



QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS EM EXPERIMENTO SIMPLES DE VIBRAÇÕES

Daniel Baldasso Robbi, Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz, Tiago Camargo Alves, Francisco Luiz Perdigão Neto

Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia - FT

Universidade de Brasília Campus Universitário Darcy Ribeiro

Asa Norte, 70910-900, Brasília - DF, BRAZIL

RESUMO: Dentro de um contexto de verificação e validação de modelos computacionais levando-se em conta incertezas de medição, é realizado um estudo que demonstra de forma clara e objetiva o uso da metodologia de cálculo de incertezas do ISO-GUM em um problema de vibrações mecânicas. Partindo-se de uma montagem experimental simples é definido um modelo matemático do experimento usando parâmetros concentrados e os valores experimentais dos parâmetros do modelo, com suas respectivas incertezas de medição. Usando-se o modelo desenvolvido e realizando-se os ensaios experimentais, é demonstrado o uso da metodologia de propagação de incertezas do ISO-GUM para se determinar a frequência natural do sistema vibrante. O trabalho demonstra a aplicação da metodologia do ISO-GUM considerando as abordagens analítica e experimental. O estudo incluiu ainda o uso de análise de sensibilidade da resposta da estrutura, para refinamento do modelo matemático e determinação dos parâmetros relevantes para a dinâmica da estrutura. Demonstra-se que a correta quantificação das incertezas é fundamental na comparação de resultados analíticos/numéricos e resultados experimentais, aumentando a confiança na significância dos mesmos. Apresentam-se os resultados obtidos, juntamente com a descrição do aparato experimental usado. A organização do trabalho favorece a compreensão da metodologia do ISO-GUM e sua aplicação em práticas de validação de modelos computacionais, cada vez mais necessárias na indústria, para garantir a qualidade das simulações realizadas.

Palavras Chaves: propagação de incertezas, ISO-GUM, validação de modelos, metrologia.

ABSTRACT: *Within a context of verification and validation of computational models taking into account measurement uncertainties, this paper shows, in a objective way, the use of the ISO-GUM methodology for uncertainty calculation in a problem of mechanical vibration. Starting from a simple experimental setup, a mathematical model of the experiment was developed using lumped parameters and the experimental values of model parameters, with their respective measurement uncertainties. Using the developed model and carrying out the experimental tests, are shown the use of the ISO-GUM method to propagate the uncertainties in determining the natural frequency of the vibrating system. The work demonstrates the application of ISO-GUM methodology in analytical and experimental approaches. The study included the use of the response sensitivity analysis of the structure to refine the mathematical model and to determine the relevant parameters to the dynamics of the structure. It is shown that the correct quantification of uncertainties is essential in the comparison of analytical/numerical results and experimental results, increasing confidence in the significance thereof. The paper presents the results obtained, together with a description of the experimental apparatus used. The organization of the paper improves the understanding of ISO-GUM methodology and its application in practical validation of computational models, increasingly needed in the industry, to ensure the quality of simulations.*

Keywords: *propagation of uncertainty, ISO-GUM, model validation, metrology.*

RESUMEN: *Dentro de un contexto de verificación y validación de modelos computacionales teniendo en cuenta las incertidumbres de medición, es un estudio que muestra de manera objetiva el uso de la metodología de cálculo*

de la incertidumbre del ISO-GUM en un problema de la vibración mecánica. A partir de una configuración experimental simple se define un modelo matemático del experimento utilizando parámetros concentrados y los valores experimentales de los parámetros del modelo, con sus respectivas incertidumbres de medición. Usando el modelo desarrollado y llevando a cabo los ensayos experimentales, se muestran usando el método de propagación de incertidumbre del ISO-GUM en la determinación de la frecuencia natural del sistema de vibración. El trabajo demuestra la aplicación de la metodología del ISO-GUM considerando los enfoques analíticos y experimentales. El estudio incluyó el uso del análisis de sensibilidad de la respuesta estructural para refinar el modelo matemático y determinar los parámetros relevantes para la dinámica de la estructura. Se muestra que la cuantificación correcta de incertidumbres es esencial en la comparación de los resultados analíticos / numéricos y los resultados experimentales, aumentando la confianza en la importancia de estos. Se presenta los resultados obtenidos, junto con una descripción del aparato experimental utilizado. La organización del trabajo favorece la comprensión de la metodología del ISO-GUM y su aplicación práctica en la validación de los modelos computacionales, cada vez más necesarias en la industria, para garantizar la calidad de las simulaciones.

Palabras clave: propagación de la incertidumbre, ISO-GUM, validación de modelos, metrología.

1. INTRODUÇÃO

O uso crescente de modelos computacionais na indústria cria a necessidade de se garantir a qualidade dos resultados produzidos por simulações computacionais. Diante da proliferação de softwares e da sofisticação dos mesmos, o uso de modelos computacionais no projeto e análise de sistemas de engenharia é cada vez mais frequente. Contudo, devido à própria sofisticação dos pacotes computacionais e à tentativa de simplificação da interface com o usuário, bem como da multiplicação de métodos de modelagem disponíveis, surgem questões quanto à validade e qualidade dos modelos computacionais usados e dos resultados deles advindos. Juntamente com os resultados das simulações deve-se apresentar o detalhamento da metodologia de modelagem, das hipóteses de simplificação, de como os parâmetros do modelo foram obtidos, de como a simulação foi feita e de como os resultados foram tratados e criticados. Nessa linha e para garantir a qualidade das simulações computacionais usadas na engenharia, a Sociedade Americana de Engenharia Mecânica (ASME, na sigla em inglês), lançou em 2006 o “*Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*” (ASME, 2006), com diretrizes gerais a serem seguidas para a verificação e validação de modelos computacionais.

A verificação de modelos computacionais diz respeito aos testes do código computacional implementado, verificando se o mesmo representa exatamente o modelo matemático, segue corretamente a metodologia de solução e fornece os resultados adequados a essa metodologia e modelo. Já a validação se ocupa de avaliar se o modelo computacional representa corretamente o fenômeno físico real que se pretende simular, levando-se em contas os parâmetros do sistema e as condições de contorno. Assim a validação de modelos envolve necessariamente a realização de experimentos, que por sua vez devem também ser realizados de forma a garantir a qualidade e confiabilidade dos resultados (Aguiar, et. al., 2003) e (ABNT, 2005).

Coleman e Steele (2009) chamam a atenção de que mesmo a solução analítica de modelos usa em uma ou mais etapas valores obtidos experimentalmente seja para a caracterização dos parâmetros do modelo, ou na definição das hipóteses ou pressupostos usados nas simplificações do modelo analítico. Assim, tanto na solução de modelos analíticos (usando valores realistas obtidos experimentalmente) quanto na comparação dos resultados entre modelos e experimentos deve-se levar em conta a qualidade dos valores obtidos por meio de medições.

Oberkampff e Roy (2010), que tratam detalhadamente dos métodos de verificação e validação de modelos em seu livro, destacam que a validação de modelos vai além da calibração de modelos (onde se busca apenas ajustar os valores do modelo para aproximar os resultados experimentais), mas envolve também testes para verificar erros nas considerações e hipóteses de modelagem, onde a análise de sensibilidade e métodos experimentais diferentes devem ser considerados.

Um ponto comum em todas essas obras e normas é a importância de se caracterizar corretamente e com confiabilidade os resultados experimentais. A completa caracterização de uma grandeza medida (em laboratórios ou no “chão de fábrica”) exige que se explicita, além de seu valor mais provável (valor medido), também a incerteza associada a essa medição.

Uma metodologia, reconhecida internacionalmente, para expressar o resultado de medições e suas respectivas incertezas foi publicada em 1993; baseada em uma proposta do Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), apoiada pela ISO – International Organization for Standardization e outras seis organizações internacionais. Esse documento, conhecido como “ISO-GUM – Guide to the expression of uncertainty in measurement” foi revisado e ampliado nos últimos anos, sendo sua versão mais recente de 2008 (JCGM, 2008). A aplicação desse guia nos ensaios realizados em laboratórios de pesquisa contribui com o aumento da confiabilidade metrológica dos resultados obtidos sem afetar a metodologia de pesquisa (Felippes e Diniz, 2007) e (Diniz, 2009).

