



ANÁLISE NUMÉRICA DE RISERS UTILIZANDO UM MODELO DE CABO INEXTENSÍVEL

Juliana Cunha Alves

Evandro Parente Junior

julianavaltieri@gmail.com

evandro@ufc.br

Universidade Federal do Ceará – Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização

Endereço: Compus do Pici – Bloco 728 – CEP 60455-970 – Fortaleza – CE - Brasil

Resumo. *Propõe-se um modelo simples e eficiente para a análise estática de risers com o objetivo de determinar a geometria e os esforços atuantes. O modelo proposto considera que o riser se comporta como um cabo inextensível, de rigidez axial infinita e rigidez à flexão nula, submetido a cargas estáticas verticais (peso e empuxo) e de corrente, além do movimento da unidade flutuante. As forças de corrente são calculadas utilizando as equações de Morison. As equações diferenciais que governam o comportamento do problema são obtidas considerando o equilíbrio de um segmento diferencial de riser. As condições de contorno do riser são prescritas em dois pontos diferentes (conexão e âncora), resultando em um Problema de Valor de Contorno (PVC). Este PVC é resolvido utilizando o Método do Tiro (Shooting Method), no qual o Problema de Valor Inicial (PVI) associado é resolvido utilizando o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. O sistema de equações não lineares resultante é resolvido pelo Método de Newton-Raphson com busca linear, de maneira a garantir a convergência global do método. O modelo foi implementado computacionalmente e utilizado na análise risers em diversas configurações e excelentes resultados foram obtidos quando comparados com elementos finitos.*

Palavras-chave: *Risers, Análise numérica, Análise estrutural*

1 INTRODUÇÃO

Risers são estruturas tubulares que transportam fluidos (e.g. óleo e gás) entre os poços e dutos localizados no fundo do mar e as plataformas (unidades flutuantes) localizadas na superfície. Submetidos a esforços elevados, devido à atuação da pressão interna e externa, ondas, correntes e movimento (offset) do flutuante, os risers possuem custo elevado, problema que aumenta no caso de águas profundas, situação na qual os risers são mais longos e estão submetidos a maiores pressões e esforços.

Este trabalho apresenta um modelo eficiente para análise estática de risers, considerando o riser como um cabo inextensível de rigidez axial infinita e rigidez à flexão nula, submetido as cargas estáticas verticais (peso e empuxo), horizontais (corrente marinha) e ao movimento (offset) da unidade flutuante.

2 ANÁLISE DE RISERS

Existem diversas formas de análise de risers, algumas mais complexas, como Métodos de Elementos Finitos (MEF), e outras mais simples, como os baseados no modelo de catenária. Diversos trabalhos (Jacob et al., 2009; Silva et al., 2013) utilizam o modelo de catenária por ser simples e representar bem o comportamento dos risers em catenária livre. Gadhimi (1987) apresentou uma análise estática e dinâmica utilizando um modelo de massa concentrada considerando, além das cargas verticais ao riser, o esforço cortante, momento fletor e o efeito da corrente aplicado ao riser em catenária livre. Tanaka (2009) apresenta um estudo de risers na sua configuração lazy wave, utilizando o método numérico de Runge-Kutta de 4º ordem para solucionar o problema de um riser submerso extensível, considerando sua rigidez à flexão nula e sujeito aos esforços hidrostáticos e hidrodinâmicos.

Dessa forma, propõe-se o modelo de cabo inextensível para análise de risers em diferentes configurações, considerando os efeitos das cargas verticais e horizontais, permitindo, também, incluir os efeitos das correntes marinhas.

O riser estará sujeito às cargas distribuídas verticais devido ao peso do riser e do fluido interno (w_r) e ao empuxo (w_a), que podem ser tratadas como um peso efetivo do riser (w_e):

$$w_e = w_r - w_a \quad (1)$$

Para o efeito da corrente marinha, utiliza-se as equações desenvolvidas por Morison (Sparks, 2007), em que um cilindro circular imerso em um fluido cuja velocidade é perpendicular ao eixo do cilindro (u), estará submetido a uma força de arrasto (f_D), com direção e sentido iguais ao da velocidade e com valor, por comprimento, igual a:

$$f_D = \frac{1}{2} \rho C_D D u |u| \quad (2)$$

onde ρ é a densidade do fluido, C_D é o coeficiente de arrasto e D é o diâmetro externo (i.e. hidrostático) do cilindro.

As equações que governam o comportamento do problema são obtidas considerando o equilíbrio de um segmento diferencial de riser, considerado como um cabo inextensível submetido às cargas do peso (w) e da força de arrasto perpendicular ao cabo (f_D), como representado na Fig. 1(a).

