

OTIMIZAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM MEIO ANISOTRÓPICO PARA PCI UTILIZANDO MEC

Niécio Costa Anuniação, Jr.,

Tatiane Santos Leal Oliveira,

Carla T. Mota Anflor

Universidade de Brasília- UnB

Grupo de Mecânica Experimental e Computacional – GMEC

Endereço: Área Especial de Indústria Projeção A, UNB - DF-480 - Gama Leste, Brasília - DF, 72444- 240.

Resumo. O principal objetivo deste trabalho consiste em controlar o fluxo térmico de uma placa de circuito impresso (PCI) de comportamento anisotrópico. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi empregado para resolver a equação diferencial governante para problemas potenciais. O algoritmo genético (AG) foi utilizado como método de busca da solução ótima. Ao final são apresentados dois exemplos numéricos para demonstrar a viabilidade da metodologia proposta.

Palavras Chave: Otimização, transferência de calor, Método dos Elementos de Contorno, Algoritmo Genético, PCI.

Abstract. The main objective this paper relies on controlling the thermal flux of a printed circuit board (PCB) with anisotropic behaviour. The Boundary Element Method (BEM) was used in order to solve the differential governing equation for potential problems. The Genetic Algorithm (GA) was used as method of search for the optimal solution. Finally two numerical examples are presented for demonstrating the feasibility of the proposed methodology.

Keywords: Optimization, heat transfer, Boundary Element Method, Genetic Algorithm, PCB.

1 INTRODUÇÃO

Devido à tendência de miniaturização de eletrônicos algumas configurações de circuitos apresentam dispositivos com elevada dissipação de potência, resultando em sérios problemas no desempenho do produto. O conhecimento dos limites dos campos de temperatura e de fluxo térmico, dentro de uma placa de circuito impresso (PCI) são cruciais para as tomadas de decisões na melhora de um projeto (Khaji et al. 2013).

Neste sentido diversos pesquisadores têm devotado seus esforços no estudo do aumento da eficiência térmica de componentes eletrônicos, os quais podem ser realizados através de técnicas numéricas ou experimentais (Andonova, 2009). É de conhecimento geral que técnicas experimentais são algumas vezes extremamente caras devido à necessidade da manufatura de inúmeros protótipos e equipamentos de medição de considerável custo.

Para as técnicas numéricas uma metodologia amplamente empregada e consagrada é o Método dos Elementos Finitos (MEF). A principal característica do MEF é a necessidade de malha no domínio para solucionar a equação diferencial governante do problema.

Em casos de otimização um controle rigoroso de malha é necessário para verificar a convergência da solução o que eleva o custo computacional de maneira considerável segundo Guoquan et al. (2014). Nas últimas décadas um novo método conhecido como Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem atraído à comunidade científica por sua característica de necessitar discretização apenas no contorno. Esta particularidade faz com que este método seja mais atrativo para problemas de otimização conforme Brebbia et al. (1989). Esta singular característica resulta em uma vantagem, pois durante o processo iterativo de otimização a geometria do problema não necessita de rediscritização (Brebbia et al. 1978). Outro fator importante refere-se ao sistema matricial, que devido ser muito menor do que aquele gerado pelo MEF, resulta em uma considerável redução do custo computacional em problemas de otimização. Apesar das vantagens do MEC para problemas de otimização, o MEF ainda é mais amplamente empregado, pois a formulação de MEC é mais complexa. Dede (2010) emprega MEF e AG na simulação e otimização de fluxo de calor em materiais anisotrópicos. Neste trabalho o fluxo de calor foi controlado utilizando um método não-linear de programação, em que cada passo do processo de iteração gerava um problema convexo de aproximação da solução do problema. O processo de otimização empregado neste trabalho foi o método matemático conhecido como “*Method of Moving Asymptotes*” ou MMA, em que estabiliza ou acelera a convergência do processo de busca para solução ótima. O autor concentrou seus esforços na

diminuição substancial da temperatura máxima do material otimizado e uma concentração de densidade de potência nos locais pretendidos.

