



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL



EFEITO DA RIGIDEZ GEOMÉTRICA NO COMPORTAMENTO DE VIGA SUPORTE DE MÁQUINAS ROTATIVAS

Eduardo de Melo Pádua

Dr. Reyolando M.L.R.F. Brasil

engenheiro mecanicoeduardo@gmail.com

reyolando.brasil@ufabc.edu.br

UFABC - Universidade Federal do ABC

Av. do Estado, 5001, 09210-580, São Paulo, Santo André, Brasil

Abstract. *We present a study on the effect of axial loads upon the geometric stiffness of metal beams supporting unbalanced rotating machinery. It is well known that the natural undamped free vibrations frequencies of mechanical systems depend on their mass and stiffness. On the other hand, the stiffness of slender members may be affected by the presence of large axial forces, due to the so called geometric stiffness. In this paper, we use two different approaches to the analysis: first, with the Rayleigh's Method and the second, the Finite Elements Method.*

Keywords: *Geometric Stiffness, resonance, natural frequency, unbalanced rotating machiner, FEM, Rayleigh Method.*

1. INTRODUÇÃO

Bases de máquinas rotativas são sistemas mecânicos, como diz Brasil e Silva (2015), que estão sujeitos a vibrações mecânicas e tais vibrações em amplitudes grandes podem causar diversos danos. Neste trabalho vamos realizar um estudo e bases de **máquinas rotativas metálicas**.

Uma maneira de controlar esses efeitos indesejáveis da vibração é aplicar uma força na direção do eixo principal da base. Isso vai alterar o valor de sua rigidez e , em consequência, a frequência natural. Os efeitos indesejados podem aparecer quando a frequência da força excitadora está próxima ou igual a frequência natural da base-suporte.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar o efeito da **rigidez geométrica** sobre a frequência natural dessas bases de máquinas rotativas em vigas metálicas. Rigidez geométrica é a parcela da rigidez total da viga que depende de forças axiais que alteram a forma geométrica do elemento, ou seja, que flexionam o elemento, Clough e Pezzen (1995).

As características dinâmicas de uma estrutura dependem da **massa** (m), **rigidez** (k) e **amortecimento** (c). As duas primeiras influenciam na frequência natural e modos de vibrar, como diz Vaz (2008), Brasil e Silva (2015) e Clough e Pezzen (1995). Entretanto, a rigidez inicial de uma estrutura, determinada na situação descarregada, é afetada pela presença dos carregamentos, axial, transversal ou combinação, que vão alterar sua rigidez geométrica e vão alterar, conseqüentemente, as frequências naturais da estrutura.

Sabe-se que cargas de compressão tendem a diminuir a rigidez e as frequências de vibração, podendo, no limite, levar à instabilidade do sistema (flambagem), correspondendo a frequências nulas ou negativas. Também é o caso dos esforços de tração que tendem a aumentar a rigidez e conseqüentemente a frequência natural.

Uma classe de estruturas de importância econômico-estratégica para a indústria civil e militar nacional são as bases de máquinas rotativas, sujeitas a vibrações induzidas pelos equipamentos suportados. Essas vibrações podem afetar a segurança da própria estrutura, em casos mais graves, ou podem gerar efeitos danosos ao equipamento em si e à qualidade do produto fabricado Brasil (2014). Também podem tornar inadequado o ambiente de trabalho dos operadores. Além disso, as cargas de excitação na base de máquinas vão causar tensões e deformações que causam ruídos, desequilíbrio de operação, aceleração no desgaste da máquina e redução na sua vida útil Vaz (2008), Ferro, Ferreira e Calenzani (2014).

Todos os ramos industriais estão sujeitos a esses problemas, inclusive as áreas extremamente sensíveis da exploração, lavra e refino de petróleo, energia eólica e energia atômica.

O estudo será realizado por 2 caminhos:

- Método de Rayleigh
- Método dos Elementos Finitos (MEF)

2. O MODELO FÍSICO

Para fins de exemplo da teoria aqui exposta, vamos utilizar a viga da Fig. 1 que tem o perfil de tubo retangular. Esta viga será biapoada, como indica seu modelo físico na Fig. 2.

Os dados que serão usados ao longo desse trabalho são:

$A = 0,9785 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ – área da secção transversal

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ – massa específica, Beer, Johnston, Russel (2010)

$I = 5,073 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ – momento de inércia da viga

$L = 2 \text{ m}$ – comprimento da viga

$E = 210 \text{ GPa}$ – módulo de elasticidade (módulo de young), Beer, Johnston, Russel (2010)



Figura 1 - Dimensões da viga. Espessura de 4,8. Todas as dimensões estão em mm.

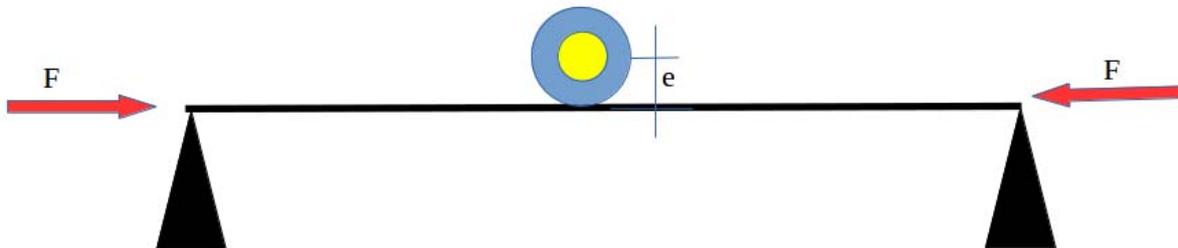


Figura 2 - Modelo físico da viga da Fig. 1.

