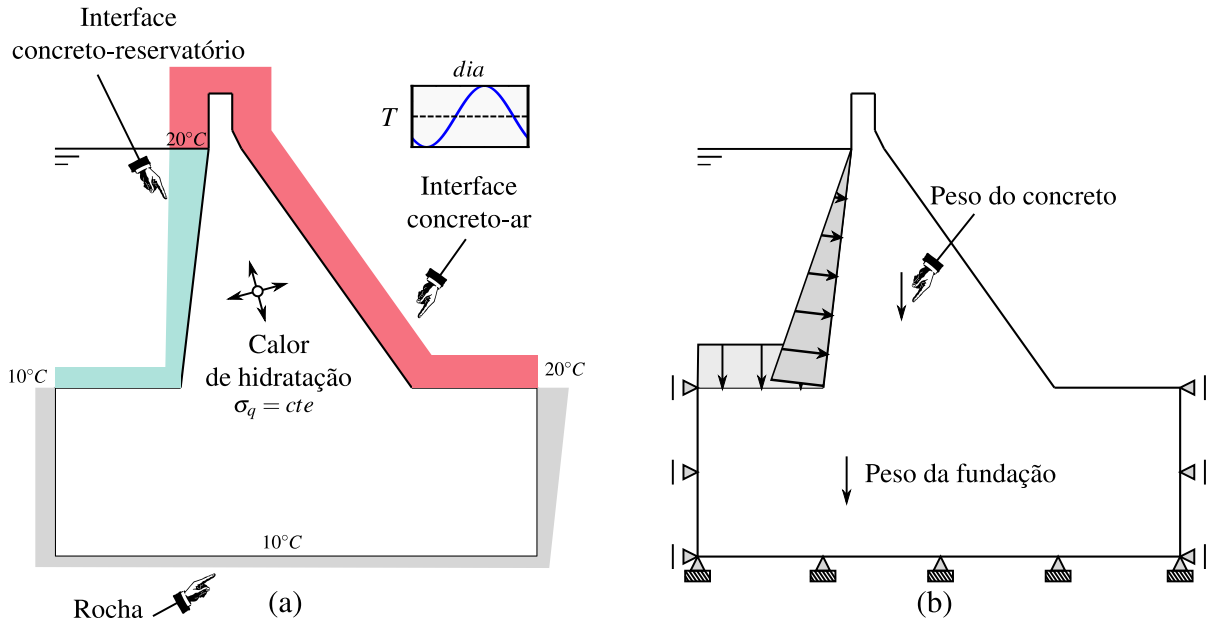


Figura 3: Localização do carregamento térmico (a) e condições de contorno para o problema mecânico (b).

Para as condições mecânicas o deslocamento dos nós na linha zero, ver Fig. 2(a), foram restringidos nas direções horizontal e vertical, nas linhas 1 e 10 o deslocamento nodal foi restringido na direção horizontal apenas. A pressão hidrostática foi aplicado ao longo das linhas 8 e 9. As outras linhas apresentam tensão de superfície nula. O módulo de elasticidade da barragem de concreto é de  $E = 21 [GPa]$ , da rocha (considerada basáltica) de  $E_r = 62.6 [GPa]$ . O coeficiente de Poisson da barragem e da rocha são 0.2 e 0.33 respectivamente. A densidade de massa da barragem e da rocha são 2500 e 3011  $[kg/m^3]$ .

O calor transferido na interface concreto-ar possui três origens: radiação solar, convecção com o ar e radiação emitida pelo corpo da própria barragem. Pode-se assumir, como aproximação, que a temperatura nessa interface segue a variação na temperatura do ar, portanto, como condição de contorno será assumido uma variação senoidal no formato  $T(t) = T_0 + T_a \sin(2\pi/24(t - 9))$  onde  $T_0 = 20 [^{\circ}C]$  e  $T_a = 15 [^{\circ}C]$ . A interface concreto e reservatório terá o mesmo comportamento da interface com o ar, no entanto com  $T_0$  variando com a profundidade, valendo 20  $[^{\circ}C]$  no topo e 10  $[^{\circ}C]$  no fundo. A variação devido ao calor ocorrido por radiação e convecção é modelado por uma variação na temperatura com  $T_a = 5 [^{\circ}C]$ . Na fronteira da rocha será considerado uma temperatura constante de 10  $[^{\circ}C]$ .

