



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## ANÁLISE DE VIBRAÇÃO DE VIGAS E COLUNAS CONSIDERANDO A INTERAÇÃO ENTRE O SOLO E A ESTRUTURA

**Letícia Reis Batista Rosas**

**Everton André Pimentel Batelo**

**Andréa Regina Dias da Silva**

**Ricardo Azoubel da Mota Silveira**

eng.leticiaRosas@gmail.com

everton.batelo@gmail.com

andreadiassilva@yahoo.com.br

ramsilveira@yahoo.com.br

Departamento de Engenharia Civil

Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil

**Resumo.** *Na análise estrutural, uma das áreas mais importantes é a avaliação do comportamento estático e dinâmico de elementos estruturais, que em muitas situações estão apoiados em outros corpos que oferecem restrições de movimentos, como o solo. Este artigo trata da análise de vibração livre e forçada de vigas e colunas considerando sua interação com o solo cujo comportamento é idealizado através dos modelos de Winkler e Pasternak. A estratégia de modelagem numérica usada baseia-se na aplicação do Método dos Elementos Finitos. O método incremental-iterativo de Newton-Raphson foi usado na solução estática não linear, e o problema de autovalor para determinação das frequências de vibração é resolvido pelo método de Jacobi. Problemas envolvendo vigas e colunas em contato com uma fundação elástica são apresentados, e através das análises é possível verificar a influência da interação solo-estrutura na vibração dessas estruturas.*

**Palavras-chave:** *fundação elástica, contato bilateral, análise não linear, análise de vibração.*

## 1 INTRODUÇÃO

Com o intuito de otimizar sistemas de fundação de estruturas, inúmeros esforços têm sido feitos para avançar na modelagem de solos, bem como na simulação da interação entre esse meio e a estrutura. Esse tipo de problema é denominado problema de contato, podendo ser caracterizado como unilateral ou bilateral. O contato bilateral considera que o meio de contato reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. Entretanto, uma modelagem mais realística do comportamento do solo pode ser obtida considerando na sua formulação a sua reação apenas às solicitações de compressão. Isso caracteriza o contato como unilateral.

Por outro lado, uma análise elástica linear não é capaz de reproduzir o comportamento de estruturas em situações de carregamento limite ou em condições não usuais, pois essas estruturas, em geral, comportam-se de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Dessa forma, o comportamento não linear das estruturas passa a ser relevante, e deve ser considerado nas análises estruturais. Com o avanço da tecnologia e da construção civil, torna-se possível projetar estruturas mais esbeltas e com a possibilidade de vencer vãos cada vez maiores. Como consequência, as estruturas mais esbeltas tornam-se mais susceptíveis a problemas excessivos de vibrações, e nesse contexto, a análise estrutural dinâmica, além da estática, passa a ser importante na concepção de um projeto estrutural.

A escolha de uma metodologia que possibilite a consideração da interação entre o solo e a estrutura na análise é uma etapa fundamental no processo de solução do problema estrutural. O comportamento real do solo tem difícil descrição e diferentes modelos matemáticos foram desenvolvidos para representá-lo. Dutta e Roy (2002) reuniram em seu trabalho uma revisão dos modelos mais comuns de bases elásticas de um, dois e três parâmetros que definem as propriedades do solo. Em Silva (1998) encontram-se os fundamentos da solução numérica, via Método dos Elementos Finitos (MEF), para problemas de equilíbrio estático de placas com restrições bilaterais e unilaterais de contato, considerando pequenos deslocamentos e deformações, e material elástico linear. Uma metodologia de solução numérica não linear para resolver problemas de instabilidade de elementos estruturais esbeltos com restrições unilaterais de contato foi desenvolvida por Silveira (1995). Mais recentemente, Maciel (2012) estudou o equilíbrio e estabilidade de barras em contato bilateral, via MEF, considerando os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura.