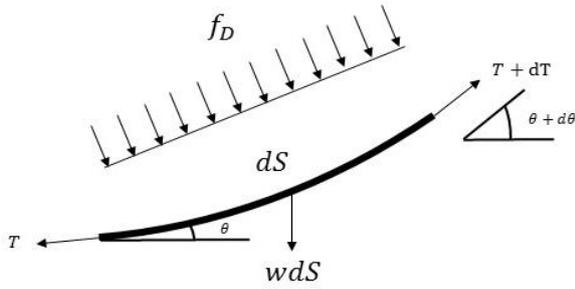


Figura 1(a). Elemento diferencial de riser

$$\frac{dT}{dS} = -w \sin(q)$$

$$\frac{dq}{dS} = \frac{\frac{1}{2} r C_D v \sin(q) |v \sin(q)| - w \cos(q)}{T}$$

$$\frac{dx}{dS} = \cos(q)$$

$$\frac{dy}{dS} = \sin(q)$$

Figura 1(b). PVI

O sistema de equações diferenciais obtido é descrito pela Fig. 1(b), onde v é a velocidade horizontal da corrente, w é o peso efetivo e T é a tração efetiva. Este é um não linear acoplado e cujas as condições de contorno são prescritas em dois pontos diferentes: a conexão (ponto inicial) e a âncora (ponto final). Portanto, a análise de risers corresponde à solução de um Problema de Valor de Contorno (PVC). Neste trabalho, o PVC é resolvido utilizando o Método do Tiro (*Shooting Method*) (Press et al., 2007). Este método consiste em estimar valores das variáveis no ponto inicial (i.e. as condições iniciais do problema), transformando o PVC em um PVI, que pode ser resolvido de forma numérica ou analítica.

A implementação computacional do Método do Tiro desenvolvida neste trabalho utiliza o método de Newton-Raphson (NR) com objetivo de zerar a diferença entre os valores calculados pelo PVI e os valores prescritos no final do intervalo e utiliza-se o método de Runge-Kutta de 4º ordem (RK4) para a integração das equações diferenciais. Sendo \mathbf{V} o vetor contendo os valores das condições iniciais a serem determinadas e \mathbf{F} o vetor contendo as diferenças entre os valores no final do intervalo:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} T_{con} \\ \theta_{con} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_{fin} - x_{anc} \\ y_{fin} - y_{anc} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Nesta equação, T e θ representam a tração e o ângulo de inclinação do riser e os subscritos *con*, *anc* e *fin*, representam a conexão, a âncora e o último ponto obtido pela solução do PVI, respectivamente. O objetivo é determinar o vetor \mathbf{V} que zera o vetor \mathbf{F} dotando-se uma tolerância de 10^{-8} . Utilizando o Método de Newton-Raphson parte-se de uma estimativa inicial \mathbf{V}_0 que vai sendo atualizada de acordo com a equação:

$$\mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{V}_k + \alpha_1 \delta \mathbf{V} \quad (4)$$

O Método de Newton-Raphson possui convergência quadrática próxima à solução, contudo pode divergir se o ponto inicial \mathbf{V}_0 estiver muito longe da solução (Press et al., 2007). A fim de estabilizar o processo iterativo e garantir a convergência global (i.e. independente do ponto de partida) utilizou-se um procedimento de busca linear. Pode-se demonstrar (Press et al., 2007) que o vetor $\delta \mathbf{V}$ é uma direção descendente, ou seja, que ela reduz o valor de $|\mathbf{F}|$ desde que seja tomado um passo suficientemente pequeno. Dessa forma, α (Eq. 4) representa o tamanho do passo a ser dado na direção de $\delta \mathbf{V}$. Inicialmente considera-se $\alpha_0 = 1$ e verifica-se se a nova solução \mathbf{V} reduz o erro em relação a iteração anterior. Caso isto não ocorra, o tamanho do passo é reduzido pela metade, calcula-se a nova solução \mathbf{V} e o erro

correspondente. O processo é repetido até que o erro seja menor que o erro da iteração anterior. Já a correção iterativa $\delta\mathbf{V}$ é calculada resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{V} = -\mathbf{F} \quad (5)$$

Nesta equação, \mathbf{J} é a matriz Jacobiana do problema:

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \quad (6)$$

Como a expressão analítica das componentes do vetor \mathbf{F} são desconhecidas, as derivadas que compõe a matriz Jacobiana são aproximadas utilizando diferenças finitas. Uma perturbação relativa de 10^{-6} foi utilizada nos exemplos analisados.

É importante notar que a precisão da análise aumenta com o número de incrementos (i.e. subdivisões) utilizados na integração das equações diferenciais, contudo o número de equações não lineares a ser resolvido é sempre o mesmo, o que torna o método eficiente.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresenta-se um riser em configuração *lazy-wave*, sendo dividido em três trechos, com 200m, 110m e 250m de comprimento cada trecho e com pesos efetivos de -765,6 N/m, 893,9 N/m e -765,6 N/m, respectivamente. Apresentando uma lâmina d'água com valor de 257m, uma rigidez à flexão de $2,17\text{E}+4 \text{ Nm}^2$ e submetido a um perfil de corrente apresentado na Fig. 2(a). Considerou-se a densidade da água como $1005,5 \text{ kg/m}^3$ e o coeficiente de arrasto de 1,0. Cada trecho foi discretizado em 100 pontos tanto para MEF (viga e treliça) como para o modelo proposto.