O método de convergência que será adotado para solução do problema no presente trabalho é o “*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*” mais conhecido como NSGA II. O algoritmo escolhido calcula uma função multi-objetivo em que implementa o conceito de Dominância, ou seja, classifica a população total de acordo com o grau de importância conforme Silva (2011). Os indivíduos são divididos em diferentes níveis através deste critério. Utilizando esta formulação os melhores indivíduos são armazenados no sistema enquanto que os piores são excluídos (Castro, 2001). Estes resultados foram atribuídos a uma redução fundamental na resistência térmica do material. Seguindo a mesma linha de investigação este trabalho tem por objetivo estudar a melhor configuração espacial das fibras internas de uma PCI manufaturada em matriz de comportamento anisotrópico para o controle do fluxo térmico, empregando o MEC acoplado ao Algoritmo Genético (AG) pelo processo do NSGA II.

2 MEC PARA PROBLEMAS POTENCIAIS

O Problema de transferência de calor na ausência de fontes é governado pela Equação de Laplace $\Delta u = 0$. Aplicando o teorema da divergência, teorema de Betti e o Método dos resíduos ponderados reduz-se um problema de domínio a um problema de fronteira (Brebbia et al. 1984). No método dos resíduos ponderados a função peso empregada é a solução fundamental da equação governante. O problema a ser tratado é estabelecido por uma EIC (Equação Integral de Contorno) sendo apresentada conforme a Eq. (1).

$$\frac{1}{2}u^i(x) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(x, x') d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u^*(x, x') d\Gamma \quad (1)$$

Para meios totalmente anisotrópicos, a equação governante é escrita em termos de coordenadas cartesianas, para Wrobel (2002) as equações podem ser representadas conforme a Eq. (2).

$$k_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2)$$

Assumindo que as propriedades tensoras dos materiais são simétricas, as equações podem ser escritas como soluções fundamentais de temperatura e fluxo de acordo com as Eq. (3) e Eq.

(4), respectivamente. O valor da distância entre o ponto fonte e o ponto campo pode ser obtido de acordo com a Eq. (5).

$$u^* = -\frac{1}{2\pi |k_{ij}|^{1/2}} \ln(r) \quad (3)$$

$$q^* = \left(k_{11} \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + k_{12} \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) n_{x1} + \left(k_{12} \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + k_{21} \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) n_{x2} \quad (4)$$

$$r = \left\{ k_{11} (x_1^i - x_1)^2 + 2k_{12} (x_1^i - x_1)(x_2^i - x_2) + k_{22} (x_2^i - x_2)^2 \right\}^{1/2} \quad (5)$$

Onde $|k_{ij}|$ é o determinante de condutividade e s é o inverso da matriz k conforme apresentado na Eq. (6).

$$|k_{ij}| = k_{11}k_{22} - k_{12}^2 \quad ; \quad s = k^{-1} = \frac{1}{|k_{ij}|} \begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para transformar a solução anisotrópica em isotrópica é imposto que $k_{12} = 0$ e $k_{11} = k_{22}$ para as propriedades simétricas da equação governante das coordenadas cartesianas da Eq. (2). Elementos isoparamétricos são aqueles em que as mesmas funções de forma utilizadas para aproximar a geometria também são empregadas para aproximar as variáveis de contorno. Os valores de u e q para qualquer ponto pertencente ao elemento podem então ser escritos em termos de valores nodais e de funções de interpolação de acordo com a Eq. (7).

$$\begin{aligned} u(\xi) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = [N_1 N_2 N_3] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ q(\xi) &= N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 = [N_1 N_2 N_3] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Onde ξ é o local das coordenadas isométricas definido entre $[-1,+1]$ e N_1 , N_2 e N_3 são funções de equações quadráticas contínuas. Considerando as discretizações, as integrais das equações podem ser escritos de acordo com a Eq.(8) e Eq.(9).

$$\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma = \int_{\Gamma_j} u^* [N_1 N_2 N_3] q d\Gamma = [G_1^{ij} G_2^{ij} G_3^{ij}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_j} q^* u d\Gamma = \int_{\Gamma_j} q^* [N_1 N_2 N_3] u d\Gamma = [H_1^{ij} H_2^{ij} H_3^{ij}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

As Eq. (8) e (9) são discretizadas para todo o contorno e resultam conforme a Eq. (10).