Apesar de reconhecido internacionalmente e aplicado na indústria na medição de grandezas importantes na fabricação e controle de processos, o ISO-GUM ainda é pouco usado em ensaios laboratoriais e na validação de modelos, principalmente quando se envolve várias grandezas ou processos de identificação como nos ensaios de vibração e análise modal.

Assim, este trabalho apresenta um exemplo de aplicação do ISO-GUM no cálculo de incertezas de resultados experimentais e na solução de modelos analíticos usando valores experimentais, para subsidiar a verificação e validação de modelos computacionais usados na análise modal de estruturas. Procura-se, com este texto, apresentar a metodologia de uma forma clara para que seja usada em aulas experimentais dos cursos de vibrações mecânicas, incentivando as boas práticas de experimentação, cálculo de incertezas, e aumentando a confiabilidade dos resultados das simulações computacionais. Desta forma, considera-se uma estrutura vibrante simples, construída em laboratório, constituída por uma viga longa de pequeno diâmetro rotulada em uma extremidade e sustentada por uma mola na outra. A montagem experimental é modelada

como um sistema com apenas um grau de liberdade e o modelo é validado por experimentos que seguem rigorosamente a metodologia de cálculo de incerteza do ISO-GUM.

O estudo de vigas em vibração é um campo clássico da pesquisa em engenharia. Apesar do rigor científico com que foram realizados os inúmeros estudos numéricos e experimentais no passado, apenas nos últimos trinta anos começaram a surgir trabalhos preocupados com a presença de incertezas e aleatoriedades nas estruturas estudadas (Vanmarcke e Grigoriu, 1983) (DerKiureghian e Ke, 1988). Estes estudos podem ser agrupados em trabalhos de simulação numérica, considerando a presença de incertezas nos parâmetros (Silva Jr e Beck, 2011) ou nas condições de contorno (Ritto et. al., 2008) da estrutura; e trabalhos experimentais, que incluem a quantificação de incertezas na análise dos resultados obtidos.

A quantificação de incertezas em problemas de simulação numérica volta-se prioritariamente para a definição de uma distribuição de probabilidade que represente corretamente a aleatoriedade dos sistemas físicos modelados (Sampaio e Cataldo, 2010) e para os métodos de solução desses problemas (Diniz et al., 2011).

Dentre os recentes trabalhos experimentais, destacam-se o estudo de Laizans (2014), que lista várias grandezas de influência que causam incertezas nas medições em sistemas vibrantes, e o artigo de Laborde e Calvi (2012) que quantifica a incerteza de Funções Resposta em Frequência, obtidas em ensaios de varredura em seno. No tocante a sistemas de monitoração de vibrações, Granhen et al. (2007), aplicam a metodologia do ISO-GUM na quantificação da incerteza experimental de uma cadeia de medição de vibração, usando o LabView®, e Eidukeviciute e Volkovas (2007) avaliam a influência das incertezas desses sistemas nas tomadas de decisão sobre o estado de funcionamento dos equipamentos monitorados.

Contudo ainda são poucos os trabalhos de verificação e validação de modelos de estruturas, que integram os dois grupos de estudos mencionados, que aplicam as metodologias de cálculo de incerteza do ISO-GUM.

Espera-se com esse trabalho contribuir com a divulgação do uso da metodologia do ISO-GUM e com a adoção de boas práticas para a validação de modelos computacionais na área de dinâmica de estruturas e análise modal.

São apresentados a seguir uma introdução ao método de cálculo de incertezas do ISO-GUM (seção 2) e a aplicação do mesmo na solução do modelo analítico (usando valores experimentais) e na realização de um experimento de validação (seções 4 e 5). A descrição da

montagem experimental é feita na seção 3. Apresentam-se também comentários e conclusões na seção 6.

2. A METODOLOGIA ISO-GUM PARA CÁLCULO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO

A aplicação do ISO-GUM para o cálculo da incerteza de medição envolve, de maneira geral, as seguintes etapas:

- 1- Definição do mensurando (grandeza que se quer medir);
- 2- Definição do modelo de medição e das grandezas de entrada (relacionando todas as grandezas necessárias para determinar o valor do mensurando);
- 3- Determinar os valores estimados e as incertezas padrão das grandezas de entrada;
- 4- Determinar o valor estimado do mensurando (usando o modelo de medição);
- 5- Determinar a incerteza padrão combinada do mensurando;
- 6- Determinar a incerteza expandida do mensurando para um intervalo de confiança definido (se for o caso).

A **definição do mensurando** (Y) está diretamente relacionada ao fenômeno que se quer estudar, não sendo uma tarefa (na maioria das vezes) complicada. As demais etapas serão detalhadas a seguir, observando-se a metodologia definida pelo ISO-GUM.

O **modelo de medição** (f) expressa matematicamente a relação entre o mensurando (Y) e cada uma das grandezas de entrada (X_i), incluindo as eventuais correções necessárias:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \quad (1)$$

O **valor estimado** (x_i) **da grandeza de entrada** (X_i) é obtido com base em análise estatística ou outros meios (tabelas, constantes físicas, certificados de calibração, etc.). No caso de várias medições, o melhor estimador é a média aritmética (\bar{x}) dos “ n ” valores experimentais.

A **incerteza padrão** “ $u(x_i)$ ” **da grandeza de entrada** pode ser obtida, segundo o ISO-GUM, de duas maneiras:

- i*) Avaliação tipo A da incerteza padrão da grandeza de entrada. Obtida por meio da análise estatística, ela usa o desvio padrão amostral dos resultados experimentais obtidos:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

- ii*) Avaliação tipo B da incerteza padrão da grandeza de entrada. Obtida por outros meios, que não a análise estatística, e baseada nas informações disponíveis, tais como:

- dados de medições prévias;

- experiência com ou conhecimento geral do comportamento e das propriedades materiais e instrumentos relevantes;
- especificações do fabricante;
- dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados;
- incertezas atribuídas a dados de referencia extraídos de manuais.

A **estimativa do mensurando** (y), também chamada de grandeza de saída, é determinada usando-se o modelo de medição. Para o cálculo da **incerteza padrão combinada do mensurando**, “ $u_c(y)$ ”, no caso de grandezas de entrada não correlacionadas, usa-se a Equação (3), resultante do desenvolvimento em Série de Taylor até a primeira ordem do modelo de medição (f):

$$u_c(y) = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u(x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

Se for necessário fornecer uma **incerteza expandida** “ U ”, cujo propósito é prover um intervalo $[y - U, y + U]$ com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando “ Y ”, deve-se multiplicar a incerteza-padrão combinada “ $u_c(y)$ ” por um fator de abrangência “ k ”, levando-se em conta o grau de liberdade “ v_{eff} ” do mensurando. Assim, considerando os graus de liberdade “ v_i ”, de cada grandeza de entrada “ x_i ”, o grau de liberdade do mensurando é dado por:

$$v_{eff} = \frac{\left[\frac{u_c(y)}{y} \right]^4}{\sum \left[\frac{u(x_i)}{x_i} \right]^4 / v_i} \quad (4)$$

Para uma grandeza obtida a partir de “ n ” medições, o grau de liberdade “ v ” é igual a $(n-1)$. Para uma avaliação tipo B de incerteza, o grau de liberdade será considerado infinito. O grau de liberdade deve ser um número inteiro, portanto, quando necessário, deve ser arredondado para o inteiro superior mais próximo.

Esse procedimento será empregado na continuação deste trabalho com o objetivo de exemplificar o uso do ISO-GUM em experimentos de vibração e análise modal.

3. DESCRIÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL

Considera-se neste trabalho a vibração livre amortecida de uma barra rotulada e sustentada por uma mola na extremidade oposta. Consideram-se diferentes níveis de amortecimento e medindo-se a vibração da barra, identifica-se a frequência natural e o amortecimento viscoso

do sistema. O experimento foi realizado na bancada didática desenvolvido no Laboratório de Vibrações da UnB (Oliveira Neto et al, 2006), usando a montagem mostrada na Figura (1).