Tratando o comportamento estrutural dinâmico, um estudo de vibração livre de vigas sobre base elástica modelada através de molas discretas foi realizado por Lai *et al.* (1992), utilizando o Método dos Elementos Finitos e considerando o contato com comportamento bilateral. Uma análise semelhante foi feita por Thambiratnam e Zughe (1996a e 1996b). Esses autores também realizaram análises dinâmicas considerando cargas móveis, estendendo para o caso de estruturas de via férrea. Mais recentemente, Sapountzakis e Kampitsis (2010) fizeram análise dinâmica não linear de vigas-coluna em fundação elástica de Winkler. O contato foi considerado unilateral e bilateral, e utilizou-se um método baseado em elementos de contorno. Recentemente, Ghannadial e Mofid (2015) propuseram a solução analítica para vibração livre de vigas Timoshenko sobre base elástica variável do tipo Winkler usando funções de Green. Nesse mesmo ano, Muñoz (2015) desenvolveu uma metodologia de análise não linear dinâmica de sistemas estruturais reticulados sob excitações de base, considerando a não linearidade geométrica da estrutura e apoios, representados por molas unidimensionais com comportamento elastoplástico.

Nessa mesma linha de pesquisa, este trabalho trata da análise de vibração livre e forçada de viga e coluna, considerando a interação entre o solo e a estrutura. Na análise de vibração

forçada, a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson é utilizada para solução do problema estático não linear, e o problema de autovalor para determinação das frequências naturais de vibração é resolvido pelo método de Jacobi. Exemplos de aplicação envolvendo vigas sobre uma fundação elástica são apresentados, e através das análises é possível verificar a influência da consideração da interação solo-estrutura na vibração dessas estruturas.

## 2 FORMULAÇÕES

Esta seção apresenta as formulações para o processo de solução numérica do problema geometricamente não linear, envolvendo a interação entre o solo e a estrutura. Os modelos de Winkler (Winkler, 1867) e Pasternak (Pasternak 1954) serão utilizados na representação do comportamento do solo e serão discutidos inicialmente, na subseção seguinte.

### 2.1 Modelagem do solo

O modelo de Winkler representa a região de contato através de um sistema de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si como mostra a Figura 1. Nesse modelo, a reação exercida em um dado ponto da região de contato é assumida ser proporcional ao deslocamento vertical da estrutura nesse mesmo ponto, independente dos deslocamentos em outras partes da estrutura em contato.

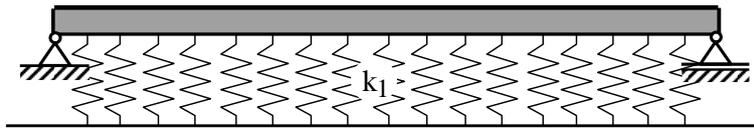


Figura 1. Modelo de Winkler representando a região de contato

O modelo de Pasternak considera que as molas são conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento. Esse modelo procura estabelecer certa interação entre as molas usadas no modelo de Winkler. Tem-se, nesse caso:

$$r_b = k_1 v_b - k_2 \nabla^2 v_b \quad (1)$$

onde  $r_b$  e  $v_b$  são, respectivamente, a reação da base e o deslocamento,  $k_1$  é o parâmetro de rigidez de Winkler e  $k_2$  representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada.

Considerando a Equação (1), pode-se escrever a energia interna de deformação armazenada pela fundação, dada por:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L u_b^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_0^L \left( \frac{du_b}{dx} \right)^2 dx \quad (2)$$

O deslocamento,  $u_b$ , pode ser relacionado com os valores nodais do elemento,  $\hat{u}_b$ , onde  $\mathbf{B}_b$  é a matriz que contém as funções de interpolação de Hermite, como segue:

$$u_b = \mathbf{B}_b \hat{u}_b \quad (3)$$

Ao substituir (3) em (2), obtém-se:

$$U_b = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b1}^e \hat{\mathbf{u}}_b + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_{b2}^e \hat{\mathbf{u}}_b \quad (4)$$

sendo:

$$\mathbf{K}_{b1}^e = k_1 \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b dx \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{b2}^e = k_2 \int_0^L \mathbf{B}_{b,x}^T \mathbf{B}_{b,x} dx \quad (6)$$

com  $\mathbf{B}_{b,x}$  sendo a derivada de  $\mathbf{B}_b$  em relação a  $x$ .

