

Article

Simulação de um modelo bidimensional transiente aplicado à dispersão de poluentes em um corpo hídrico

Machado, B.R.¹, Buske, D.², Melo, T.², Weymar, G.J. and Klein, R.^{2,*}

¹ Universidade Federal de Pelotas- UFPel 1; be_rmachado@hotmail.com

² Universidade Federal de Pelotas- UFPel 2; danielabuske@gmail.com

* Correspondence: be_rmachado@hotmail.com;

Received: 14/12/2018; Accepted: 05/01/2019 date; Published: 15/01/2019

Abstract: O crescimento populacional aliado ao desenvolvimento industrial proporcionou um aumento nos eventos de poluição hídrica. Sabe-se que os corpos hídricos, além de promoverem a sustentação da vida humana e dos ecossistemas, também são os principais receptores dos resíduos gerados pelas atividades antrópicas e que muitas vezes estes resíduos não recebem o tratamento adequado antes do lançamento no ambiente. Tendo em vista, a proteção da saúde humana e a manutenção da qualidade hídrica, faz-se necessário entender os processos que ocorrem no corpo receptor após o lançamento de um poluente. Os processos que governam a dispersão de poluentes são numerosos e complexos, de forma que não é possível descrevê-los sem a utilização de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos constituem um instrumento de gestão ambiental indispensável para garantir a segurança das pessoas e do ambiente. Desta forma, no presente estudo é considerado um modelo matemático de dispersão de poluentes no plano bidimensional (longitudinal e vertical) em regime transiente, para investigar o fenômeno de dispersão de poluente em um corpo hídrico, tendo como objetivos principais apresentar uma abordagem de solução analítica e comparar o modelo com dados experimentais obtidos da literatura. A solução analítica proposta utiliza o método de separação de variáveis com uma transformação de similaridade. Para investigar o modelo proposto, são apresentados gráficos do comportamento da concentração em função da distância e do tempo, mostrando o seu comportamento na forma espacial e temporal. Os resultados demonstram que o modelo consegue representar o fenômeno adequadamente.

Palavras-chave: Solução analítica; Separação de variáveis; Transformação de similaridade; Dispersão de poluentes; Corpo hídrico.

Simulation of a two-dimensional transient model applied on pollutants dispersion in waters bodies

Abstract: The population growth associated with industrial development provides an increased on the rate of critical pollution events. It is clear that water bodies in addition to sustain the human life and ecosystems are also the principal receptors of liquids wastes from human activities and many times theses wastes don't receive an adequate treatment before disposal. Bearing in mind, the protection of human health and maintenance of water quality is necessary the knowledge of these process that occur on the water body before a pollutant disposal. These process involved on pollutants dispersion are numerous and complex otherwise is impossible describe then without employ a mathematical model. Mathematical models are an instrument of environmental management essential to ensure that the human and environmental security. In this paper is considerate a two-dimensional (longitudinal and vertical) transient model of pollutant dispersion to investigate the phenomenon of pollutant dispersion in a water body, these work aim's to present an approach of analytical solution and compare the model with experimental data from literature. The analytical solution is solved using separation of variables helped with a similarity transformation. An for investigate the model proposed are presented charts of concentration behavior versus a function of time and distance, showing these behavior spatially and temporally, the results show the model are able to represent the phenomenon.

Keywords: Analytical solution; Separation of variables; Similarity transformation; Pollutants dispersion; Water body.

1. Introdução

A utilização crescente dos recursos hídricos pode gerar uma série de impactos negativos capazes de comprometer o equilíbrio ambiental e gerar conflitos. O aumento na demanda pela água tem como consequência direta a ampliação das descargas de recursos hídricos contaminados (Tucci, 2008), sabe-se que o tratamento dos efluentes gerados pelas atividades humanas ainda não é satisfatório (Cunha & do Carmo Calijuri, 2013).

A poluição é uma alteração indesejável das características físico-químicas e biológicas de um sistema que cause ou possa causar prejuízo à saúde, sobrevivência ou atividades dos seres humanos e outras espécies ou deteriorar materiais (Braga et al., 2005). Dentre as principais fontes de poluição das águas estão a falta de saneamento básico, o lançamento de efluentes industriais tratados indevidamente, projetos de irrigação e a exploração dos recursos hídricos para fins energéticos (de Barros, 2004).

Para antever e evitar a ocorrência dos eventos de poluição torna-se necessário entender a dinâmica das substâncias no ambiente natural. Os processos que governam o transporte e a difusão de poluentes são numerosos e de uma complexidade tal que não é possível descrevê-los sem a utilização de modelos matemáticos, que resultam, então, em um instrumento técnico indispensável para a gestão ambiental e segurança das pessoas (Ramos et al., 2015). Além de representarem adequadamente o fenômeno da dispersão de poluentes, quando comparados às pesquisas experimentais se mostram mais eficientes por serem econômicos e não apresentarem problemas operacionais (Oliveira, 2015).