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{2N} G^{ij} q^j \quad (10)$$

Para o reordenamento da Eq. (10), as variáveis desconhecidas são colocadas ao lado esquerdo $\{X\}$ e um vetor do lado direito $\{F\}$ obtido pela multiplicando os elementos da matriz pelos valores conhecidos de potencial e fluxo. Este procedimento resulta no sistema apresentado na Eq. (11) que ao ser resolvido resulta no conhecimento de todas as incógnitas do contorno $\{X\}$.

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (11)$$

2.1 ELEMENTOS QUADRÁTICOS CONTÍNUOS

Na discretização utilizando elementos quadráticos contínuos a geometria é aproximada por uma função quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento conforme mostrada na Figura 1.

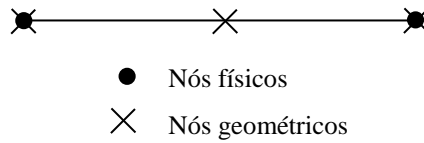


Figura 1: Discretização da geometria de elementos quadráticos

Os elementos de contorno Γ_i são considerados parabólicos, ou seja, são descritos por polinômios de 2ª ordem (equação de uma parábola). Desta forma são necessários 3 pontos de Γ_i para que uma parábola seja definida. Estes pontos são dados por (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) , que correspondem respectivamente às coordenadas intrínsecas $\xi = -1$, $\xi = 0$ e $\xi = 1$, conforme ilustrado na Figura 2. Criando uma função parabólica para relacionar x com ξ , tem-se:

$$x = a\xi^2 + b\xi + c \quad (12)$$

Sendo que:

$$x(\xi = -1) = x_1, x(\xi = 0) = x_2 \text{ e } x(\xi = +1) = x_3 \quad (13)$$

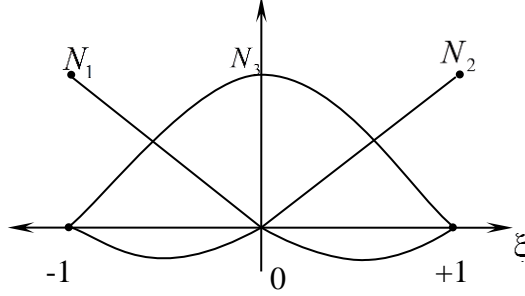


Figura 2: Funções de forma quadráticas contínuas

As funções de forma podem ser escritas conforme a Eq.(14).

$$x = \underbrace{\frac{\xi}{2}(\xi - 1)}_{N_1} x_1 + \underbrace{(1 - \xi)(1 + \xi)}_{N_2} x_2 + \underbrace{\frac{\xi}{2}(\xi + 1)}_{N_3} x_3 \quad (14)$$

Sendo que:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (15)$$

Onde N_1, N_2 e N_3 são as funções de forma quadráticas contínuas dadas conforme Eq.(16).

$$N_1 = \frac{\xi}{2}(\xi - 1), N_2 = (1 - \xi)(1 + \xi) = 1 - \xi^2 \text{ e } N_3 = \frac{\xi}{2}(\xi + 1) \quad (16)$$

Da mesma forma, tem-se que,

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (17)$$

Na discretização utilizando o MEC a geometria é aproximada por uma função quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento. Assim temperaturas e fluxos são aproximados conforme as Eq. (18) e (19).

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (18)$$

$$q = N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 \quad (19)$$

Onde u_1 é a temperatura no nó local 1, u_2 a temperatura no nó local 2, u_3 a temperatura no nó local 3, q_1 é o fluxo no nó local 1, q_2 é o fluxo no nó local 2, q_3 é o fluxo no nó local 3, N_1 é a função de forma 1, N_2 é a função de forma 2, e N_3 é a função de forma 3. As funções de forma quadráticas contínuas N_1 , N_2 e N_3 são apresentadas pela Figura 4 e a formulação de função de forma pela Eq. (16). Escrevendo na forma matricial, temos as Eq. (20) e (21).

$$u = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$q = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

A equação integral discretizada é então escrita conforme Eq.(22).

$$c u(d) = \sum_{j=1}^{n_{elem}} \left\{ [H_1 H_2 H_3]_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - [G_1 G_2 G_3]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (22)$$

3 OTIMIZAÇÃO UTILIZANDO O ALGORITMO GENÉTICO

A otimização via AG é o ato de se encontrar um resultado ou conjunto de soluções ótimas para dadas circunstâncias, ou seja, é a procura de um melhor resultado para uma determinada função ou conjunto de funções conforme Takahama (2004). O método imita os processos biológicos baseado na evolução das espécies, onde os procedimentos são basicamente: seleção natural, pareamento e mutação.