Finalmente, para obter a matriz de rigidez global da fundação elástica deve-se considerar a contribuição de todos os  $m$  elementos na região de contato, chegando a:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \left( \mathbf{K}_{b1}^e + \mathbf{K}_{b2}^e \right) \quad (7)$$

## 2.2 Formulação não linear geométrica

Proposta por Yang e Kuo (1994), essa formulação utiliza referencial Lagrangiano atualizado e a teoria de barra de Euler-Bernoulli. Adotam-se as tensões axial e cisalhante de Cauchy e os incrementos de deformação de Green-Lagrange atualizados. O funcional de energia é definido por:

$$\Delta\Pi = \Delta U + \Delta V = U_L + U_\sigma - \int_s \Delta f_i \Delta u_i ds \quad (8)$$

sendo:

$$U_L = \frac{1}{2} \int_{t_V} E \Delta e_{xx}^2 dt dV \quad (9)$$

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{t_V} P \left[ \left( \frac{d\Delta u}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\Delta v}{dx} \right)^2 + \frac{I}{A} \left( \frac{d^2\Delta v}{dx^2} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{t_V} M \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d^2\Delta v}{dx^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_{t_V} Q \frac{d\Delta u}{dx} \frac{d\Delta v}{dx} dx \quad (10)$$

Na Eq. (10) os esforços iniciais resultantes (P, M e Q) são calculados através da integração das tensões de Cauchy. Aproximando-se os deslocamentos incrementais  $\Delta u$  (função linear) e  $\Delta v$  (função cúbica) através das funções de interpolação de Hermite, pode-se reescrever o funcional  $\Delta\Pi$  em função dos deslocamentos nodais do elemento, chegando-se a:

$$\Delta\Pi = \Delta \mathbf{u}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_L + \frac{1}{2} \mathbf{K}_\sigma \right] \Delta \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_i - \Delta \mathbf{u}^T (t+\Delta t) \lambda \mathbf{f}_r \quad (11)$$

Na equação anterior,  $\mathbf{K}_L$  é a matriz elástica linear convencional, e  $\mathbf{K}_\sigma$  é a matriz de tensões iniciais, ou matriz de rigidez geométrica, cujos termos dependem das forças nodais iniciais. O termo  $\Delta \mathbf{u}^T$  representa o vetor de deslocamentos incrementais e  $\mathbf{f}_i$  é o vetor de forças

internas nodais. O termo  $^{(t+\Delta t)}\lambda \mathbf{f}_r$  caracteriza o vetor total das forças externas que atuam no elemento.

As componentes das matrizes  $\mathbf{K}_L$  e  $\mathbf{K}_\sigma$  podem ser obtidas diretamente da energia interna de deformação, através da diferenciação dos termos das Eq. (9) e (10). No caso de sistemas onde avalia-se a interação entre o solo e a estrutura, a matriz de rigidez da estrutura deve ser somada à matriz de rigidez da fundação (solo),  $\mathbf{K}_b$ , e o mesmo deve ser feito com o vetor de forças internas. O vetor de forças internas incremental do elemento é obtido estabelecendo a primeira variação da energia potencial total igual a zero. Portanto:

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_b \quad (12)$$

$$\Delta \mathbf{f}_{is} = [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma] \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u} \quad (13)$$

nas quais  $\mathbf{K}_s$  e  $\Delta \mathbf{f}_{is}$  são a matriz de rigidez e o vetor de forças internas incremental do sistema.

### 2.3 Metodologia de solução

A vibração livre ocorre exclusivamente pelas energias potencial e cinemática existentes na estrutura na ausência da ação de forças externas, depois de ter sido excitada durante curta duração. Desprezando o efeito do amortecimento, a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre é definida como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_s \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (14)$$

Na Eq. (14),  $\mathbf{M}$  corresponde à matriz de massa e  $\mathbf{K}_s$  à matriz de rigidez do sistema estrutura-fundação. Os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\ddot{\mathbf{U}}$  correspondem a deslocamento e aceleração, respectivamente. Chega-se à equação característica do problema, na forma de um problema de autovalor generalizado:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi} \text{sen}(\omega t) \quad (15)$$

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (16)$$

em que  $\omega^2$  é o autovalor que representa o quadrado das frequências naturais de vibração em rad/s, e  $\boldsymbol{\phi}$  é o autovetor que representa o modo de vibração, contendo as amplitudes do movimento associadas aos graus de liberdade nodais da estrutura.