Será apresentado neste trabalho um modelo matemático bidimensional no plano longitudinal e vertical, para sua resolução utilizam-se o método de separação de variáveis (Özsisik, 1993) e a técnica de transformação de similaridade (Hansen, 1964). O objetivo principal é apresentar uma solução que expresse a concentração de um determinado poluente em um corpo hídrico para investigar um estudo de caso.

2. Modelagem

O problema abordado neste trabalho é investigar a dispersão de poluentes em corpos hídricos através da modelagem matemática, para isso utiliza-se a equação bidimensional em regime transiente descrita como:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \quad (1)$$

onde \bar{c} é a concentração média do poluente (g.m^{-2}), \bar{u} representa a velocidade média do escoamento (m.s^{-1}) na direção longitudinal e ε_z representa o coeficiente de difusão turbulenta ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) na direção z . Na área de engenharia ambiental os modelos bidimensionais são utilizados com muita frequência, por este motivo o presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo bidimensional no plano longitudinal vertical. Esses modelos são normalmente usados para rios estreitos e profundos em que a difusão turbulenta lateral é muito menor que a vertical.

Para obter a Eq.(1) são consideradas as seguintes hipóteses fundamentais de Barros (2004):

- O fluxo de massa na direção vertical é muito maior que na direção transversal, ou seja: $\varepsilon_z \frac{d\bar{c}}{dz} \gg \varepsilon_y \frac{d\bar{c}}{dy}$;
- A superfície e o leito do rio não são dispersivos, ou seja, não há migração do poluente através destes contornos;
- O efeito difusivo na direção longitudinal é desprezível quando comparado com o termo advectivo;
- O lançamento do poluente é contínuo; a área transversal do rio varia gradualmente com a direção longitudinal e a variação de sua altura é desprezível;
- As substâncias poluidoras são dissolvidas e têm a mesma densidade do fluido receptor
- A velocidade de descarga do poluente é considerada desprezível em relação à velocidade longitudinal do rio.

A Eq.(1) está sujeita às seguintes condições de contorno de fluxo nulo, ou seja:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h \quad (2)$$

a condição de fonte é representada por uma fonte pontual:

$$\bar{u}\bar{c}(0, z, t) = Q\delta(z - z_s) \quad \text{em } x = 0 \quad (3)$$

e para condição inicial:

$$\bar{c} = 0 \text{ em } t = 0 \tag{4}$$

sendo h a profundidade do rio (m), δ corresponde a função delta de Dirac, Z_s é a posição da fonte poluidora (m) na direção z e Q a intensidade da fonte ($g \cdot s^{-1}$).

2.1 Solução analítica

Neste trabalho, para os parâmetros turbulentos, a solução proposta segue a ideia adotada nos trabalhos (Moreira et al., 2006), (Degrazia, Moreira, Vilhena, & Moura, 2001) e (Gonçalves, Buske, Quadros, & Weymar, 2018). A abordagem utiliza o método de separação de variáveis com uma transformação de similaridade para obter a solução analítica. Assim, para solucionar a Eq.(1) separam-se as variáveis da seguinte forma: $\bar{c}(x, z, t) = f_1(x)f_2(z, t)$, que substituindo na Eq.(1) resulta no seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\bar{u} \frac{df_1(x)}{dx} = \lambda f_1(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_2(z, t)}{\partial t} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 f_2(z, t)}{\partial z^2} - \lambda f_2(z, t) \tag{6}$$

onde λ representa a constante de separação das variáveis.

Para obter a solução da equação diferencial (6) aplica-se uma substituição de variável: $f_2(z, t) = \bar{f}_2(z, t)e^{-\lambda t}$, que resulta na seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{f}_2(z, t)}{\partial t} = \varepsilon_z \frac{\partial^2 \bar{f}_2(z, t)}{\partial z^2} \tag{7}$$

Na sequência, considera-se a seguinte transformação de similaridade (Hansen, 1964), na Eq.(7):

$$\bar{f}_2(z, t) = \frac{m}{A_t \sqrt{\varepsilon_z t}} g_2 \left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z t}} \right)$$

onde m é a massa do poluente injetado no corpo hídrico e A_t é a área da seção transversal. Substitui-se a Eq.(8) na Eq.(7) e aplica-se uma troca de variável de similaridade:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{z}{\sqrt{\varepsilon_z t}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z t}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{-\rho}{2t} \end{aligned}$$

obtendo a seguinte EDO:

$$\frac{d^2 g_2}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \left(g_2 + \rho \frac{d g_2}{d\rho} \right) = 0 \tag{9}$$

Observe que os dois termos dentro dos parênteses da Eq.(9) representam a derivada do produto das funções ρ e g_2 , assim pode-se reescrever a Eq. (9) como:

$$\frac{d^2 g_2}{d\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} (\rho g_2) = 0 \tag{10}$$

e utiliza-se a mesma ideia para reescrever os dois termos da Eq.(10) como derivada do produto, da seguinte forma:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{dg_2}{d\rho} + \frac{1}{2} \rho g_2 \right) = 0 \tag{11}$$

A Eq.(11) é facilmente resolvida por redução de ordem. Portanto, a solução para $\bar{f}_2(z, t)$ está bem determinada, como segue:

$$\bar{f}_2(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon_z t}} e^{-\left(\frac{z^2}{4\varepsilon_z t}\right)} \tag{12}$$