A geração de calor interna devido a hidratação do cimento foi modelada como um valor constante  $\sigma_q = 0.05 [W/m^3]$ , o valor constante se deve ao fato de que a análise ocorre apenas num pequeno intervalo de tempo, 1 dia. A condutividade térmica do concreto e da rocha utilizadas é 0.89 e 5  $[J/ms^{\circ}C]$ , respectivamente. O coeficiente de expansão térmica utilizado para o concreto e para a rocha é 9.8 e 5.4  $[^{\circ}C^{-1}10^{-6}]$ . O calor específico do concreto e da rocha é 820 e 840  $[J/kg^{\circ}C]$ , respectivamente.

## 6.2 Tensões Principais

Após resolver o problema termoelástico, as tensões podem ser recuperadas através dos deslocamentos. Na rotina computacional produzida, o valor das tensões são obtidos para cada

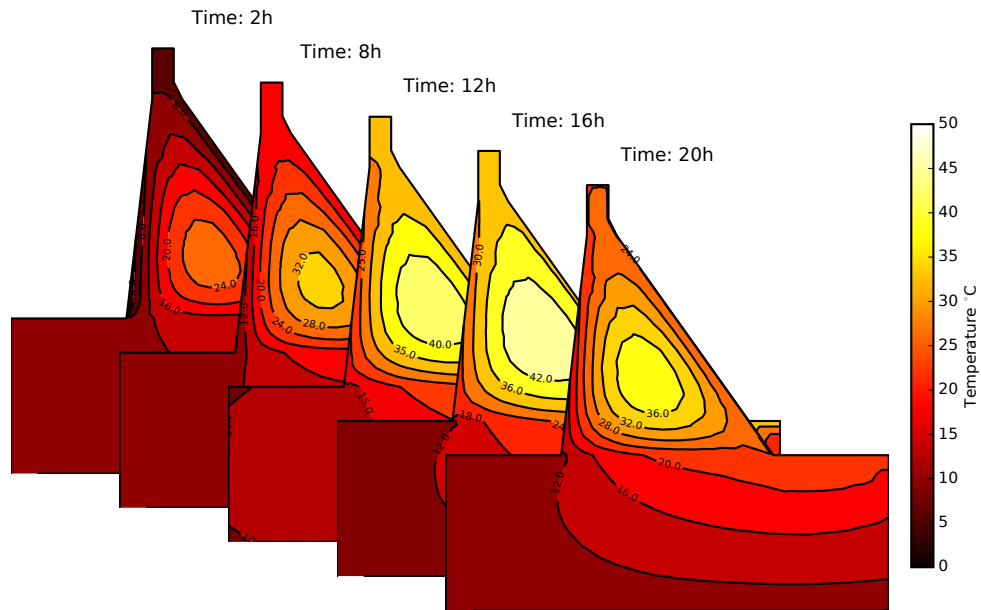


Figura 4: Campo de temperatura evoluindo no tempo.

elemento, em cada nó, e em seguida suavizado levando em conta quantos elementos dividem o nó. A seguir serão apresentados os resultados para o campo de tensões principais, máximas e mínimas, nos instantes  $t = 0, 8, 12, 16$  e  $20$  [h]. A Figura 5 mostra as tensões principais máximas e a Fig. 6 mostra as tensões principais mínimas. Observa-se que o valor das tensões não sofreu variação perceptível por meio dos gráficos no intervalo de tempo considerado.

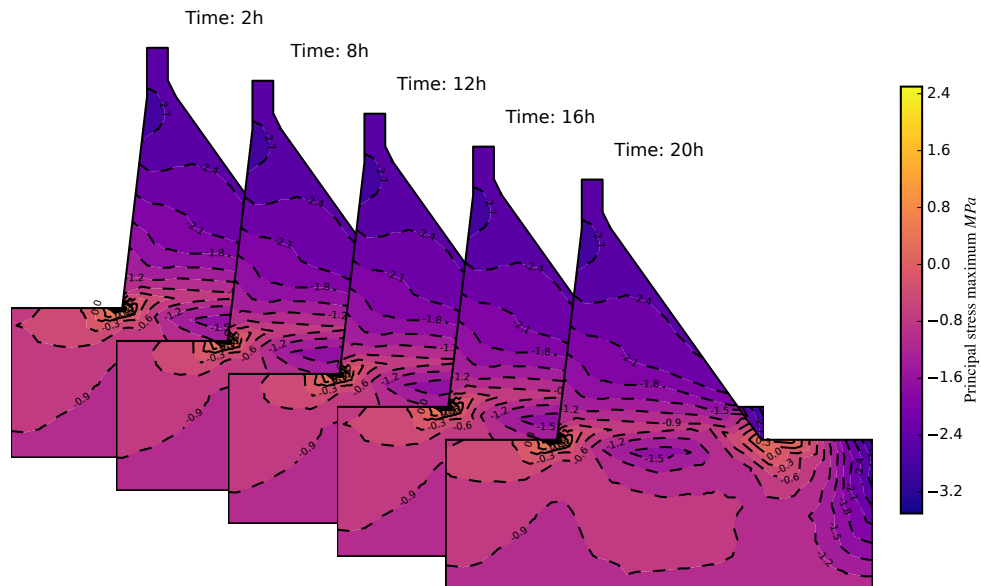


Figura 5: Tensões principais máximas em cinco instantes.