Na implementação numérica foi criada uma população inicial aleatória, contendo diversidade suficiente para que combinem características á produzir novas populações. O operador de seleção utilizado foi o NSGA II, onde uma função objetivo é calculada para dar ao algoritmo padrões para selecionar os melhores indivíduos. A função objetivo é essencial para propagar as gerações futuras os melhores resultados de cada geração. Neste caso de aplicação da NSGA II somente as melhores soluções continuarão a existir para as próximas gerações, todo procedimento do AG pode ser visto na Figura 3.

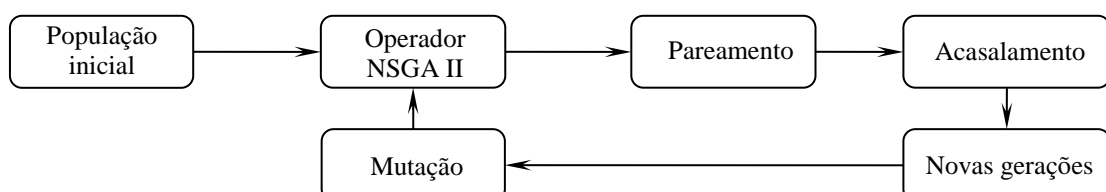


Figura 3: Esquema do Algoritmo Genético

O operador de pareamento define os pares usando as melhores características dos indivíduos. O próximo passo é o acasalamento, que consiste em criar novas topologias (famílias), neste trabalho adotou-se um pareamento baseado na Teoria da Evolução das Espécies de Charles Darwin do tipo *crossover* (operador de acasalamento). Este procedimento gera dois filhos para cada acasalamento, onde estes serão membros para as próximas gerações. O *crossover* é determinado com porcentagens cromossômicas dos pais, onde o processo pode ser visualizado a partir do esquema apresentado na Figura 4. É possível observar que o primeiro filho recebeu mais características cromossômicas do pai, enquanto que o segundo filho recebeu mais características cromossômicas da mãe. O mesmo procedimento é repetido, porém com indivíduos carregando características diferentes da primeira geração, até ser encontrado o indivíduo que carrega melhor informação genética. O último operador é o mutação, o qual é responsável por alterar aleatoriamente uma pequena porção dos cromossomos. Os cromossomos carregam as informações genéticas em forma de números binários. A mutação é ilustrada na Figura 4, onde consiste na troca aleatória de uma das posições no cromossomo de 0 para 1 ou vice-versa, este simples procedimento é um dos grande atrativos do AG, por evitar que o algoritmo fique estagnado em um mínimo local, aumentando a possibilidade de encontrar o máximo global do espaço de busca.

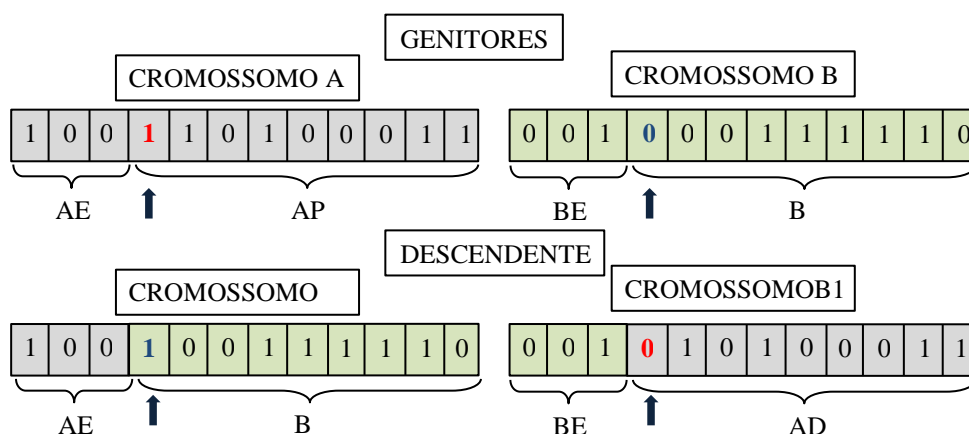


Figura 4: Detalhe do processo de Pareamento, Crossover e Mutação.