Portanto, tem-se para $f_2(z, t)$ a seguinte função:

$$f_2(z, t) = \bar{f}_2(z, t)e^{-\lambda t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon_z t}} e^{-\left(\frac{z^2}{4\varepsilon_z t}\right)} e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Para a segunda equação diferencial:

$$\bar{u} \frac{df_1(x)}{dx} = \lambda f_1(x), \tag{14}$$

a solução é obtida por fator integrante (Özisik, 1993), a expressão encontrada é:

$$f_1(x) = e^{\frac{\lambda}{\bar{u}}x} \tag{15}$$

Desta forma, a concentração final é: $\bar{c}(x, z, t) = f_1(x)f_2(z, t) = e^{\frac{\lambda}{\bar{u}}x} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon_z t}} e^{-\left(\frac{z^2}{4\varepsilon_z t}\right)} e^{-\lambda t}$ a constante λ é determinada aplicando-se a condição de fonte, o que leva a seguinte expressão:

$$\lambda = \left(-\frac{Q}{\bar{u}t} \right) \ln \left(\frac{2}{\text{Erf} \left(\frac{h}{2\sqrt{\varepsilon_z t}} \right)} \right) \tag{16}$$

assim, a concentração $\bar{c}(x, z, t)$ está bem determinada.

3. Experimento e Parametrizações

Para uma utilização correta dos modelos de transporte e difusão em corpos hídricos, necessita-se de um estudo sobre suas capacidades de representarem corretamente situações reais. Se possível, recomenda-se verificar a confiabilidade do modelo utilizado com os dados e as parametrizações do problema analisado (Tirabassi, 2005).

3.1 Dados experimentais

Nokes, McNulty, and Wood (1984) simularam a dispersão de uma solução contendo NaCl em um canal de 15m de comprimento, 0,15m de profundidade e 0,56m de largura. Os parâmetros hidráulicos do experimento são apresentados na tabela a seguir:

Tabela 1: Parâmetros Hidráulicos do Experimento

d (m)	h (m)	l (m)	\bar{u} (m.s ⁻¹)	u^* (m.s ⁻¹)	k	Z_s
15	0,15	0,56	0,55	0,055	0,35	0,75

sendo \bar{u} a velocidade média, k a constante de Von Kármán, u^* a velocidade de atrito e Z_s a posição adimensional da fonte poluidora.

3.2 Parametrizações

Para o modelo proposto, a escolha de uma parametrização da turbulência representa uma decisão fundamental para a modelagem de dispersão de poluentes. Fisicamente, uma parametrização da turbulência é uma aproximação da natureza, no sentido que os modelos matemáticos recebem uma relação aproximada que substitui um termo

desconhecido. Assim, apresentam-se as parametrizações escolhidas para o perfil de velocidade e para o coeficiente de difusão turbulenta.

O perfil de velocidade turbulenta utilizado segue aproximadamente o perfil da lei logarítmica dado por (Fischer, List, Koh, Imberger, & Brooks, 1979):

$$U(Z) = 1 + \frac{u^*}{\bar{u}k} [1 + \ln(Z)] \quad (17)$$

Sendo que

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (18)$$

sendo u^* é a velocidade de atrito (m.s⁻¹); \bar{u} é a velocidade média do escoamento (m.s⁻¹); k é a constante de Von Kármán, τ_0 é a tensão de cisalhamento no fundo do rio (Kg.m⁻².s⁻¹) e ρ é a densidade do fluido (Kg.m⁻³).

O coeficiente de difusão vertical, já adimensionalizado, utilizado na simulação das duas abordagens pode ser derivado a partir do perfil de velocidade, dado por (Fischer et al., 1979):

$$\varepsilon_z(Z) = \frac{u^*}{\bar{u}k} Z(1 - Z) \quad (19)$$

onde u^* é a velocidade de atrito (m.s⁻¹); \bar{u} é a velocidade média do escoamento (m.s⁻¹); k é a constante de Von Kármán.

A Fig.(1) apresentam os comportamentos dos perfis de velocidade de escoamento e do coeficiente de difusão turbulenta:

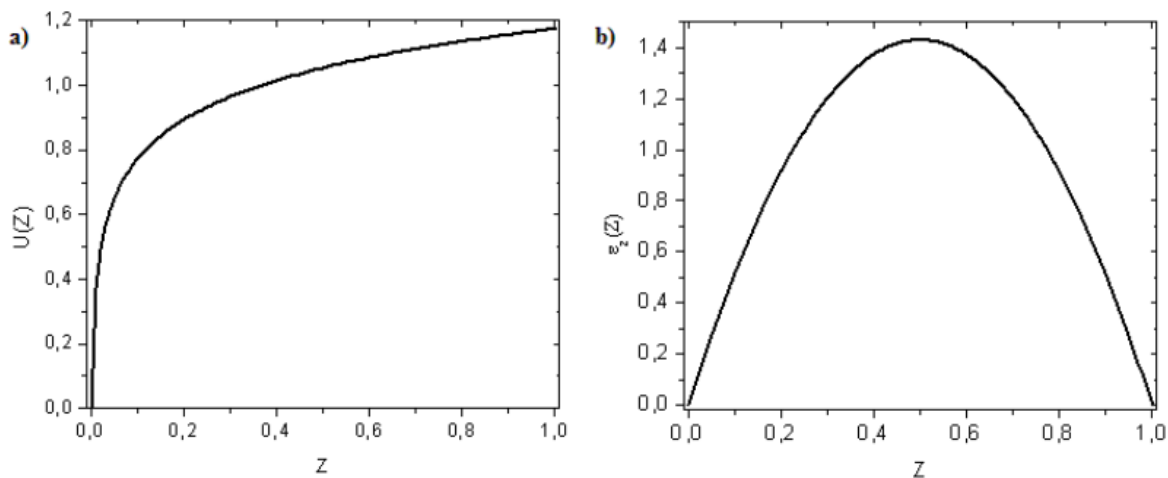


Figura 1. Perfis a) velocidade turbulenta b) difusividade vertical turbulenta como funções da profundidade

3.3 Aplicação do modelo

A Fig.(2) mostra o resultado analítico obtido, através da abordagem utilizada, confrontados com o experimental.

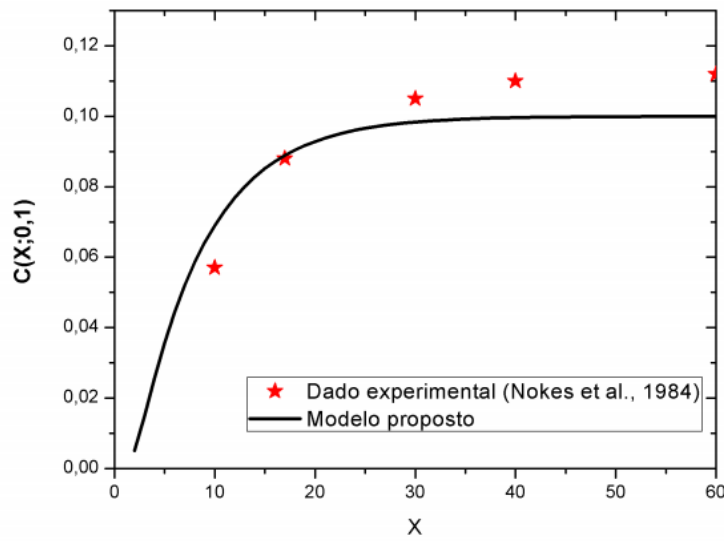


Figura 2: Comparação dos resultados obtidos pelo modelo proposto com os dados experimentais

Analisando a Fig. (2) percebe-se uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo modelo proposto e os dados experimentais, ainda que a abordagem proposta considere as parametrizações da turbulência constantes.

Na Tab.2 apresentam-se os índices estatísticos (Hanna, 1989) do modelo proposto com os experimentais, a fim de avaliar melhor o seu desempenho. Os índices estatísticos utilizados são:

- Erro quadrático médio normalizado: $NMSE = \frac{(C_o - C_p)^2}{C_o C_p}$;
- Coeficiente de correlação: $COR = \frac{(C_o - \bar{C}_o)(C_o - \bar{C}_p)}{\sigma_o \sigma_p}$;
- Fração de inclinação: $FB = \frac{\bar{C}_o - \bar{C}_p}{0,5(\bar{C}_o + \bar{C}_p)}$;
- Desvio fracional padrão: $FS = \frac{\sigma_o - \sigma_p}{0,5(\sigma_o + \sigma_p)}$.

Sendo C é a concentração de poluentes adimensional, σ é o desvio padrão e os índices o e p indicam as quantidades observadas e previstas, respectivamente.

Tabela 2. Avaliação estatística do modelo bidimensional utilizando o experimento descrito na metodologia

Modelo proposto	
NMSE	0,01
COR	0,79
FB	0,03
FS	0,53

Observando os dados obtidos a partir do modelo, nota-se que os índices NMSE e FB apresentam valores bem próximos de zero, um COR próximo de 0,8 e o FS próximo de 0,5 indicando bons resultados, pois os valores de NMSE, FB e COR estão próximos dos valores ideais. Com isso, pode-se afirmar que o modelo simula satisfatoriamente as concentrações observadas no experimento.

No estudo da dispersão de poluentes, localizar o cenário crítico de poluição, ou seja, o local onde ocorre a concentração máxima da substância poluidora, é um dos objetivos da pesquisa. Logo, buscando identificar o local de ocorrência do cenário crítico, apresentam-se na Fig.(3) os gráficos da concentração em função da distância X considerando diferentes alturas de fonte ($Z_s = 0, 2, 5, 75$ e $Z_s = 1, 0$), na profundidade $Z=0,1$.