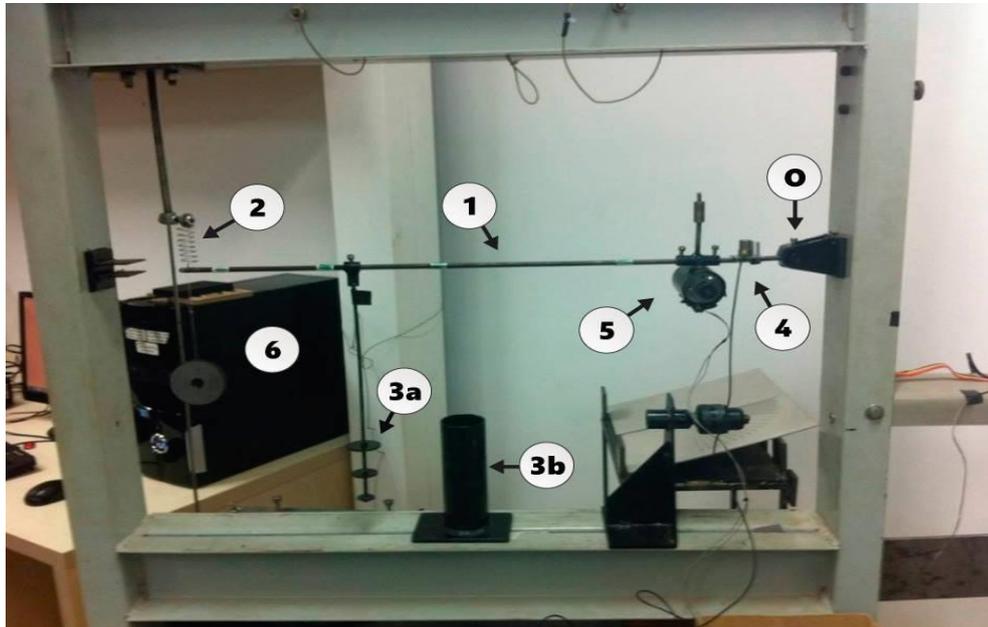


Figura 1: Montagem experimental.

O sistema é composto por uma barra (1) de seção transversal circular rotulada no ponto “O” e sustentada por uma mola (2) na outra extremidade. A medição da vibração no plano vertical é feita usando um acelerômetro (4) e um dispositivo amortecedor é usado para implementar diferentes condições de amortecimento viscoso. Este dispositivo é constituído por uma barra (vertical) com três discos de diferentes diâmetros (3a) que se movimentam dentro de um recipiente cheio de água (3b).

Variando-se a quantidade de água dentro do recipiente podem-se ter quatro condições: *i*) Sem amortecimento; *ii*) com amortecimento pequeno (só um disco mergulhado); *iii*) com amortecimento médio (dois discos mergulhados); *iv*) com amortecimento grande (três discos mergulhados). Deve-se destacar que mesmo quando o dispositivo de amortecimento não é usado, a montagem experimental ainda possui um pequeno amortecimento causado pelo atrito na rótula. Para fins de comparação a barra com os três discos é mantida suspensa na barra principal, mesmo para o caso “sem amortecimento”.

Na Figura 1 pode-se ver ainda um motor elétrico (5) que é usado só nos ensaios de vibrações forçada, mas, por estar montado na barra principal e por sua massa afetar a dinâmica do conjunto, foi considerado mesmo nos ensaios de vibrações livres. O computador (6) é usado para a aquisição e tratamentos dos dados medidos.

Os instrumentos utilizados na medição das grandezas importantes no experimento e suas respectivas resoluções estão explicitados na Tabela (1).

Tabela 1: Instrumentação utilizada na montagem experimental.

Instrumento	Resolução	Grandeza medida
Balança digital Sartorius 2351	0,1 g ($1 \cdot 10^{-4}$ kg)	Massa dos componentes (barra, motor, acelerômetro e amortecedor)
Trena	0,5 mm ($5 \cdot 10^{-4}$ m)	Comprimento da barra e localização do motor, da mola e do amortecedor.
Acelerômetro PCB Piezotronics modelo 353 B03	0,03 m/s ²	Vibração da barra

Para aquisição e tratamento dos dados medidos foi desenvolvido um instrumento virtual usando o LabView[®] e uma placa de aquisição de dados da National Instruments. O LabView[®] é um ambiente de programação gráfica, desenvolvida pela National Instruments, que utiliza programação por blocos, onde ícones, em vez de linhas de texto, são usados para criar sistemas de medição e controle. A placa de aquisição usada foi a NI cDAQ 9174 juntamente com o módulo de alta velocidade NI 9234, ambos da National Instruments. Foi usado ainda um amplificador modelo 480C02 da PCB Piezotronics para condicionamento do sinal do acelerômetro.

O Instrumento Virtual desenvolvido para este trabalho adquire os dados do acelerômetro e os processa de modo a fornecer, como resultado, os gráficos de deslocamento pelo tempo e o espectro de frequência do sinal. Para plotar o gráfico de deslocamento o instrumento virtual integra o sinal da aceleração, medido pelo acelerômetro. Para chegar ao espectro de frequência o instrumento virtual realiza a Transformada de Fourier do sinal do deslocamento, obtendo assim um gráfico de amplitude pela frequência.

Na figura 2 é mostrado o diagrama de blocos desenvolvido no LabView[®] e na figura 3 é possível observar o painel frontal do instrumento virtual. Nele são plotados os gráficos para análise visual do sinal, à medida que o ensaio está sendo realizado como também a média das medições já realizadas. O número de médias, a taxa de amostragem e a ordem da Transformada Rápida de Fourier (FFT) podem ser alterados diretamente no painel; esses fatores influenciam na qualidade do sinal lido e na quantidade de itens que são lidos a cada amostragem. É importante salientar que uma maior quantidade de médias, uma taxa de amostragem alta e uma FFT de ordem maior implicam em um sinal com maior qualidade, porém, requerem um trabalho computacional maior. Portanto, um comprometimento entre esses fatores deve ser considerado de forma a obter um sinal com qualidade desejável sem que o processamento seja muito lento.

Figura 2: Diagrama de blocos desenvolvido no LabView® para captação e processamento do sinal.

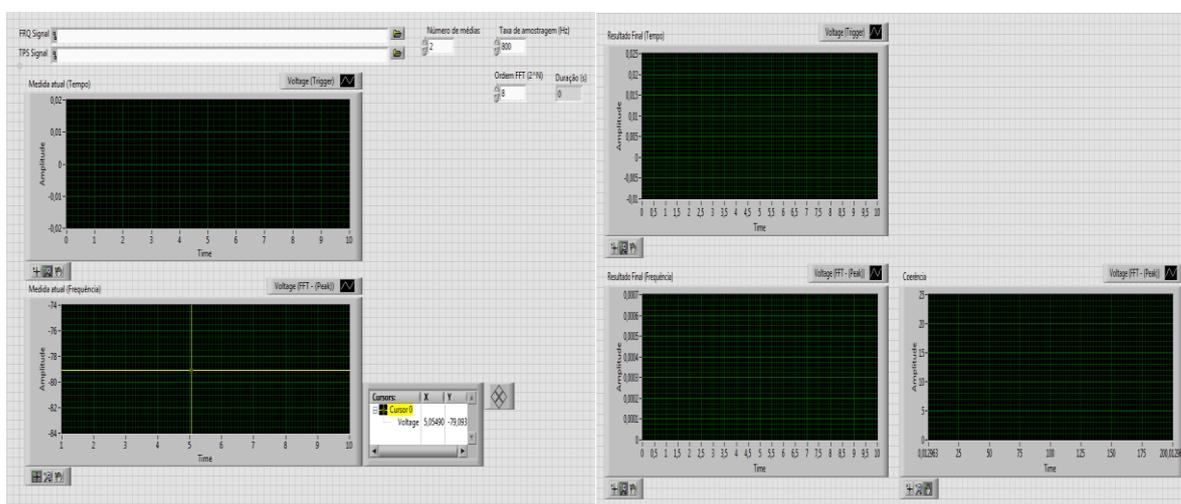
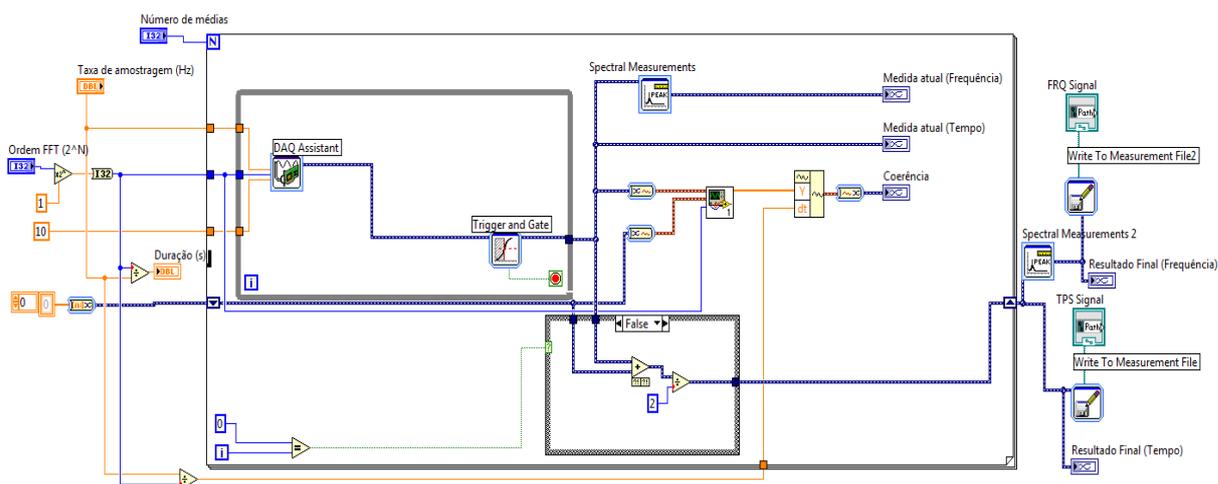