### 6.3 Deslocamento

Os deslocamentos nodais foram plotados utilizando a biblioteca `networkx` e estão apresentados na Fig. 7. Os deslocamentos foram multiplicados por um fator de 1000 vezes.



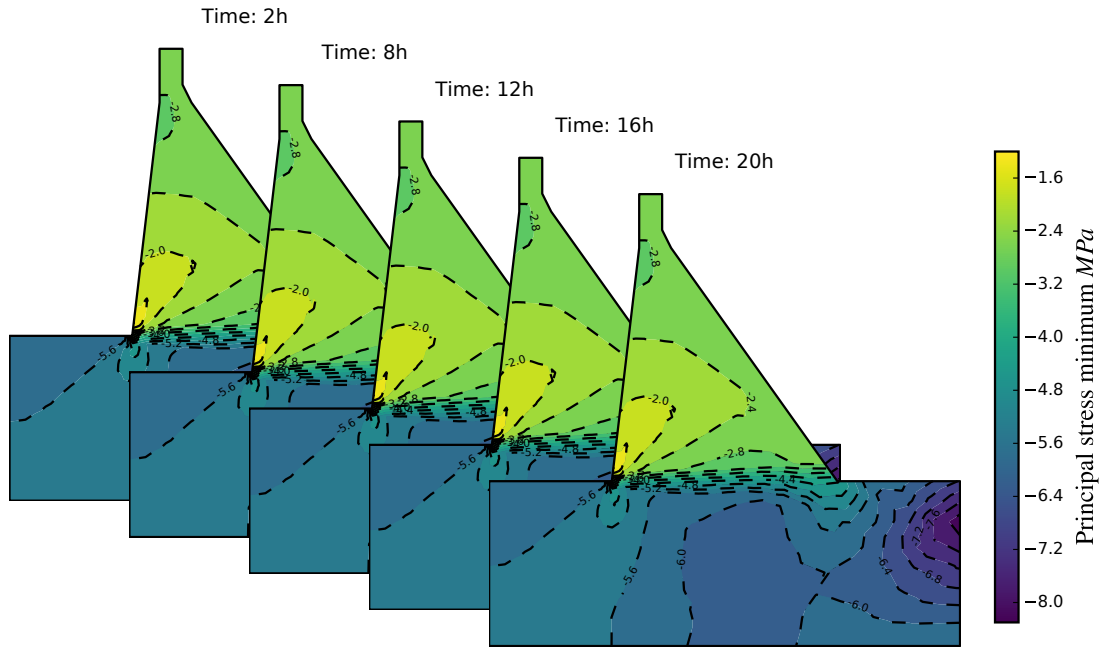


Figura 6: Tensões principais mínimas em cinco instantes.