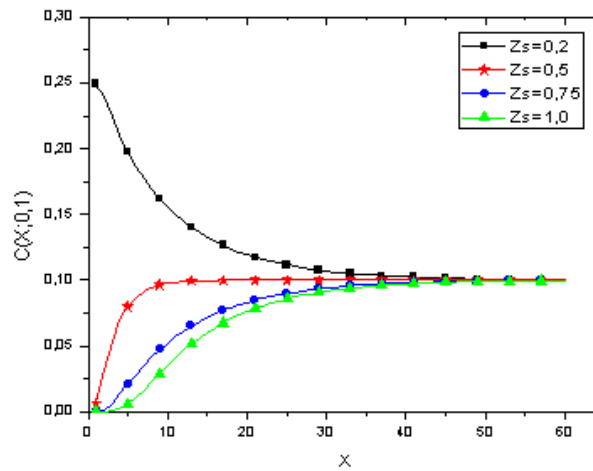


Figura 3. Gráfico da concentração de poluentes C em função da distância X para quatro posições de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) e profundidade $Z = 0,1$.

Na profundidade $Z = 0,1$, percebe-se que as concentrações são maiores quando a fonte poluidora está localizada na altura $Z_s = 0,2$, este fato ocorre, pois as concentrações estão sendo medidas próximas da fonte de poluição. Para as demais alturas de fonte ($Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$ e $Z_s = 1,0$), a concentração é máxima para distâncias mais afastadas da fonte. Observa-se também que para distâncias maiores que $X = 50$ as concentrações não apresentam variações de valores, mostrando que o poluente já está dissolvido no meio.

A Fig.(4) mostra os gráficos da concentração em função da distância X considerando diferentes alturas de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) e profundidade $Z = 0,5$.

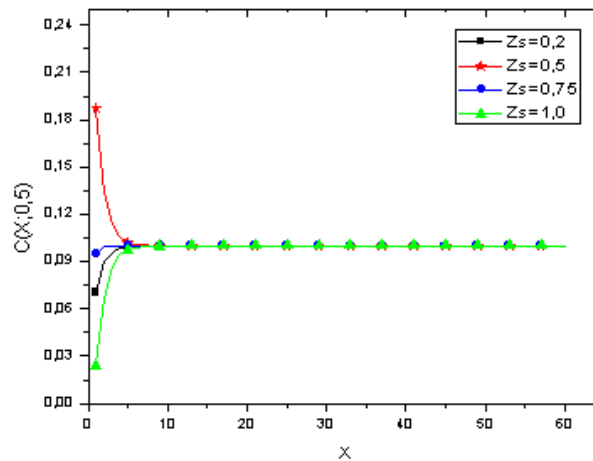


Figura 4. Gráfico da concentração de poluentes C em função da distância X para quatro posições de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) e profundidade $Z = 0,5$.

Para $Z = 0,5$, nota-se que as concentrações são mais acentuadas quando a fonte está na altura $Z_s = 0,5$, ou seja, para distâncias próximas do ponto inicial de lançamento do poluente. Percebe-se também que para as demais alturas de fonte as concentrações são máximas para distâncias próximas da fonte. Constata-se, através da Fig.(4), que a homogeneização do poluente com o meio ocorre para distâncias mais próximas da fonte poluidora, a partir de $X = 10$.

Na Fig.(5), tem-se os gráficos da concentração em função da distância X considerando diferentes alturas de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) e profundidade $Z = 0,9$.

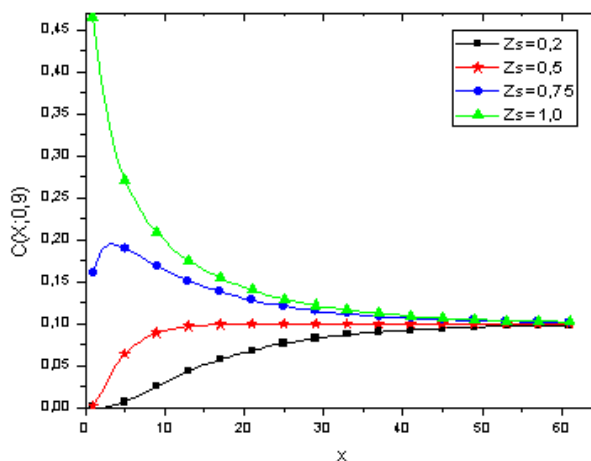


Figura 5. Gráfico da concentração de poluentes C em função da distância X para quatro posições de fonte ($Z_s = 0,2$; $Z_s = 0,5$; $Z_s = 0,75$; $Z_s = 1$) e profundidade $Z = 0,9$.

Em $Z = 0,9$, as concentrações são mais acentuadas na área próxima ao local de emissão do poluente, neste caso, as maiores concentrações encontradas são para a altura de fonte $Z_s = 1,0$. Para a altura de fonte $Z_s = 0,75$ a concentração máxima ocorre para distâncias próximas da fonte, enquanto que para as outras alturas a concentração é maior para distâncias mais afastadas. Observa-se ainda que para distâncias maiores que $X = 55$ a concentração praticamente se mantém constante, indicando que o poluente está completamente misturado com o meio.

Na Fig.(6), apresentam-se os gráficos da profundidade em função da concentração para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$) para a altura de fonte em $Z_s = 1,0$ a uma distância de $X = 0,5$.