O processo de otimização descrito é repetido até que um critério de parada seja atingido. Geralmente o critério de parada é definido como um número máximo de iterações ou valor

mínimo/máximo da função objetivo. A Figura 5 apresenta o esquema do algoritmo implementado neste trabalho, onde são incluídas as sub-rotinas do MEC/AG. No processo de otimização a função objetivo é definida com a necessidade específica do projeto. Para cada indivíduo há um valor de função objetivo, onde os melhores classificados são selecionados e os piores são descartados. Neste sentido a população convergirá para uma melhor configuração que atenda a especificação de projeto.

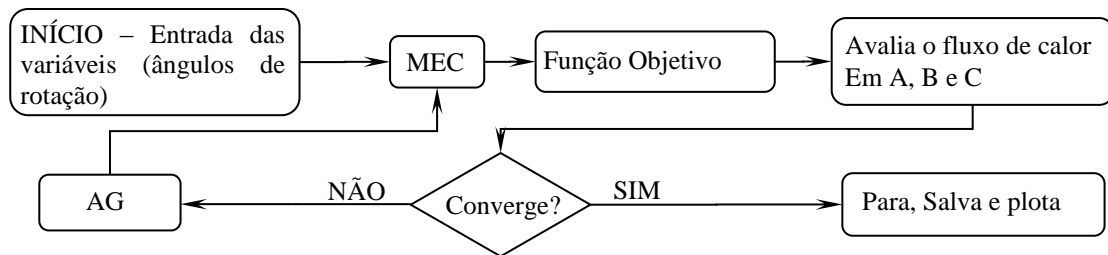


Figura 5: Rotina do Algoritmo Genético associado ao MEC

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para efeito de avaliar a metodologia proposta para a solução de uma PCI, é considerado um domínio retangular de 2×1 unidades, sujeito as condições de contorno de Dirichlet em três de suas arestas (em A, B, C e D) e Neumann nas demais (ver fig. 2). Todo o domínio foi discretizado com 1464 elementos de contorno quadráticos contínuos. Destes 1464 elementos, 792 elementos foram utilizados para discretizar o contorno externo e o restante foi utilizado na discretização dos furos. Cada furo foi discretizado com 8 elementos. No interior do domínio foram inseridos 168 furos, as quais representam as fibras com características de material de baixa condutividade térmica (isolante). Neste sentido foi prescrito condição de Neumann igual á zero e a integração numérica foi realizada com seis pontos Gauss. Para o processo de otimização de melhor disposição das fibras dentro da matriz foi utilizado o AG com a teoria da evolução das espécies, onde a Tabela 1 apresenta os parâmetros utilizados neste trabalho. Segundo Goldberg (1989) a taxa de mutação indicada é de no máximo 5%, sendo que tal recomendação foi considerada neste trabalho.

Tabela 1: Parâmetros de otimização

Parâmetros AG	
População Inicial	50
População Final	500
Crossover	5%
Mutação	1%

A disposição inicial das fibras foi definida inicialmente como aleatória (iteração 1), sendo que, para o processo de otimização as variáveis de projeto são os próprios ângulos de rotação das

fibras em que cada uma delas tem capacidade de giro de 360° independentes. Para o processo de otimização a função objetivo consiste em maximizar o fluxo na aresta A e minimizar nas arestas B e C. Foram adicionadas condições de contorno no ponto D de 100° C e de 25° C em A, B, e C. O objetivo consiste em medir os campos de fluxos nas arestas indicadas como A, B e C de acordo a atender a função multi-objetivo imposta no AG.