Para a análise de vibração da estrutura pré-carregada, é necessário, antes de determinar as frequências naturais, conhecer a configuração de equilíbrio estático do sistema para um determinado nível de carregamento. Assim, segue-se a seguinte metodologia de solução para um problema estático não linear para a obtenção dessa configuração. Em uma análise incremental não linear, que incorpore procedimentos iterativos em cada passo incremental, tem-se duas fases diferentes. A fase predita envolve a solução dos deslocamentos incrementais a partir de um determinado acréscimo de carregamento. A fase corretiva busca a correção das forças internas incrementais obtidas dos acréscimos de deslocamentos, que são comparadas com o carregamento externo, obtendo-se a quantificação do desequilíbrio existente entre as forças internas e externas. O processo corretivo é refeito até que a estrutura esteja em equilíbrio. A metodologia utilizada baseia-se essencialmente na solução do problema de forma incremental-iterativa, utilizando a estratégia de Newton-Raphson. A mudança nos deslocamentos nodais é governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}_s^{(h-1)} \delta \mathbf{U}^h = -\mathbf{g}^{(h-1)} + \delta \lambda^h \mathbf{F}_r \quad (17)$$

Nessa equação,  $\delta U$  denota a correção dos deslocamentos nodais,  $h$  se refere ao contador do número de iterações,  $\mathbf{g}$  é o vetor gradiente, e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ , que é um vetor de referência onde apenas a sua direção é importante. Procura-se anular o vetor gradiente ao longo do ciclo iterativo, indicando que foi atingido um ponto de equilíbrio.

Logo após, deve-se avaliar a matriz de rigidez e de massa através do método de Jacobi (Tedesco *et al.*, 1998), que fornece todas as frequências naturais e modos de vibração.

### 3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados dois exemplos de estruturas em contato com o solo, cuja solução foi obtida através da metodologia numérica apresentada na seção anterior. Foi utilizado o sistema computacional CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*), que realiza a análise numérica avançada, estática e dinâmica, de estruturas metálicas baseado no Método dos Elementos Finitos (Silva, 2009).

#### 3.1 Viga sobre uma fundação do tipo Winkler

Considere a viga biapoada mostrada na Figura 1. O comprimento da estrutura é  $L = 6.096$  m, área da seção transversal  $A = 185.81 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>, e momento de inércia  $I = 1.44 \times 10^{-3}$  m<sup>4</sup>. O material tem módulo de elasticidade  $E = 2.483 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup> e densidade  $\rho = 446.08$  kg/m. A viga está apoiada em uma fundação elástica com rigidez  $k_1 = 16.554$  MN/m<sup>2</sup>. Destaca-se que essa mesma viga foi estudada por Timoshenko e Young (1974), Lai *et al.* (1992), Thambiratnam e Zhuge (1996a) e, mais recentemente, por Sapountzakis e Kampitsis (2010) e seus resultados são usados para validação da metodologia utilizada.

O solo foi representado pelo modelo de Winkler ( $k_2 = 0$ ), e foram analisadas as três primeiras frequências de vibração e comparadas com os resultados disponíveis na literatura para discretização com 10 elementos finitos, conforme apresentado na Tabela 1. Observa-se que a metodologia utilizada neste trabalho conduziu a resultados satisfatórios. O primeiro e segundo modos de vibração são ilustrados na Figura 2.

Tabela 1. Frequências de vibração da viga

Frequência (Hz)	Timoshenko e Young (1974)	Lai <i>et al.</i> (1992)	Thambiratnam e Zhuge (1996a)	Sapountzakis e Kampitsis (2010)	Presente estudo
$f_1$	32.9032	32.9049	32.9033	32.7946	32.9123
$f_2$	56.8135	56.8220	56.8193	56.5476	56.8499
$f_3$	112.908	111.9730	111.9610	110.7220	112.0392

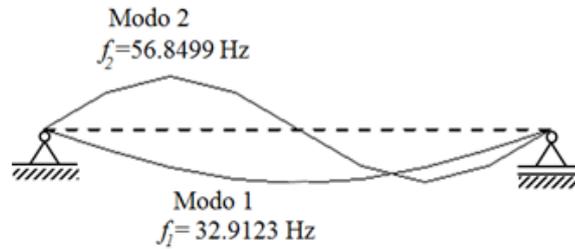


Figura 2. Modos de vibração da viga

Considera-se agora a mesma viga, mas sobre uma fundação de comprimento variável, foram analisadas as duas primeiras frequências de vibração. Nesse estudo, o parâmetro  $m$  (ilustrado na Figura 3) variou de zero (sem a presença do meio elástico) a um (toda a estrutura apoiada sobre a fundação).