Figura 3: Painel frontal do instrumento virtual desenvolvido para o experimento.

4. MODELO MATEMÁTICO DA MONTAGEM EXPERIMENTAL

Para aplicação da metodologia de cálculo de incertezas definida pelo ISO/GUM deve-se determinar o modelo matemático que relaciona a grandeza de saída (grandeza de interesse) e as grandezas de entrada. No caso do experimento considerado é necessário relacionar a vibração transversal da viga (deslocamento e frequência) com as massas (inércias), rigidez e amortecimento da montagem experimental.

Assim o sistema esquematizado na Figura (4)(a) foi modelado, usando parâmetros concentrados, resultando em um único elemento de massa com um grau de liberdade na direção vertical, mostrado na Figura (4)(b). A origem do sistema de coordenadas é o ponto 1 da Figura (4)(a), onde está localizado o acelerômetro, de modo que as comparações entre os resultados analítico e experimental consideram o mesmo ponto de referência.

São considerados os efeitos inerciais do acelerômetro (m_a), do amortecedor (m_c), da mola (m_k), do motor (m_m) e da barra (m_b). As respectivas distâncias das massas ao eixo de rotação “O” estão ilustradas na Figura (4)(a). Além disso, tanto o comprimento da barra quanto a distância da extremidade livre ao eixo de rotação têm o mesmo valor, indicado como “L”, na figura.

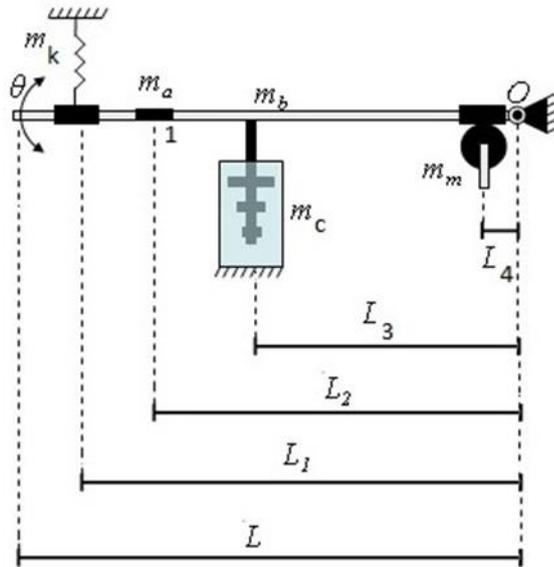
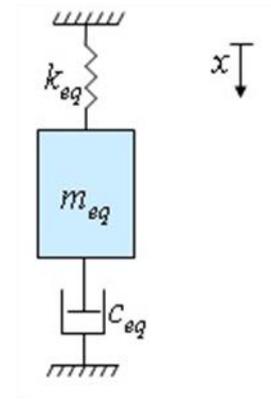


Figura 4: a) Diagrama da modelagem



b) Modelo matemático

A modelagem matemática do sistema é feita aplicando-se a segunda Lei de Newton para encontrar a equação do movimento, além das equações da energia cinética e potencial de deformação para determinar a massa e a rigidez equivalentes (Cochin & Cadwallender, 1997).

O modelo matemático serve para o cálculo da frequência natural do sistema e para a propagação da incerteza de medição. De modo a avaliar quais componentes do modelo influenciam significativamente na dinâmica do sistema foi feita uma análise de sensibilidade considerando os diferentes elementos da montagem experimental.

4.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA O SISTEMA EQUIVALENTE

A equação do movimento para um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade, como mostrado na Figura (4)(b) é dado por:

$$m_{eq}\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_{eq}x(t) = F(t) \quad (5)$$

onde " m_{eq} " e " k_{eq} " são, respectivamente, a massa e a rigidez equivalentes da montagem experimental usada. O amortecimento é indicado pela constante " c " e " $F(t)$ " representa a força

de excitação, dependente do tempo “ t ”, assim como o deslocamento “ $x(t)$ ”. No caso, considera-se o sistema em vibração livre e assim o forçamento é nulo, com $F(t)=0$.

Da solução da equação diferencial (5) definem-se a frequência natural do sistema “ ω_n ”, relacionando a massa e a rigidez, e, devido à presença de amortecimento, a frequência natural amortecida “ ω_d ” (Cochin & Cadwallender, 1997):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad \text{e} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

sendo “ ξ ” é o fator de amortecimento.

Assim o movimento de um sistema fracamente amortecido pode ser caracterizado por uma função harmônica com decaimento:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (6)$$

onde “ A ” indica a amplitude do deslocamento e “ φ ” a fase do movimento.

O valor do fator de amortecimento pode ser obtido experimentalmente considerando a diferença de amplitude “ a ” entre dois picos do gráfico de deslocamento pelo tempo. Sendo “ X_n ” a amplitude no n -ésimo pico do gráfico de deslocamentos tem-se:

$$\frac{X_1}{X_n} = \frac{Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi)}{Ae^{-\xi\omega_n \left(t + \frac{2i\pi}{\omega_d}\right)} \cos(\omega_d t + \varphi)} = e^{\xi\omega_n \left(\frac{2i\pi}{\omega_d}\right)} \quad (7)$$

Assim, define-se “ a ” como o logaritmo natural da Eq. 7:

$$a = \ln\left(\frac{X_1}{X_n}\right) = \ln\left(e^{\xi\omega_n \left(\frac{2i\pi}{\omega_d}\right)}\right) = \xi\omega_n \left(\frac{2i\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad (8)$$

Então, se $\xi \ll 1$, tem-se $\sqrt{1 - \xi^2} \approx 1$ e o valor do fator de amortecimento é :

$$\xi \approx \frac{a}{2j\pi} \quad \text{com } j = 1, 2, 3 \dots \quad (9)$$

4.2. RIGIDEZ EQUIVALENTE TOTAL

O cálculo da rigidez equivalente é feito considerando a energia potencial de deformação do sistema. Sendo a barra rígida, o único componente com energia potencial de deformação é a mola, de rigidez “ k ”, fixada a uma distância “ L_1 ” da rótula. Então, basta calcular o efeito da mola na posição de referência (onde está fixado o acelerômetro, indicado por “ L_2 ”). Assim a rigidez equivalente “ k_{eq} ” é dada por:

$$k_{eq} = k \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \quad (10)$$

4.3. MASSA EQUIVALENTE TOTAL E INFLUÊNCIA DAS MASSAS DOS COMPONENTES

A massa equivalente da montagem experimental foi calculada considerando que todos os elementos fixados à barra se movimentam em torno da rótula “0” com uma mesma velocidade angular “ $\dot{\theta}$ ”, visto que a barra é rígida. Assim, considerando todos os elementos e tomando como referência o ponto 1 da Fig. (4)(a) (localização do acelerômetro), a energia cinética do sistema equivalente “ EC_{eq} ” é dada pela soma da energia cinética de cada componente e a da própria barra (Cochim & Cadwallender, 1997):

$$EC_{eq} = \frac{1}{2} m_{eq} V_{eq}^2 = \frac{1}{2} (m_m V_m^2 + m_c V_c^2 + m_a V_a^2 + m_k V_k^2 + I_b \dot{\theta}^2) \quad (11)$$

Sendo: “ m_{eq} ” e “ V_{eq} ”, respectivamente, a massa e a velocidade equivalente;

“ m_m ” e “ V_m ”, respectivamente, a massa e a velocidade do motor elétrico;

“ m_c ” e “ V_c ”, respectivamente, a massa e a velocidade do sistema de amortecimento;

“ m_a ” e “ V_a ”, respectivamente, a massa e a velocidade do acelerômetro;

“ m_k ” e “ V_k ”, respectivamente, a massa equivalente e a velocidade da mola;

“ I_b ” o momento de inércia da barra e “ $\dot{\theta}$ ” a velocidade angular da barra.