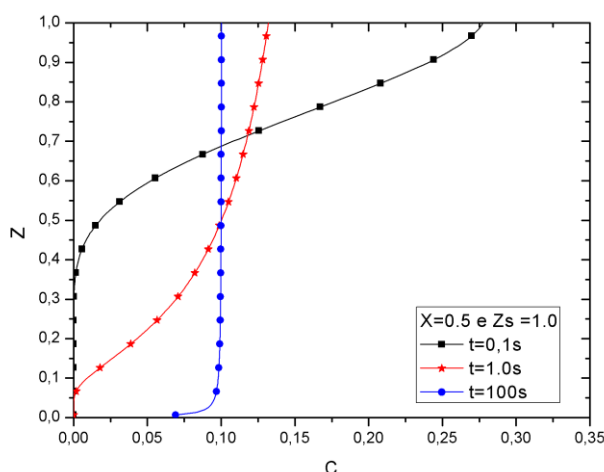


Figura 6. Perfil vertical da concentração de poluentes C para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$), para a posição de fonte $Z_s = 1,0$ a uma distância de $X = 0,5$.

Fazendo uma análise na Fig.(6) nota-se que, para os instantes iniciais as concentrações máximas se encontram na altura da fonte, ou seja, em $Z_s = 1,0$ o que pode ser explicado porque nos instantes iniciais não ocorreu a dispersão do poluente liberado no corpo hídrico.

Note que em 100s o poluente está praticamente disperso ao longo da profundidade na posição $X = 0,5$, tende a uma concentração homogênea de aproximadamente 0,10.

Na Fig.(7), apresentam-se os gráficos da profundidade em função da concentração para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$) para a altura de fonte em $Z_s = 0,75$ a uma distância de $X = 0,5$.

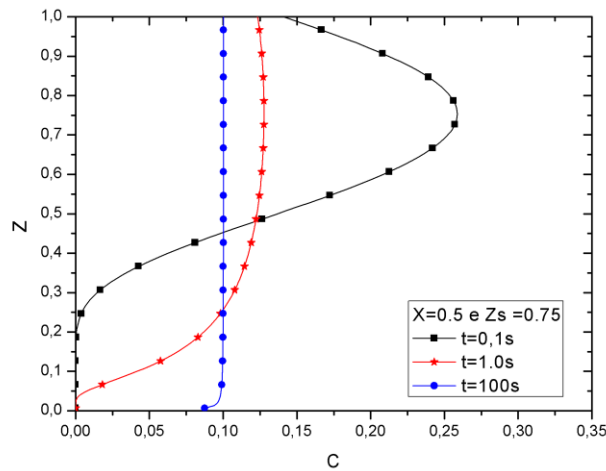


Figura 7. Perfil vertical da concentração de poluentes C para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$), para a posição de fonte $Z_s = 0,75$ a uma distância de $X = 0,5$.

Interpretando a Fig.(7) podemos constatar que, o comportamento da concentração se manifesta do mesmo modo que o caso anterior, para os instantes iniciais as concentrações máximas se encontram na altura da fonte, que neste caso encontra-se localizada em $Z_s = 0,75$.

Da mesma forma acontece a concentração homogênea, em torno de 100s, o poluente já se dispersou ao longo da profundidade na posição $X = 0,5$.

Na Fig.(8), apresentam-se os gráficos da profundidade em função da concentração para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$) para a altura de fonte em $Z_s = 0,5$ a uma distância de $X = 0,5$.

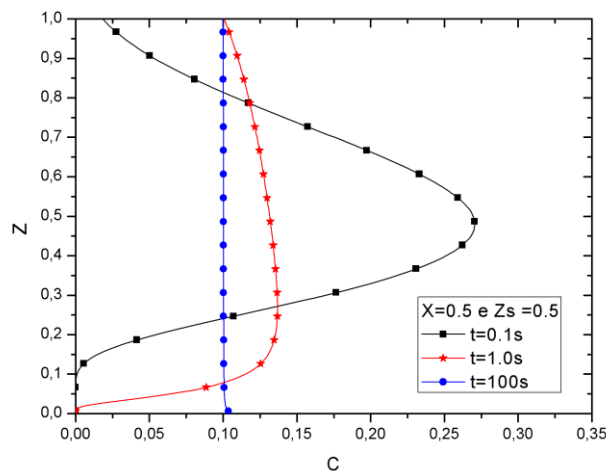


Figura 8. Perfil vertical da concentração de poluentes C para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$), para a posição de fonte $Z_s = 0,5$ a uma distância de $X = 0,5$.

Na Fig. (8), conclui-se que a maior concentração é observada no instante de tempo $t = 0,1$ e na altura onde a fonte de descarga do poluente está localizada, com o passar do tempo, a concentração tende a se homogeneizar (diminuindo o pico de concentração do poluente no canal), situação que pode ser observada no instante de tempo $t = 100$ s.

Na Fig.(9), apresentam-se os gráficos da profundidade em função da concentração para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$) para a altura de fonte em $Z_s = 0,2$ a uma distância de $X = 0,5$.