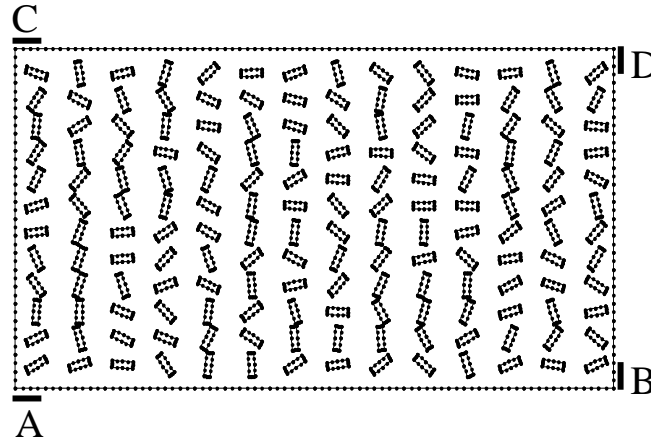


Figura 6: Detalhe das condições de contorno e lay-out inicial da PCI

Neste trabalho dois casos serão analisados, sendo um de matriz de comportamento isotrópica e outra anisotrópica. O comportamento do fluxo térmico, bem como, a orientação das fibras serão apresentados e discutidos para ambos os casos.

4.1 MATRIZ ISOTRÓPICA

No presente trabalho a Eq.(2) é reduzida ao problema isotrópico ao impor-se que $k_{11} = k_{22} = k$ e $k_{12} = 0$ e reescrita conforme Eq. (23).

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \right) = 0 \quad (23)$$

Onde k é a condutividade térmica do material para meios isotrópicos. O tensor de condutividade térmica isotrópica para o problema em 2D estudado neste trabalho é apresentado segundo a Eq.(25).

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A Figura 7 refere-se a iteração 478, a qual apresenta a melhor configuração de projeto após o processo de otimização atingir o critério de parada imposto. O número total de iterações foi ajustado em 500, onde a população foi avaliada até se obter o maior valor de fluxo na aresta

A, a partir da melhor distribuição dos ângulos das fibras. De acordo com a Figura 7 é possível visualizar a orientação das fibras no sentido de priorizar o fluxo de calor da aresta D para a A.

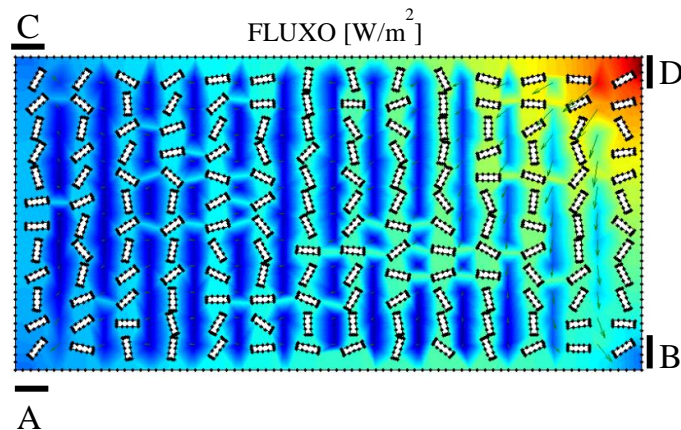


Figura 7: Iteração 478 com melhor distribuição de fluxo

A Figura 8 apresenta a evolução dos fluxos nas arestas A, B e C a medida que o processo iterativo evolui. A orientação de fibras no interior da PCI fazem com que ocorra uma oscilação dos fluxos de calor nas tres arestas. Isto se deve ao fato de que a otimização é multio-objetivo e neste sentido ao mesmo tempo em que se maximiza na aresta A se minimiza na B e C. Observando especificamente o ponto A, a iteração 1 iniciou em $131,29 \text{ W/m}^2$ e ao final do processo iterativo o fluxo é maximizado à $145,41 \text{ W/m}^2$. Nas arestas B e D o fluxo de calor para a primeira iteração foi calculado em $360,54 \text{ W/m}^2$ e $132,23 \text{ W/m}^2$, respectivamente. Considerado a últimas iterações os valores de fluxo de calor para estas arestas foram minimizados para $132,23 \text{ W/m}^2$ e $127,54 \text{ W/m}^2$. Ao atende a função multi-objetivo é possível verificar simultaneamente nas fig 9 e Fig 8 que as fibras foram rotacionadas de maneira a direcionarem o campo de fluxo para a aresta A.