Deve-se observar que o se se chama de velocidade na Eq. (11) (indicado por V) trata-se da velocidade tangencial do conjunto no ponto do elemento considerado.

Com a hipótese de pequenos deslocamentos pode-se considerar:

$$\dot{\theta} = \frac{V_{eq}}{L_2} = \frac{V_k}{L_1} = \frac{V_a}{L_2} = \frac{V_c}{L_3} = \frac{V_m}{L_4}$$

Sabendo-se que o momento de inércia de uma barra cilíndrica em relação ao seu centro de massa (localizado em $L/2$) corresponde a um terço do produto de sua massa pelo seu comprimento e que apenas um terço da massa real de uma mola causa efeitos inerciais no sistema (Cochim & Cadwallender, 1997) então, sendo as massas da barra “ m_b ” e da mola “ M_k ”, os valores de “ I_b ” e “ m_k ” na Equação (11) são dados por :

$$I_b = \frac{1}{3} m_b \cdot L^2 \quad e \quad m_k = \frac{1}{3} M_k$$

Assim, a massa equivalente do sistema é dada por:

$$m_{eq} = m_m \left(\frac{L_4}{L_2}\right)^2 + m_c \left(\frac{L_3}{L_2}\right)^2 + m_a + \frac{1}{3} M_k \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \frac{1}{3} m_b \left(\frac{L}{L_2}\right)^2 \quad (12)$$

Os valores das massas de cada componente, bem como dos comprimentos das distâncias correspondentes foram determinados experimentalmente e estão indicados na Tabela 2.

Tabela 2: valores das massas e distâncias usadas na equação (12).

Elemento	Massa (kg)	Distância	Comprimento (m)
Mola – M_k	0,002	L_1	0,6530
Acelerômetro – m_a	0,074	L_2	0,5070
Amortecedor – m_c	0,090	L_3	0,4870
Motor – m_m	0,564	L_4	0,1295
Barra – m_b	0,164	L	0,6640

Assim a massa equivalente total “ m_{eq} ”, incluindo todos os elementos da montagem experimental, é de 0,288 kg. Esse valor foi tomado como referência para as análises de sensibilidade seguintes.

4.3.1. Análise do efeito da massa da mola

Para se avaliar o efeito da massa da mola (M_k) sobre a massa equivalente total (m_{eq}), tomou-se como referência a frequência natural do sistema **sem considerar a massa da mola** e a calculou-se a frequência natural do sistema considerando diferentes valores para a massa da mola. Chamou-se de erro devido à massa da mola “ e_{sm} ” a diferença percentual entre a frequência natural de referência “ ω_1 ” e a frequência natural incluindo a massa da mola “ ω_2 ”:

$$e_{sm} = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}\right) \quad (13)$$

Em seguida variou-se a massa da mola até que a frequência natural do sistema sofresse uma variação de 1%, como mostrado na Figura (5).

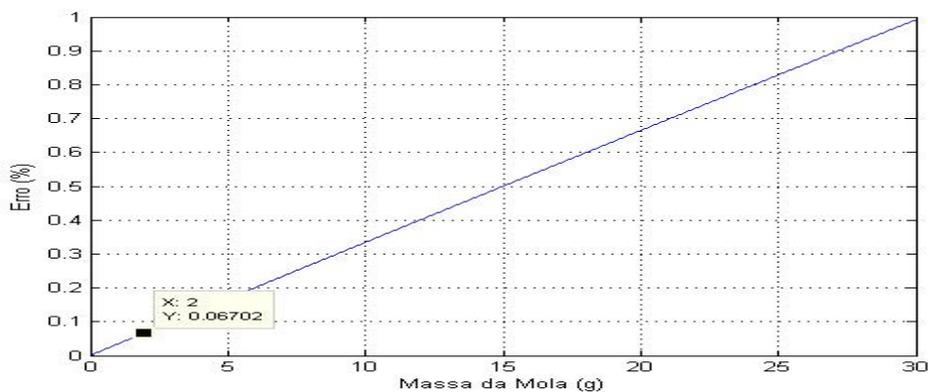


Figura 5: Influência da massa da mola na frequência natural do sistema.

Assim verifica-se que é necessária uma variação de 30 g na massa da mola para causar uma variação de 1% na frequência natural do sistema. Como a massa medida para a mola foi de apenas duas gramas, pode-se desconsiderar o seu efeito, pois se estaria cometendo um erro de apenas 0.067% na frequência natural do sistema.

4.3.2. Análise do efeito da massa do acelerômetro

É sabido que a massa do acelerômetro deve influenciar o mínimo possível na frequência natural do experimento, de modo que a medição não afete a dinâmica do sistema, sendo comum ignorá-la na modelagem da massa equivalente. Porém neste trabalho, considerando o rigor metrológico e sua aplicação no ensino de engenharia, foi feita uma análise do efeito da massa do acelerômetro e de seu suporte sobre a frequência natural do sistema. Neste caso, tomou-se como referência a frequência natural do sistema sem a massa do acelerômetro e consideraram-se diferentes valores para a massa do acelerômetro (m_a) até um valor de 100g, como mostra a Figura (6). Como no caso da mola, a Figura (6) mostra a diferença percentual entre o valor da frequência natural do sistema sem o acelerômetro e com o acelerômetro.

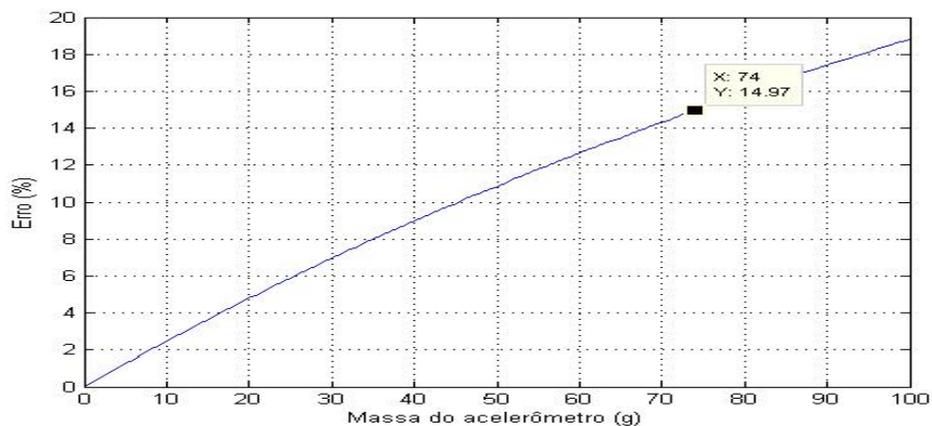


Figura 6: Influência da massa do acelerômetro na frequência natural do sistema.

Pelo gráfico, vê-se que o acelerômetro deve ter uma massa máxima próxima de 5 g para que, ao se desconsiderar sua influência, o erro não passe de 1%. No caso do experimento realizado a massa do acelerômetro (incluindo o suporte) é de 74 g e, ao ser desconsiderada, implicaria em um erro na frequência natural superior a 14%. Mostra-se, assim, a importância de se avaliar metrologicamente a influência da massa do sensor (e do sistema de fixação do mesmo) na realização de experimentos de análise modal.

4.3.3 Efeito das massas do amortecedor, da barra e do motor

Obviamente esses três elementos não devem ser ignorados por serem partes constituintes do sistema experimental e influenciarem na dinâmica do mesmo. Fazendo-se o mesmo tipo de análise dos dois casos anteriores, verificou-se que as diferenças nos valores da frequência natural são de 6,5 %, 17,64 % e 25,77 %, respectivamente para o motor, para a barra e para o amortecedor. Deve-se lembrar de que a participação de cada componente no valor da frequência natural depende não apenas de sua massa, mas também da posição relativa na montagem. Assim, mesmo tendo uma massa elevada, por estar perto da rótula o motor tem uma influência menor no valor da frequência natural que os outros componentes.