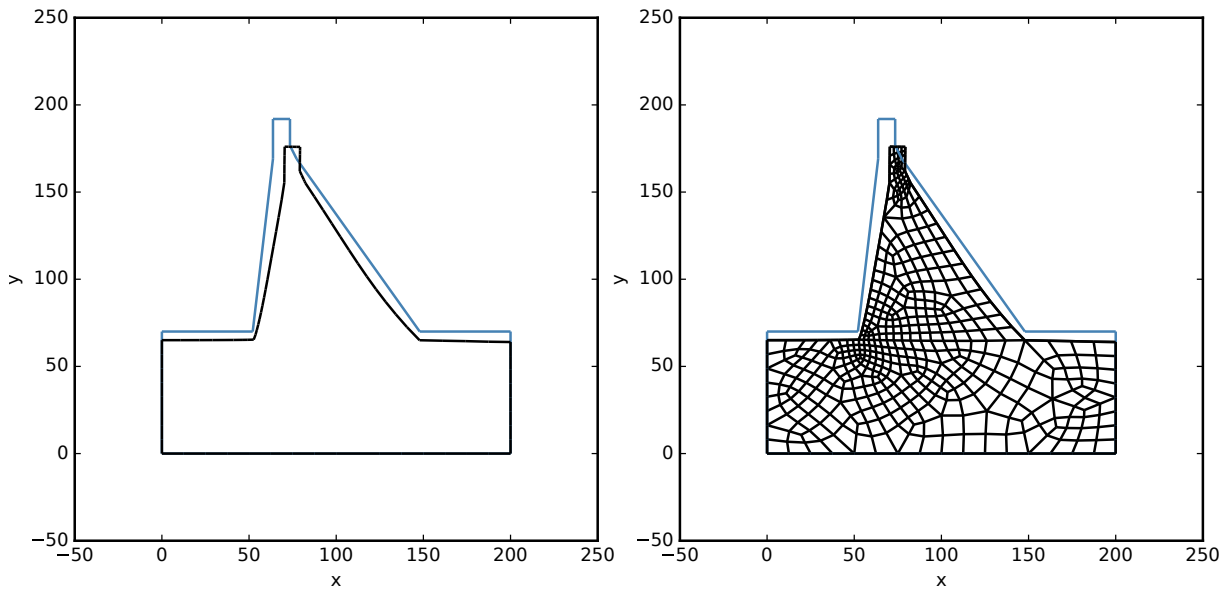


Figura 7: Deslocamento ampliado em 1000 vezes após 2 [h], na figura esquerda a geometria sem os elementos e à direita com os elementos inclusos. Ambos os gráficos foram plotados em Python utilizando a biblioteca `networkx`.

## 7 CONCLUSÃO

Conclui-se com esse trabalho que a implementação do Método dos Elementos Finitos em Python através das bibliotecas `elastopy` e `diffuspy` podem ser utilizadas em conjunto para modelar o problema termoelástico dinâmico. Essa combinação é possível pois assume-se que uma variação no campo de tensões, ou deslocamentos, não perturba o campo de temperaturas. Nesse caso resolve-se o problema da transferência de calor independentemente do problema elástico, apenas chamando o `solver` da biblioteca `diffuspy`.

O análise termoelástica dinâmica possui relevância no acompanhamento de grandes obras que envolvam concreto massa, nesse caso, instrumentação e laboratórios para coleta dos parâmetros físicos são fundamentais para um estudo criterioso e significativo. Nesse trabalho os parâmetros utilizados possuem cunho fictício e foram colhidos na literatura sobre o assunto.

Com relação a linguagem escolhida, Python, conclui-se que apresenta vantagens no que diz respeito a clareza com que o código é escrito, permitindo o fácil entendimento das rotinas; e na arquitetura do programa que é organizado em módulos, classes e funções. As bibliotecas estão equipadas com funções capazes de gerar animações no formato gif, o que facilita a visualização temporal da evolução dos campos.

## RECONHECIMENTOS

Esse trabalho contou com apoio financeiro do CNPq através do programa de bolsas de iniciação científica.

## REFERÊNCIAS

- Ballivy, Gerard, Brahim Benmokrane and Omar Chaallal. 1991. “Deformations produced in concrete through the influence of climatic conditions[Deformations generees dans les betons sous l’influence des conditions climatiques].” 18(6):1088–1092.
- Bathe, Klaus-Jürgen. 2006. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe.
- Bofang, Zhu. 2013. *Thermal stresses and temperature control of mass concrete*. Butterworth-Heinemann.
- Cervera, Miguel, Javier Oliver and Tomás Prato. 1999. “Thermo-chemo-mechanical model for concrete. I: Hydration and aging.” 125(9):1018–1027.
- Chiba, Fumihiro and Takashi Kako. 1999. Stability and error analyses by energy estimate for Newmark’s method. Technical report.
- Daoud, Mohamed, Nicolas Galanis and Gérard Ballivy. 1997. “Calculation of the periodic temperature field in a concrete dam.” *Canadian Journal of Civil Engineering* 24(5):772–784.
- Felippa, Carlos A. 2004. “Introduction to finite element methods.”.
- Kuzmanovic, Vladan, Ljubodrag Savic and John Stefanakos. 2010. “Long-term thermal two- and three-dimensional analysis of roller compacted concrete dams supported by monitoring verification.” 37(4):600–610.
- Leger, P, J Venturelli and SS Bhattacharjee. 1993. “Seasonal temperature and stress distributions in concrete gravity dams. Part 1: modelling.” 20(6):999–1017.
- Rao, Singiresu S. 2013. *The Finite Element Method in Engineering: Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies*. Elsevier.
- Tonti, Enzo. 2013. *The mathematical structure of classical and relativistic physics*. Springer.
- Zienkiewicz, O. C. 2005. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals - Its Basis and Fundamentals*. 6. Aufl. ed. Butterworth-Heinemann.