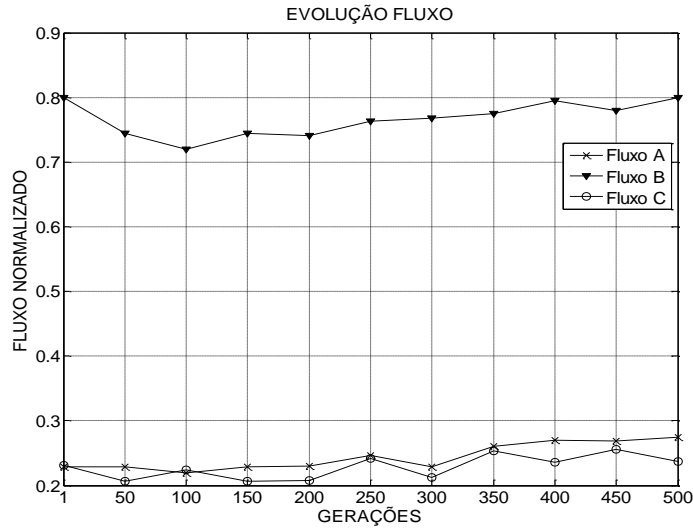


Figura 8: Evolução do fluxo de calor nas arestas A, B e C

4.2 MATRIZ ANISOTRÓPICA

Para materiais em meio totalmente anisotrópicos e equação governante apresentada na Eq.(2) é empregada em sua forma completa e reescrita novamente por comodidade conforme a Eq.(25).

$$k_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + k_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (25)$$

Onde k_{ij} é o coeficiente que representa os termos das propriedades dos tensores nas direções i e j . Neste trabalho os valores do tensor de condutividade térmica para a matriz anisotrópica foram impostos de acordo com a Eq.(26).

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

A Figura 9 apresenta a melhor configuração de projeto, a qual foi atingida na iteração 473, do processo de otimização. Apesar do comportamento anisotrópico da matriz, é possível verificar a tendência das fibras em direcionarem o fluxo de calor para a aresta A.

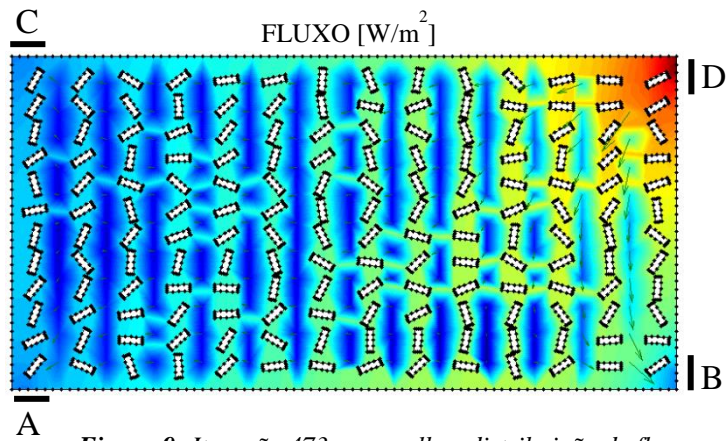


Figura 9: Iteração 473 com melhor distribuição de fluxo

A Figura 10 apresenta o comportamento do fluxo de calor durante a evolução da otimização realizada pelo AG. Na primeira iteração o fluxo de calor na aresta A foi calculado em 201,67 W/m² sendo maximizado para 217,06 W/m². Para a aresta B e C o fluxo de calor na primeira iteração foi calculado em 445,35 W/m² e 135,73 W/m², sendo minimizado ao final do processo iterativo para 395,92 W/m² e 122,63 W/m², respectivamente. Apesar de não ser tão evidente quanto no caso isotrópico, também é possível verificar um alinhamento das fibras no sentido diagonal da aresta D para A, com o objetivo de priorizar o fluxo de calor entre estes dois extremos.