5. ANÁLISE DE INCERTEZAS

Apresenta-se nesta seção o cálculo da incerteza da frequência natural aplicando a metodologia do ISO GUM às expressões analíticas do modelo dinâmico. O objetivo é demonstrar o uso da metodologia do ISO GUM em um caso simples, com apenas um grau de liberdade, onde as equações analíticas são conhecidas e de fácil solução.

5.1 ABORDAGEM ANALÍTICA

Analiticamente, a frequência natural é obtida a partir das definições obtidas da solução da Eq. (5), item 4.1. É possível, portanto, encontrá-la a partir da massa equivalente (m_{eq}) e da rigidez equivalente do sistema (k_{eq}).

Visando calcular a incerteza padrão associada à frequência natural analítica, devem-se calcular as incertezas da massa equivalente e da rigidez equivalente do sistema e, posteriormente, propagá-las usando a Equação (3).

5.1.1 Cálculo da incerteza da massa equivalente

Visto que a massa da mola pode ser desconsiderada (seção 4.3.1), a massa equivalente do aparato experimental é dada por:

$$m_{eq} = m_m \left(\frac{L^4}{L^2}\right)^2 + m_c \left(\frac{L^3}{L^2}\right)^2 + m_a + \frac{1}{3} m_b \left(\frac{L}{L^2}\right)^2 \quad (14)$$

Para a avaliação tipo A da incerteza, usou-se a Equação (2). Levando em consideração que a incerteza analisada pela avaliação tipo B é proveniente da resolução do instrumento de medição,

considera-se, em conformidade com o ISO GUM, uma distribuição de probabilidade retangular (JCGM, 2008):

$$u(y) = \sqrt{\frac{(a_+ - a_-)^2}{12}} \quad (15)$$

Onde “ a_+ ” é o extremo máximo do intervalo de resolução e “ a_- ” o extremo mínimo.

Para encontrar o valor do grau de liberdade “ v_{eff} ” de cada grandeza de entrada, deve-se considerar que as contribuições para a incerteza padrão (u_c) são obtidas de duas formas individualizadas: avaliação tipo A da incerteza (u_{ca}) e avaliação tipo B da incerteza (u_{cb}). Portanto, o grau de liberdade total de cada grandeza de entrada pode ser obtido como:

$$\frac{u_c^4}{v_{eff}} = \frac{u_{ca}^4}{v_{eff_a}} + \frac{u_{cb}^4}{v_{eff_b}} \quad (16)$$

Os valores para o grau de liberdade da avaliação tipo A da incerteza (v_{eff_a}) e para o grau de liberdade da avaliação tipo B da incerteza (v_{eff_b}) são obtidos conforme descrito na seção 2.

Apresentam-se na Tabela 3 os valores da estimativa das grandezas, com suas respectivas avaliações tipo A e tipo B da Incerteza, bem como a incerteza padrão e o grau de liberdade.

Tabela 3: Resultados experimentais e incertezas

Grandeza de entrada	Estimativa da grandeza de entrada	Avaliação tipo A da Incerteza	Avaliação Tipo B da Incerteza	Incerteza Padrão	Grau de liberdade (V_{eff})
m_a	0,74 kg	$\pm 1.10^{-5}kg$	$\pm 6.10^{-5}kg$	$\pm 7.10^{-5}kg$	10
m_m	0,564 kg	$\pm 1.10^{-5}kg$	$\pm 6.10^{-5}kg$	$\pm 7.10^{-5}kg$	10
m_c	0,090 kg	$\pm 1.10^{-5}kg$	$\pm 6.10^{-5}kg$	$\pm 7.10^{-5}kg$	10
m_b	0,164 kg	$\pm 1.10^{-5}kg$	$\pm 6.10^{-5}kg$	$\pm 7.10^{-5}kg$	10
L_1	0,653 m	$\pm 2.10^{-4}m$	$\pm 3.10^{-4}m$	$\pm 5.10^{-4}m$	3
L_2	0,507 m	$\pm 2.10^{-4}m$	$\pm 3.10^{-4}m$	$\pm 5.10^{-4}m$	3
L_3	0,4875 m	$\pm 2.10^{-4}m$	$\pm 3.10^{-4}m$	$\pm 5.10^{-4}m$	3
L_4	0,1295 m	$\pm 2.10^{-4}m$	$\pm 3.10^{-4}m$	$\pm 5.10^{-4}m$	3
L	0,664 m	$\pm 2.10^{-4}m$	$\pm 3.10^{-4}m$	$\pm 5.10^{-4}m$	3

Com os valores da tabela 3, pode-se calcular a estimativa da massa equivalente (Eq 14) e sua incerteza combinada, usando a Eq. (3).

Considerando os graus de liberdade das grandezas de entrada (Eq 4), calculou-se a Incerteza Expandida para um intervalo de confiança de 95%.

Assim, a massa equivalente obtida foi:

$$m_{eq} = (288 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \quad (17)$$

5.1.2 Cálculo da incerteza da rigidez equivalente

Para determinação da rigidez equivalente do sistema faz-se necessária a determinação da constante “ k ” da mola usada.

A constante elástica da mola foi determinada experimentalmente, aplicando-se a Lei de Hooke, em um ensaio estático onde massas conhecidas foram penduradas à mola e o correspondente alongamento desta foi medido. As massas foram medidas em uma balança digital com resolução de uma grama (incerteza de $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ kg) e o alongamento da mola foi medido usando um graminho com nônio e incerteza de $\pm 1 \cdot 10^{-5}$ m. Assim a rigidez da mola utilizada era de 245,1333 N/m com incerteza (obtida usando o procedimento do ISO-GUM) de $\pm 1 \cdot 10^{-3}$ N/m.

Usando a Eq. (10), os valores das grandezas de entrada da Tabela 3 e aplicando a metodologia ISO GUM, obteve-se a estimativa da rigidez equivalente juntamente com a incerteza expandida para um intervalo de confiança de 95%.

Assim, a rigidez equivalente é:

$$k_{eq} = 406 \pm 2 \text{ N/m} \quad (18)$$

5.1.3 Cálculo da frequência natural do sistema e da sua incerteza

A frequência natural “ ω_n ” do sistema em Hz é definida como:

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (19)$$

A melhor estimativa para a frequência natural pode ser definida pela substituição dos melhores valores da massa equivalente e da rigidez equivalente na Eq. (19). Portanto a melhor estimativa é 5,9808 Hz.

Desde que as grandezas de entrada não são relacionadas entre si, calcula-se a incerteza padrão da frequência natural fazendo-se o desenvolvimento de Taylor da Eq. (19), considerando “ w_n ” a grandeza de saída “ y ” (mensurando) e sendo “ k_{eq} ” e “ m_{eq} ” as grandezas de entrada “ x_i ”. Para tanto se faz necessário a determinação das primeiras derivadas parciais da frequência natural com relação à massa e a rigidez equivalente:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial k_{eq}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{k_{eq} m_{eq}}} \quad e \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial m_{eq}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2m_{eq}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

Assim aplicando-se a Eq. (3), tem-se:

$$u(\omega_n) = \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_{eq}} \right)^2 \cdot (u(k_{eq}))^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial m_{eq}} \right)^2 \cdot (u(m_{eq}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$u(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{k_{eq}m_{eq}}} \right)^2 \cdot (u(k_{eq}))^2 - \left(\frac{1}{2m_{eq}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \right)^2 \cdot (u(m_{eq}))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Substituindo-se na Eq. (21) os valores determinados nos itens 5.1.1 e 5.1.2, chega-se a **incerteza combinada** da frequência natural:

$$u(\omega_n) = 0,031 \text{ Hz}$$

O grau de liberdade efetivo da frequência natural analítica “ w_n ”, calculado aplicando-se a Eq. (4), resulta em 1, de modo que, consultando a tabela t-Student, se determina que o fator de abrangência deve ser igual a 13,97. Portanto a **incerteza expandida** da frequência natural analítica será 0,433 Hz.