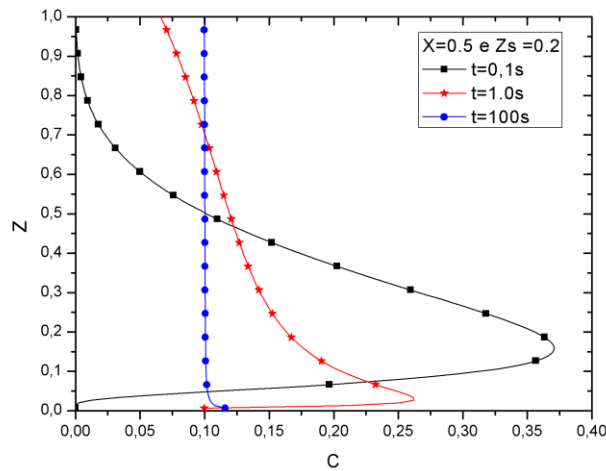


Figura 9. Perfil vertical da concentração de poluentes C para três tempos ($t = 0,1$; $t = 1$; $t = 100$), para a posição de fonte $Z_s = 0,2$ a uma distância de $X = 0,5$.

Pela análise dos gráficos, nota-se que com a evolução do tempo o poluente se dispersa ao longo de todo o corpo hídrico, ou seja, tende a atingir uma concentração homogênea ao longo do perfil vertical da concentração, note que com o tempo de $t = 100\text{s}$ as concentrações para todas as alturas de fontes a concentração já estão praticamente dispersas em todo o perfil vertical independente da altura da fonte, pelos gráficos pode-se dizer que é uma concentração homogênea de $C \approx 0,10$.

A seguir são expostos os gráficos da concentração no plano longitudinal e vertical, para as alturas de fonte $Z_s=1,0$ e $Z_s=0,5$.

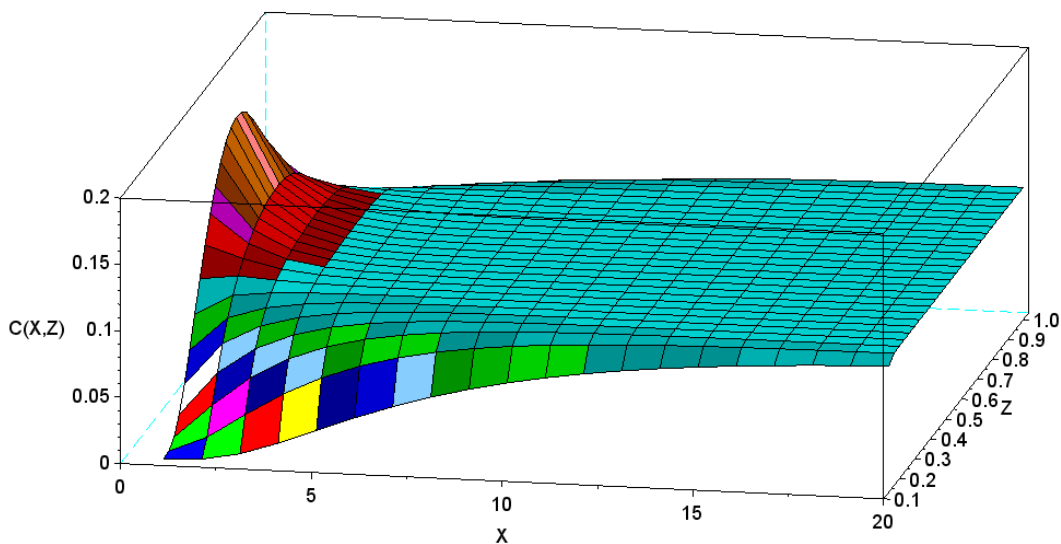


Figura 10. Distribuição da concentração no campo bidimensional (x,z) para a altura de fonte $Z_s=0,5$.

Com base na Fig. (10), é possível determinar facilmente em qual altura acontece o pico de concentração ($Z=0,5$), e pelos gráficos observa-se que para esta altura de fonte, o poluente para pequenas distâncias da fonte (X), já atinge sua concentração homogênea.

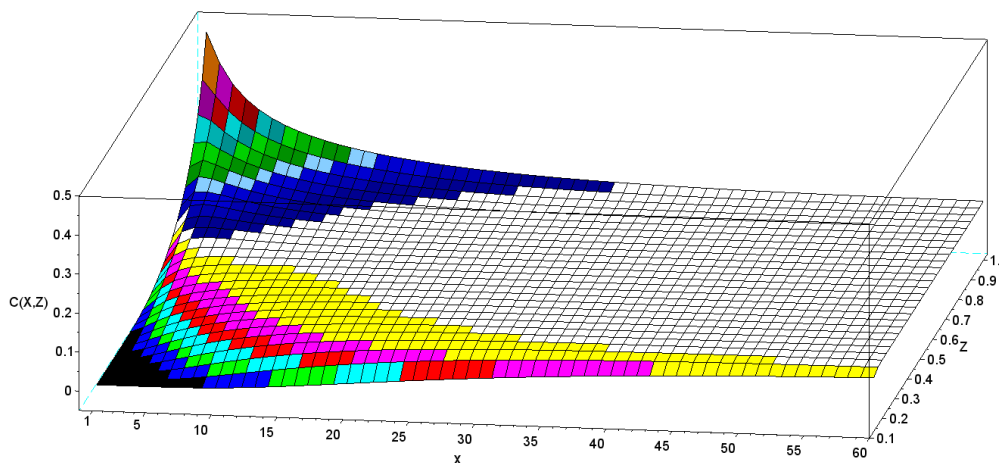


Figura 11. Distribuição da concentração no campo bidimensional (x,z) para a altura de fonte $Z_s=1,0$.