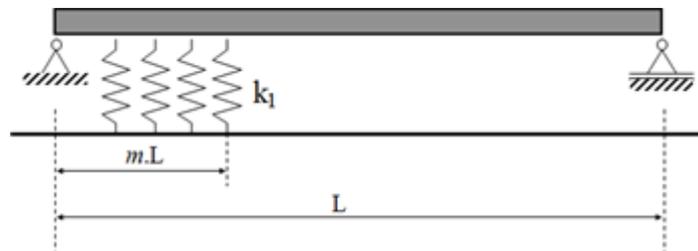
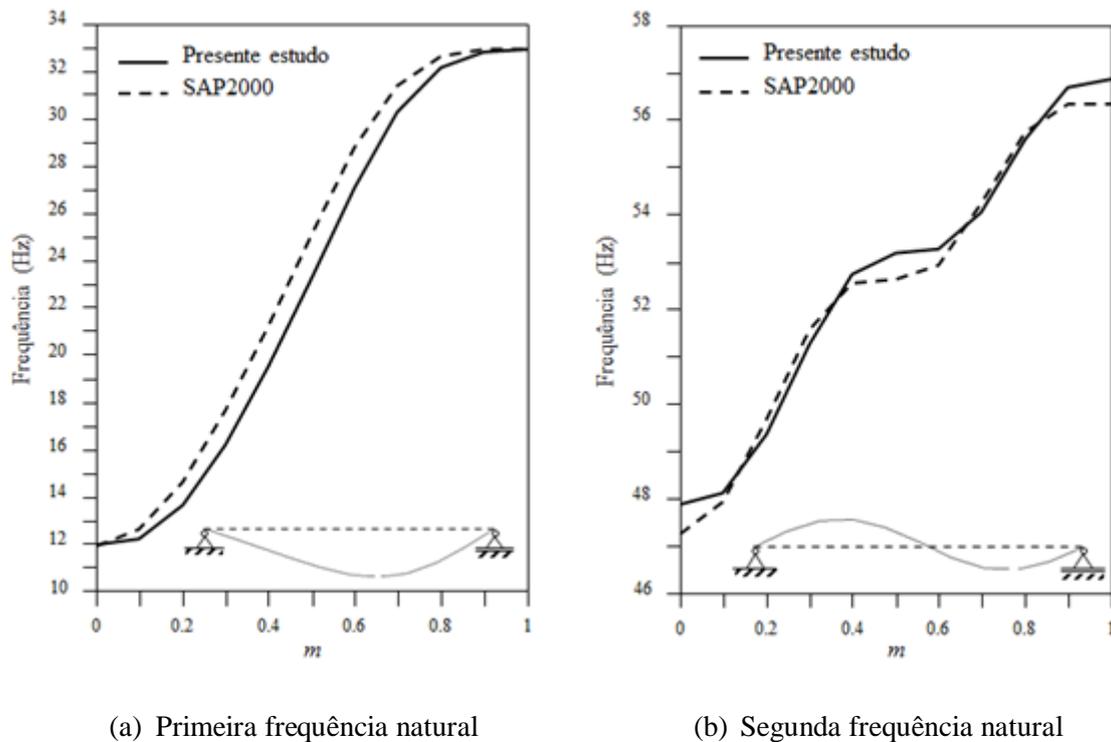


Figura 3. Viga biapoiada sobre base elástica de comprimento variável



(a) Primeira frequência natural

(b) Segunda frequência natural

Figura 4. Frequência de vibração da viga biapoiada em função da variação do comprimento da fundação elástica (valor de  $m$ )

Os resultados são expostos na Figura 4, onde também estão indicados os modos de vibração para a condição  $m = 0.5$ . O mesmo exemplo foi modelado no software SAP2000 para comparação dos resultados. Percebe-se que com o aumento de  $m$ , ou seja, quanto maior for o comprimento da fundação elástica, maiores são as frequências de vibração, pois o sistema se torna mais rígido.

### 3.2 Coluna em contato com uma fundação do tipo Pasternak

A coluna desse exemplo foi inicialmente apresentada por Naidu e Rao (1995), e analisada também por Shen (2011) e Maciel (2012). Trata-se de uma coluna biapoiada (Figura 5), analisada com 20 elementos finitos, com as seguintes propriedades:  $L=31.4$  m e  $EI=100$ . Para a fundação elástica foram utilizados os parâmetros de rigidez adimensionais  $\beta_1 = k_1 L^4 / (EI)$  e  $\beta_2 = k_2 L^2 / (\pi^2 EI)$ . Foram utilizadas cinco combinações dos parâmetros adimensionais da base:  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ;  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = 0$ ;  $\beta_1 = 100$  e  $\beta_2 = 0$ ;  $\beta_1 = 100$  e  $\beta_2 = 0.5$ ; e  $\beta_1 = 100$  e  $\beta_2 = 2.5$ . A carga de compressão também foi adimensionalizada através da expressão  $\Omega = PL^2/EI$ .