Desta maneira, o valor da frequência natural “ w_n ” deve ser expresso, segundo o ISO-GUM, como:

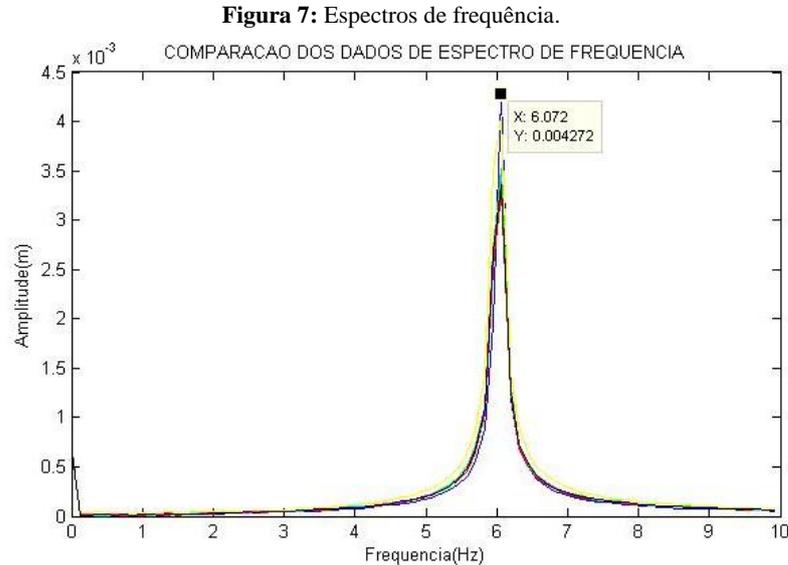
$$w_n = 5,98 \pm 0,43 \text{ Hz}$$

5.2 Abordagem experimental

A frequência natural determinada na seção anterior, usando a abordagem analítica, não leva em conta o amortecimento existente no sistema. Para fins de validação de modelos é preciso realizar ensaios experimentais onde o amortecimento não deve ser desprezado. Considerando a dificuldade de uma correta modelagem do amortecimento usando a abordagem analítica, o mesmo deve ser determinado experimentalmente. Assim nesta seção apresenta-se a metodologia experimental usada para a determinação da frequência natural amortecida e do amortecimento da montagem experimental usada, bem como das incertezas associadas.

5.2.1 Cálculo frequência natural amortecida e sua incerteza associada

A frequência natural amortecida experimental (ω_d) foi obtida através da análise do espectro de frequência da vibração medida. A Figura (7) mostra os espectros de sete ensaios realizados plotados em um mesmo gráfico, onde o pico corresponde à frequência natural amortecida, cujo valor encontrado em todos os sete ensaios foi de 6,0717 Hz.



Para se determinar a incerteza padrão da frequência natural amortecida deve-se levar em conta as incertezas de medição do acelerômetro, da placa de aquisição e do instrumento virtual usado. As medições feitas consistiram em sinais no tempo que posteriormente foram transformados para o domínio da frequência. Esses sinais no domínio da frequência permitem identificar a frequência natural amortecida a partir do pico de amplitude do espectro. Considerando a configuração da placa e do instrumento virtual o espectro de frequência foi obtido com uma resolução em frequência de 0,125 Hz.

Portanto a avaliação tipo B da incerteza da frequência natural amortecida, usando a eq. (15) leva ao valor de $\pm 0,072$ Hz. Assim a estimativa da frequência natural amortecida para um intervalo de confiança de 95%, usando o ISO-GUM, é:

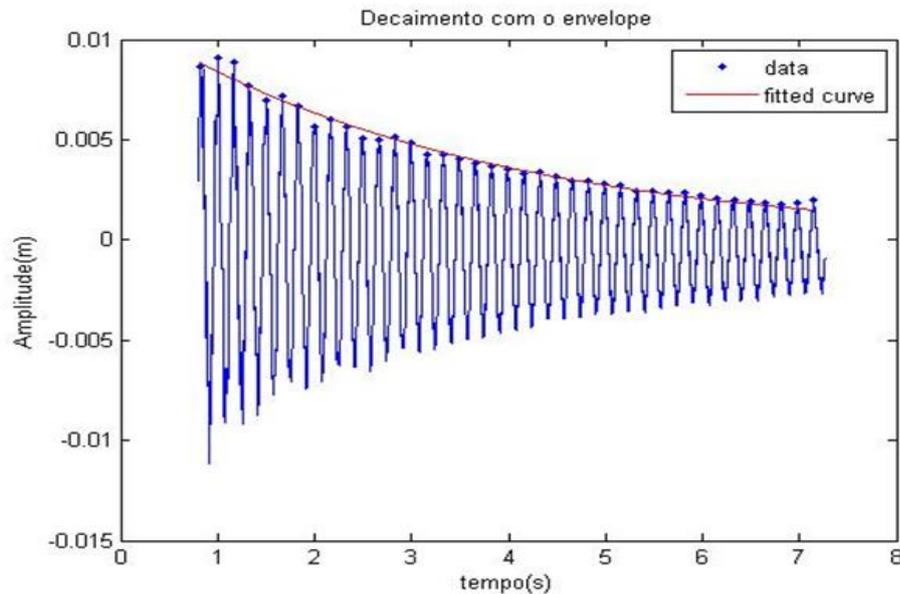
$$\omega_d = 6,02 \pm 0,07 \text{ Hz}$$

5.2.2 Fator de amortecimento e frequência natural

Para determinar o fator de amortecimento do sistema foi aplicado o método de meia-amplitude que determina o decaimento logarítmico dos sinais de deslocamentos medidos nos ensaios. Para tanto foi desenvolvida uma rotina em Matlab[®] que usando os dados obtidos pelo instrumento virtual plota os gráficos de deslocamento e ajusta uma curva exponencial envelopando o sinal medido, como mostrado na Figura (8). A curva envelope é aproximada por uma função exponencial “ $\hat{x}(t)$ ” representando a variação do deslocamento no tempo (t), obtida experimentalmente:

Figura 8: Envelope do decaimento do deslocamento medido.

$$\hat{x}(t) = X \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \quad (22)$$



Assim foi possível determinar o produto “ $\xi \omega_n$ ” e, utilizando a relação entre a frequência natural amortecida, a frequência natural e o fator de amortecimento, montar um sistema de equações para extrair o valor do fator de amortecimento e da frequência natural do sistema:

$$\hat{x}(t) = X \cdot e^{-\xi \omega_n t} \quad \rightarrow \quad \hat{x}(t) = 0,0121 \cdot e^{-0,2946t} \quad \rightarrow \quad \xi \cdot \omega_n = 0,2946$$

$$\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \rightarrow \quad 6,017 = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Resolvendo o sistema obteve-se os valores de $\xi = 0,04846$ e $\omega_n = 6,07884$ Hz.

Para determinação da incerteza associada ao valor da frequência natural é necessário considerar os vários ensaios realizados e aplicar a metodologia do ISO-GUM, o que se faz a seguir.

Analisando os vários sinais de deslocamento obtidos com o instrumento virtual no Matlab[®], foi possível obter as melhores estimativas em cada ensaio para o valor de $\zeta\omega_n$. Os sinais medidos estão mostrados na figura 9 e as melhores estimativas na Tabela 4.

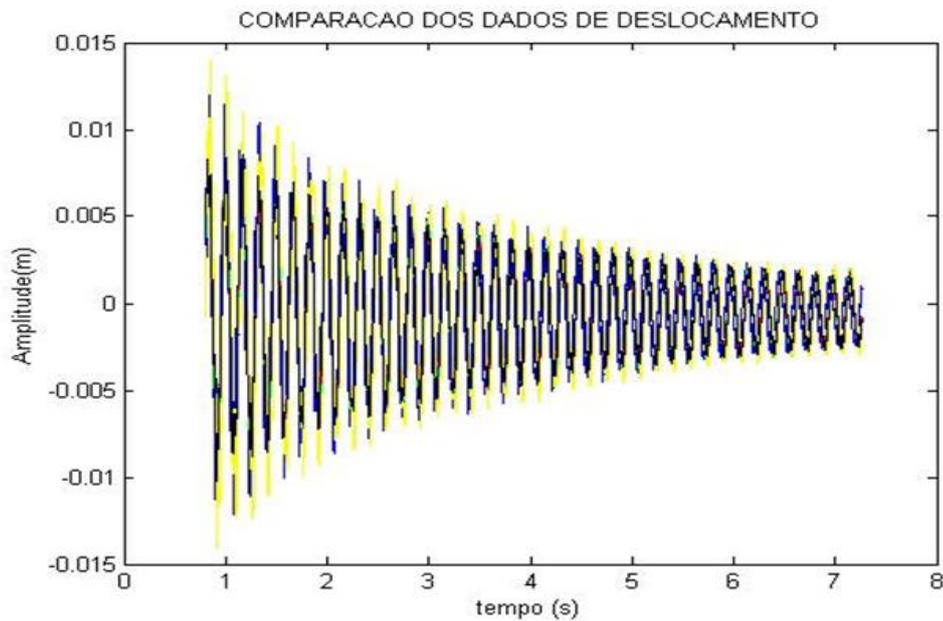


Figura 9: Respostas no tempo.