Observa-se novamente que as maiores concentrações estão localizadas nas posições próximas a fonte. Pelo gráfico, nota-se também que para uma altura de fonte de $1,0$, a concentração do poluente na posição $Z=0,1$ atinge a concentração homogênea para distâncias bem mais afastadas da fonte, em torno de ≈ 60 .

4. Conclusões

Neste trabalho foi aplicado um modelo matemático para representar a dispersão de um poluente em um corpo hídrico. A abordagem proposta para a resolução do modelo considera constantes os parâmetros turbulentos, como uma aproximação para se obter uma solução analítica utilizando o método de separação de variáveis e a transformação de similaridade. Através dos resultados apresentados, a metodologia abordada consegue reproduzir o fenômeno de dispersão de uma forma satisfatória, conforme os resultados dos índices estatísticos obtidos pelo modelo.

Com os gráficos da concentração em função da distância é possível prever quais são os locais em que ocorrerão as concentrações máximas, ou seja, as piores situações que a fonte poluidora pode causar ao meio ambiente (corpo hídrico). E com os resultados obtidos da evolução temporal da concentração é possível investigar quais os níveis de concentração que o corpo hídrico terá em previsões futuras, o que é muito importante para prevenções.

Referências

1. Braga, B., Hespanhol, I., Conejo, J. G. L., de Barros, J. C. M. M. T. L., Spencer, M., Porto, M., . . . Eiger, S. (2005). *Introdução a engenharia ambiental* (2nd ed.). São Paulo: Pearson Prentice Hall.
2. Cunha, D. G. F., & do Carmo Calijuri, M. (2013). *Engenharia ambiental: conceitos, tecnologia e gestão*. Rio de Janeiro: Elsevier.
3. de Barros, F. P. J. (2004). *Modelos multidimensionais para dispersão de contaminantes em rios e canais: Soluções híbridas por transformação integral* (Dissertação de Mestrado). PEM/UFRJ, Rio de Janeiro.
4. Degrazia, G. A., Moreira, D. M., Vilhena, M. T., & Moura, A. B. (2001). An analytical air pollution model: Eddy diffusivities depending on the source distance. *Air Pollution Modeling and Its Application XIV*, 08, 391–397.
5. Fischer, H. B., List, J. E., Koh, R. C. Y., Imberger, J., & Brooks, N. H. (1979). *Mixing in inland and coastal waters*. London: Academic Press.
6. Gonçalves, G. A., Buske, D., Quadros, R. S., & Weymar, G. J. (2018). A new approach to solve the time-dependent three-dimensional advection-diffusion equation applied to model air pollution dispersion in the planetary boundary layer. *International Journal of Development Research*, 08, 20535–20543.
7. Hanna, S. R. (1989). Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. *Atmospheric Environment*, 23, 1385-1395.

9. Hansen, A. G. (1964). *Similarity analysis of boundary value problems in engineering*. Canada: Prentice-Hall.
10. Machado, C. J. S. (2004). *Meandros do meio ambiente: Os recursos hídricos na economia e no cenário internacional* (Vol. 2). Rio de Janeiro: E-papers serviços editoriais.
11. Moreira, D. M., Costa, C. P., Vilhena, M. T., Brauer, C. R., Carvalho, J. C., & Degrazia, G. A. (2006). *A new semi-analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the planetary boundary layer*. Proceedings do 28th NATO/CCMS, Leipzig, Alemanha.
12. Nokes, R. I., McNulty, A. J., & Wood, I. R. (1984). Turbulent dispersion from a steady two-dimensional horizontal source. *Journal of Fluid Mechanics*, 149, 147–159.
13. de OLIVEIRA, R. E. (2015). *Dispersão de contaminantes em rios e canais através do método GILTT*. (Dissertação de Mestrado) – PPG em Modelagem Matemática, UFPel, Pelotas.
14. Ramos, A. P., Freire, D. C., Villar, S. B. B. L., Chaves, C. V. L., Alves, J. J. N., & Tavares Neto, J. I. H. (2015). O uso da modelagem para prever a dispersão de nuvens poluentes na atmosfera. *Blucher Chemical Engineering Proceedings*, 1(2), 9006–9012.
15. Tirabassi, T. (2005). *Tópicos em turbulência e modelagem da dispersão de poluentes na camada limite planetária*. In D. M. Moreira (Ed.), (pp. 59–78). Porto Alegre: UFRGS.
16. TUCCI, C. E. M. Águas urbanas. *Estudos Avançados*, v.22, n.63, p.1-16, 2008.
17. Özisik, M. N. (1993). *Heat conduction* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.