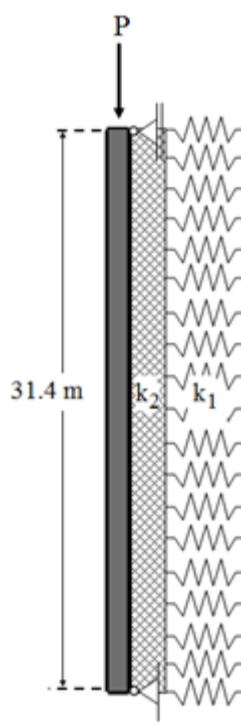


Figura 5. Coluna biapoiada em contato com uma fundação do tipo Pasternak

A trajetória de equilíbrio da coluna em questão é mostrada na Figura 6, e observa-se boa concordância com a resposta analítica apresentada por Naidu e Rao (1995). É possível perceber que quanto mais alto o valor da rigidez da fundação elástica, maior o valor da carga crítica. Foi realizada a análise de vibração forçada da coluna, cujo resultado é ilustrado na Figura 7. Nota-se que a frequência de vibração da estrutura pré-carregada foi influenciada pela rigidez da fundação elástica, indicando o ganho de rigidez causado pela interação entre o solo e a estrutura. Quanto mais rígida a fundação elástica, maiores são as frequências de vibração. Pode-se perceber que as frequências tendem a zero para um carregamento

coincidente ao da carga crítica, que pode ser observada na trajetória de equilíbrio. Portanto, quanto mais próximo da carga crítica de flambagem, menores são as frequências de vibração, tendendo a zero.

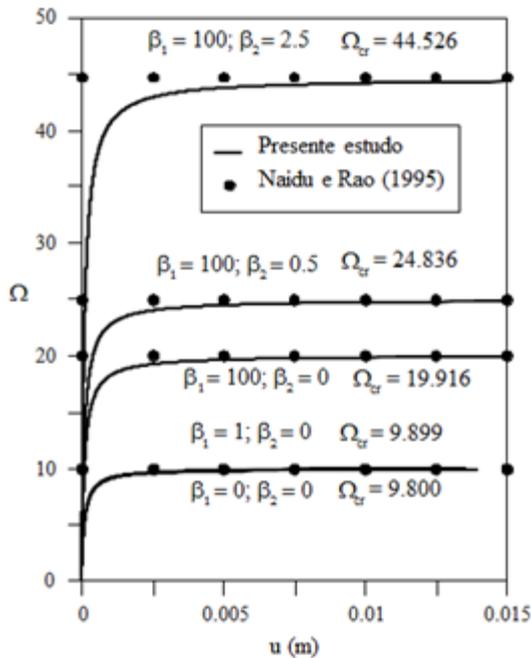


Figura 6. Trajetória de equilíbrio

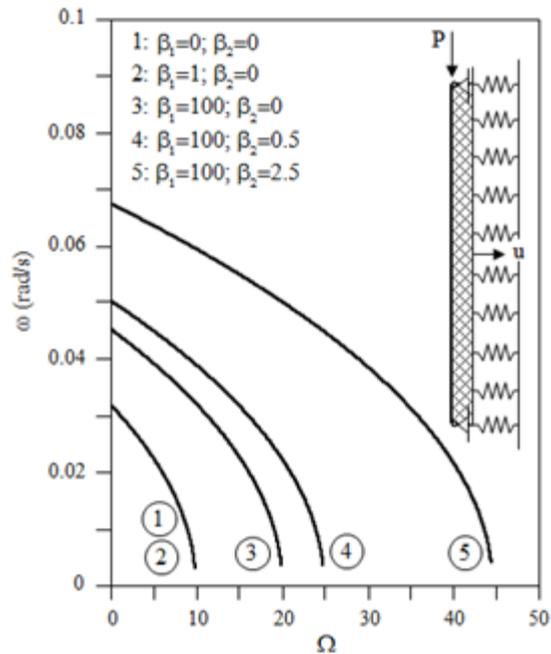


Figura 7. Vibração da estrutura pré-carregada

A vibração livre da coluna também foi analisada para o caso onde  $\beta_1=100$  e  $\beta_2=0$ , e os resultados foram comparados com os obtidos pelo software SAP2000. Conforme a Tabela 2, verifica-se a boa concordância entre as respostas.