Tabela 4: Melhores estimativas do ensaio para o valor de $\zeta\omega_n$.

Ensaio	Melhor estimativa de $\zeta\omega_n$ [Hz]
1	0.3167
2	0.2813
3	0.2837
4	0.2717
5	0.2972
6	0.3314
7	0.2800

Para se determinar a melhor estimativa de “ $\zeta\omega_n$ ” calculou-se a média aritmética das melhores estimativas dos ensaios e, fazendo-se a avaliação tipo A da incerteza padrão, chega-se ao resultado:

$$\zeta\omega_n = 0,29 \pm 0,02 \text{ Hz}$$

Assim a expressão, segundo o ISO-GUM, da frequência natural do sistema, obtida experimentalmente (ω_{ne}), é:

$$\omega_{ne} = 6,0 \pm 1,1 \text{ Hz}$$

Devido às incertezas de medição experimentais serem maiores que as consideradas no cálculo analítico, a incerteza da frequência natural experimental é maior que a incerteza da frequência natural analítica. Contudo os valores encontrados para as frequências naturais são bem próximos e contidos nos intervalos de incerteza que se sobrepõem.

6. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

De modo a subsidiar práticas de validação de modelos usando métodos metrologicamente confiáveis, aplicou-se a metodologia de cálculo de incertezas definida pelo ISO-GUM no estudo da vibração transversal de uma viga, rotulada em uma extremidade e sustentada por uma mola na outra, modelada, por parâmetros concentrados, como tendo apenas um grau de liberdade.

Foi desenvolvido inicialmente um modelo matemático representativo da dinâmica da montagem experimental, incluindo todos os componentes estruturais presentes na bancada usada nas aulas práticas de vibrações. Para refinar esse modelo calculou-se a influência de cada componente na dinâmica de todo o conjunto, levando-se em conta as incertezas de medição. Dessa análise verificou-se que a massa da mola usada pode ser desprezada enquanto que as massas do acelerômetro e de seu suporte devem ser consideradas. No caso estudado, a não consideração da massa do acelerômetro e seu suporte no modelo dinâmico levam a erros na frequência natural do sistema em torno de 14 % e, portanto, muito superiores às incertezas de medição.

Considerando que a solução do modelo matemático, representativo do experimento realizado, faz uso de valores obtidos experimentalmente, incluiu-se as incertezas desses valores na expressão da frequência natural do sistema, definindo também um intervalo de confiança para esse resultado. Assim, mostrou-se no trabalho que a aplicação da metodologia do ISO-GUM permite definir a incerteza expandida para a solução da equação do modelo matemático, elevando a confiança da significância desta, sem aumentar o trabalho de cálculo nem prejudicar o foco do estudo.

De modo a validar o modelo matemático usado, foram realizados ensaios para determinação experimental da frequência natural do sistema. Nesse caso também foi utilizada a metodologia do ISO-GUM e verificou-se que o resultado experimental, considerando um intervalo de confiança de 95%, engloba o resultado analítico, indicando a validade do modelo matemático

de apenas um grau de liberdade para representar a dinâmica da estrutura estudada. A maior incerteza do resultado experimental se deve à metodologia usada para identificação da frequência natural experimental. Configurando-se o instrumento virtual para uma taxa de amostragem mais alta (menor resolução) poder-se-ia diminuir a incerteza de medição.

Apesar da simplicidade do sistema e do modelo matemático correspondente, pôde-se verificar que a validação deste, seguindo boas práticas experimentais, se constitui em um significativo exemplo para o ensino das metodologias e técnicas envolvidas, servindo para ilustrar os métodos de quantificação de incertezas, tão relevantes nos processos de validação de modelos computacionais usados em simulações.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. (2005). *ABNT NBR ISO/IEC 17025: Requisitos Gerais para a Competência de Laboratórios de Ensaio e Calibração*. Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT, 2005;
- Aguiar, J.G.; Diniz, A.C.G.C. e Vianna, J.N.S. (2003). Sistema da Qualidade em Laboratórios de Pesquisa Universitários. In: METROLOGIA-2003, 2003, Recife-PE. *Anais do III Congresso Brasileiro de Metrologia*, 2003. p. 1-8;
- ASME. (2006). *Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics - PTC 60/V&V 10*, The American Society of Mechanical Engineers, 2006
- Cochin, I. e Cadwallender, W. *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 3rd ed., 1997
- Coleman, H.W. e Steele, W.G. (2009), *Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2009;
- DerKiureghian, A. e Ke, J.-B. (1988). The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2), pp. 83-91, 1988;
- Diniz, A.C.G.C. (2009). Qualidade nos Laboratórios Universitários, presente e futuro. *Banas Qualidade*, São Paulo - SP, v. 208, p. 84 - 85, 01 set. 2009;
- Diniz, A.C.G.C., Thouverez, F., Jézéquel, L. (2011). Application of a Stochastic Component Mode Synthesis Method. *Proceeding of the 18th International Congress on Sound & Vibration – ICSV18*, Rio de Janeiro, 2011;
- Eidukeviciute, M. e Volkovas, V. (2007). Measurement uncertainty in vibromonitoring systems and diagnostics reliability evaluation. *Journal of Sound and Vibration* 308(3):625-631, November 2007.
- Felippes, B. A. de ; Diniz, A.C.G.C. (2007). Quality System in University Laboratories: ISO 17025 Improving Education and Research Activities. In: *Anais do V Congresso Latino Americano de Metrologia*. Curitiba (PR): Rede Paranaense de Metrologia e Ensaios, 2007;
- Granhen, E.R.; da Silva, C.R.S.; de Azevedo, T.P.S.; Silva, I.S.S. (2007). Uncertainty Calculation Procedures in Vibration Measurement in Rotating Machines of Electric Energy

- Generation. In *Proceedings of 19th International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2007*, Brasilia, DF;
- JCGM. (2008). *Guide to the expression of uncertainty in Measurement – JCGM 100:2008*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008;
- Laborde, S., Calvi, A (2012). Spacecraft base-sine vibration test data uncertainties investigation based on stochastic scatter approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 32, July 2012, pp. 69-78.
- Laizans, K. (2014). A method for characterization of vibration testing setups, Master's Thesis, Univeristy of Tartu, Faculty of Science and Technology, Tartu, Estonia;
- Lardeur P., Scigliano R., Scionti M. (2013). Verification and validation for the vibration study of automotive structures modelled by finite elements. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, Vol. 48(1), p. 59-72;
- Oberkampf, W. L. & Roy, C.J. (2010), *Verification and Validation in Scientific Computing*, Cambridge University Press; 1st edition, 2010;
- Oliveira Neto, J.P. de e Andrade, R. M. de C. (2006). *Bancada Experimental de Vibrações para Aulas Práticas*. Projeto de Graduação, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília;
- Ritto, T.G., Sampaio, R., Cataldo, E. (2008). Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 30 (4), pp. 295-303;
- Sampaio R. e Cataldo E. (2010). Comparing Two Strategies to Model Uncertainties in Structural Dynamics. *Shock and Vibration* 17 (2), pp. 171-186, 2010;
- Silva Jr., C.R.A. e Beck, A.T. (2011) . Chaos Galerkin solution of stochastic Timoshenko bending problems. *Computers & Structures*, v. 89, p. 599-611, 2011.
- Vanmarcke, E.H. e Grigoriu, M. (1983). Stochastic finite elements analysis of simple beams, *Journal of Engineering Mechanics – ASCE*, 190(5):1203-1214, October 1983.