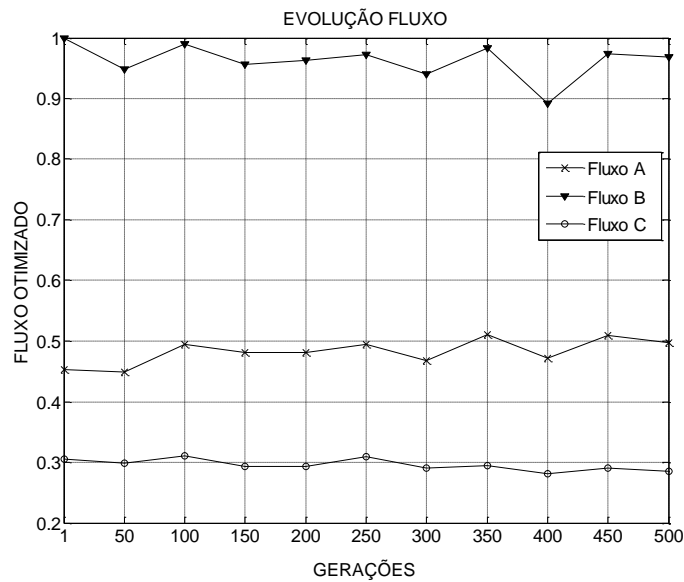


Figura 10: Desenvolvimentos de fluxos nas arestas A, B e C

5 CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho consistiu em controlar o fluxo térmico de uma placa de circuito impresso (PCI) de comportamento anisotrópico em três pontos de controle os quais foram definidos sob as arestas A, B e C. O MEC foi empregado na solução da equação de Laplace e devido a suas características demonstrou-se um método eficaz na solução do problema estudado. Problemas de quase-singularidades, particulares ao MEC, foram controlados ao manter-se uma distância mínima entre inclusões quando rotacionadas. A grande quantidade de variáveis de projeto consideradas neste trabalho classificou o problema de otimização como não-convexo, ou seja, uma grande possibilidade de soluções ótimas. Neste sentido como método alternativo aos métodos gradientes o AG foi utilizado com êxito na busca de um possível mínimo global. Os resultados finais apresentaram coerência com o objetivo da proposta de otimização multi-objetivo, na qual consistia na maximização do fluxo de calor na aresta A e minimização nas arestas B e C. Neste sentido a metodologia empregada mostrou-se viável, podendo ser estendida a problemas que considerem fontes de calor dentro do domínio.

6 REFERÊNCIAS

- ANDONOVA, A., KAFADAROVA, N.; *PCB thermal design improvement through thermal vias*. WSEAS, Bulgaria. 2009.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J., *Boundary elements: an introductory course*, *Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill*, Southhampton, 1989.
- BREBBIA, C.A.; *The Boundary Element Method for engineers*. London: Pentech Press, (1978). 188p.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. *Boundary Element Techniques: theory and applications in engineering*. London: Springer - Verlag, (1984). 352p.
- CASTRO, R.E.; *Otimização de estruturas com multi-objetivos via Algoritmos Genéticos*. Rio de Janeiro, 2001, 206 p. (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 2001). Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
- DEDE, E.M.; *Simulation and optimization of heat flow via anisotropic material thermal conductivity*, *Computational Materials Science*, 50 (2), 510-515, (2010).
- GUOQUAN, R; DONGWEI, LI.; YINGQI, J.; *Modal Analysis of the printed circuit board based on Finite Element Method*. International Conference on Computer Science and Electronic Technology (ICCSET), 150-154, (2014).

KHAJI, N.; HAMZEHEI, S.; *New complex fourier shape functions for the analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method*. Computational Materials Science, 37, 260-272, (2013).

SILVA, E. R.; *Otimização de estruturas de concreto armado utilizando Algoritmos Genéticos*. São Paulo, 2011. 131p. (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações). Dissertação (Mestrado).

TAKAHAMA, T., SAKAI, S., ICHIMURA, T., ISOMICHI, Y.; *Structural optimization by Genetic Algorithm with degeneration (GAd)*. Wiley Periodicals, Inc. Syst Comp Jpn, 35(5):32-43-(2004).

WROBEL, L. C.; *Boundary Element Method - Volume 1*. John Wiley & Sons. Ltd, England, 2002.