Tabela 2. Frequências de vibração da coluna

Frequência (Hz x 10 <sup>-3</sup> )	SAP2000	Presente estudo
$f_1$	7.1743	7.1744
$f_2$	20.789	20.789
$f_3$	45.627	45.630
$f_4$	80.759	80.779

## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho avaliou a vibração de vigas e coluna sob influência da interação entre o solo e a estrutura, considerando o contato do tipo bilateral. O solo foi representado através dos modelos de Winkler e Pasternak, e foi considerada a não linearidade geométrica da estrutura.

A estratégia numérica proposta de solução foi baseada no Método dos Elementos Finitos, utilizando o método de Newton-Raphson para resolver o problema estático, e o método de Jacobi para determinar as frequências e modos de vibração. Os exemplos numéricos validaram a formulação utilizada e as implementações computacionais.

Em geral, o estudo teve por objetivo verificar a influência na rigidez do sistema ao considerar o contato da estrutura com o solo. Pode-se concluir que, nesses casos, a carga crítica de flambagem aumenta com o aumento da rigidez da fundação. Destaca-se que o comportamento elástico da fundação foi admitido. Na análise de vibração da coluna pré-carregada, observou-se que as frequências diminuem com o aumento do carregamento, e tendem a zero quanto mais próximo estiver da carga crítica de flambagem. Além disso, verificou-se que as frequências naturais de vibração aumentam com o aumento dos parâmetros de rigidez da fundação elástica.

Como forma de continuar este trabalho, é importante realizar uma análise da resposta transiente dessas estruturas, para avaliar o comportamento do sistema estrutura-fundação quando submetido a cargas ao longo do tempo.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem à UFOP, CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo suporte recebido no desenvolvimento dessa pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

Dutta, S. C.; Roy, R., 2002. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. *Computer and Structures*, vol.80, pp. 1579-1584.

Ghannadiasl, A.; Mofid, M., 2015. An analytical solution for free vibration of elastically restrained Timoshenko beam on an arbitrary variable Winkler foundation and under axial load. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol.12, *in press*.

Lai, Y. C.; Ting, B. Y.; Lee, W.; Becker, B. R., 1992. Dynamic response of beams on elastic foundation. *J. Struct. Eng*, vol.118, pp. 853-858.

Maciel, F. P., 2012. *Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas*. Dissertação, Universidade Federal de Ouro Preto.

Muñoz, L. F. P., 2015. *Análise dinâmica não linear de pórticos sob excitação de base considerando interação solo-estrutura*. Tese, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Naidu, N. R.; Rao, G. V., 1995. Stability behavior of uniform columns on a class of two parameter elastic foundation. *Computers and Structures*, vol.57, pp. 551-553.

Pasternak, P. L., 1954. *On a New Method Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants*. Gousuedarstvennoe Izadatesvo Literaturi po Stroitelstvuri Arkhitekture.

Sapountzakis, E. J.; Kampitsis, A. E., 2010. Nonlinear dynamic analysis of Timoshenko beam-columns partially supported on tensionless Winkler foundation. *Computer and Structures*, vol.88, pp. 1206-1219.

Shen, H., 2011. A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 11, n. 6, pp 999-1014.

Silva, A. R. D., 1998. *Análise de placas com restrições de contato*. Dissertação, Universidade Federal de Ouro Preto.

Silva, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese, Universidade Federal de Ouro Preto.

Silveira, R. A. M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Tedesco, J. W.; McDougal, W. G.; Ross, C.A., 1999. *Structural dynamics: Theory and applications*. Addison-Wesley, Menlo Park, CA.

Thambiratnam, D.; Zhuge, Y., 1996a. Free vibration analysis of beams on elastic foundation. *Computers and Structures*, vol.60, pp. 971-980.

Thambiratnam, D.; Zhuge, Y., 1996b. Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads. *Journal of Sound and Vibration*, vol.198(2), pp. 149-169.

Timoshenko, S.; Young, D. H., 1974. *Vibration problems in engineering*. 4. ed. Wiley, New York.

Winkler, E., 1867. *Die Lehre Von der Elasticitaet und Festigkeit*. Prag, Dominucus.

Yang, Y. B.; Kuo, S.B., 1994. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. Prentice Hall.