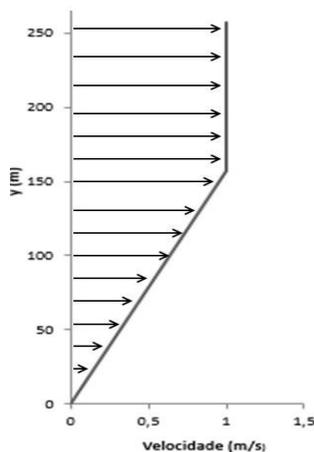


Figura 2(a). Perfil de velocidade.

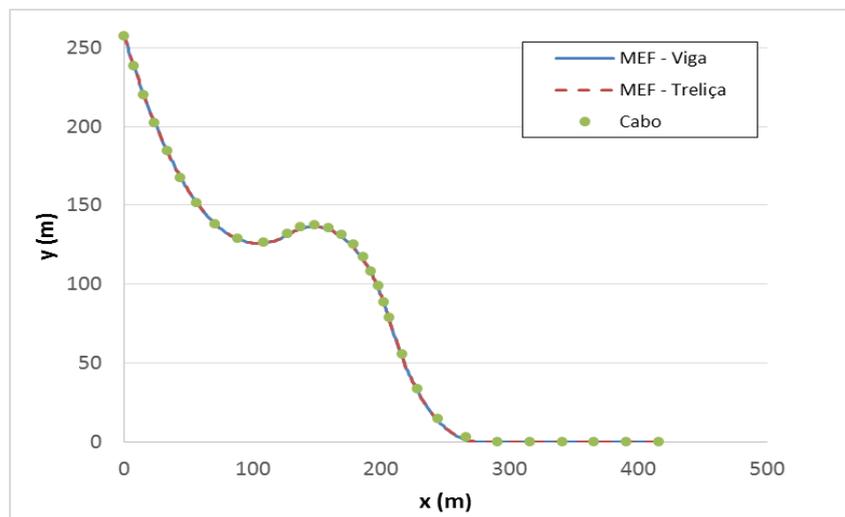


Figura 2(b). Geometria obtida para riser em lazy wave.

Na Tabela 1, os resultados obtidos pelo modelo proposto (cabo) são comparados com os obtidos pelo MEF com elementos de viga e elementos de treliça. Como o elemento de viga considera os efeitos da flexão, ele é considerado o mais preciso, sendo tomado como referência para comparação.

Tabela 1. Resultados obtidos.

Método	T(N)	Erro	θ (graus)	Erro Relativo
MEF-Viga	$1,368862 \times 10^5$	-	20,302847	-
MEF – Treliça	$1,332613 \times 10^5$	$5,46 \times 10^{-4}$	21,122186	$-4,04 \times 10^{-2}$
Cabo	$1,331639 \times 10^5$	$-1,45 \times 10^{-4}$	20,989136	$-3,38 \times 10^{-2}$

4 CONCLUSÃO

A metodologia de análise baseada no modelo de cabo inextensível permite a análise rápida dos esforços de um riser devido às forças verticais e de corrente, uma vez que a dimensão do sistema de equações não lineares independe da discretização adotada na integração das equações diferenciais. Os resultados obtidos pelo procedimento proposto foram comparados com a solução pelo MEF, obtendo-se excelente concordância. Verificou-se ainda que a consideração da rigidez à flexão não altera de forma significativa os valores da tração e ângulo de topo, mostrando que o modelo proposto é adequado para a análise estática de risers.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq), pelo suporte financeiro a essa pesquisa, e toda a equipe do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) pelo amigável ambiente de trabalho.

REFERÊNCIAS

Ghadimi, R., 1988. A simple and efficient algorithm for the static and dynamic analysis of flexible marine risers. *Computers and Structures*.

Jacob, B.P., de Lima B.S.L.P., Reyes M.C.T., Torres A.L.F.L., Mourelle M.M., & Silva R.M.C., 1999. Alternative configurations for steel catenary risers for turret-moored FPSO's. *In: Proceedings of the 9th international offshore and polar engineering conference, Brest, France*, vol 2, pp 234–239.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. Flannery, B. P., 2007. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Third Edition. Cambridge University Press.

Silva, R. F., Teófilo; F. A. F., Parente Jr., E.; Melo, A. M. C., & Holanda, A. S., 2013 Optimization of composite catenary risers, *Marine Structures*, v. 33, p. 1-20.

Sparks, C.P., 2007. *Fundamentals of Marine Riser Mechanics*. Penn Well.

Tanaka, R. L., 2009. *Otimização da Configuração de Risers Rígidos*. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.