Na Fig. 4 temos a imagem do motor elétrico que fará a vez da máquina rotativa, e, na Tabela 1, temos os seus dados de placa. A frequência de funcionamento é 1715 RPM ou 28,6 Hz, e sua massa de 12,5 kg. Estes valores serão usados ao longo desse trabalho para a máquina rotativa, caso sejam necessários. Este motor sobre a viga da Fig. 1, 4,8 x 60 x 60 x 2000 mm, apresenta um problema de vibração, posto que, sem carregamento axial algum, o sistema vai estar em ressonância, precisando de uma intervenção imediata para evitar problemas maiores.



Figura 3 - Motor elétrico de 1 CV. Fonte: Weg

Tabela 1 - Dados de placa do motor elétrico da Fig. 4. Fonte: Web.

| Variável | Valor |
|--------------------|--------------------|
| Tipo de motor | Elétrico Trifásico |
| Potência (CV)/(kW) | 1 / 0,75 |
| Tensão (V) | 220/380 |
| Rotação (RPM) | 1715 |
| Carcaça | 80 |
| Peso (kg) | 12,5 |
| Flange de Fixação | FC 120 DIN |

3. MODELOS MATEMÁTICOS

A análise de vibração será realizada como sendo **VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA**, cuja equação do movimento para o caso de um grau de liberdade é, conforme Brasil e Silva (2015), Rao (2003) e Clough e Pezien (1995):

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

e para vários graus de liberdade, Brasil e Silva (2015), Rao(2003) e Pezien (1995):

$$[m][\ddot{x}] + [k][x] = [0] \quad (2)$$

onde

$[m]$ – matriz de massa da estrutura

$[\ddot{x}]$ – matriz das acelerações

$[k]$ – matriz de rigidez da estrutura

$[x]$ – matriz dos deslocamentos

Neste tipo de análise só consideramos a **massa e rigidez** do sistema.

3.1 MÉTODO DE RAYLEIGH

A viga da Fig.1 é um sistema mecânico contínuo. A análise de vibração de sistemas contínuos requer a solução de uma equação diferencial parcial, o que é bastante difícil, como diz Rao (2003). Uma das maneiras alternativas de trabalhar com sistemas contínuos sem o uso de EDP's é como uso de funções de forma, como veremos abaixo.

Lord Rayleigh (1842-1919) propôs uma maneira de calcular a frequência natural de sistemas contínuos de forma bem simplificada como apregoa Clough e Pezien (1995). Este método utiliza a idéia da conservação da energia mecânica juntamente com os conceitos de função de forma, massa e rigidez generalizadas.

A fórmula é dada pela Eq.3 abaixo.

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \quad (3)$$

onde ω é a frequência natural em rad/s, m^* é a massa generalizada em kg e k^* é a rigidez generalizada em N/m.

A rigidez generalizada é composta por duas parcelas, como diz Wahrhaftig (2008) e Clough e Pezien (1995), a rigidez elástica e a rigidez geométrica cujo cálculo é dado pela Eq.4

$$k^* = k_0^* + k_g^* \quad (4)$$

Para saber os valores de m^* e k^* usamos as fórmulas abaixo, Clough e Pezien (1995):

$$m^* = \int_0^L m(x)\phi(x)^2 dx \quad (5)$$

$$k_0^* = \int_0^L EI(x)\phi''(x)^2 dx \quad (6)$$

$$k_g^* = F \int_0^L \phi'(x)^2 dx \quad (7)$$

onde

$\phi(x)$ → é chamada de **FUNÇÃO DE FORMA**, Clough e Pezien (1995)

E → módulo de elasticidade (GPa).

I → momento de inércia (m^4).

$m(x)$ → massa da estrutura por unidade de comprimento (kg/m).

$F(x)$ → força axial que é constante, ou seja, não vai mudar com o tempo (N).

Esta **função de forma** descreve o comportamento da flexão de uma membro estrutural ao longo de seu eixo principal x . Em outras palavras, podemos dizer que esta função tenta imitar a forma que a viga assume durante seu movimento.

Como podemos ver, a **rigidez geométrica generalizada** é sensível à força axial, ou seja, ela vai variar conforme varia a força, como se vê na Eq.7.

3.1.1 A Função de Forma Cúbica

Uma possível função de forma será uma função polinomial cúbica, posto que as funções do método dos elementos finitos para vigas serão também cúbicas:

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (8)$$

Utilizando as condições de contorno da viga chegaremos nos coeficientes da Eq.8.

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$\phi\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\phi'\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

Com isso chegamos que a Eq.8 é:

$$\phi(x) = \frac{3}{L}x - \frac{4}{L^3}x^3 \quad (8)$$

3.1.2 Resolvendo as integrais

Definida a função de forma como na Eq.8 e aplicando a Eq.5 com a consideração que $m(x) = m$, onde m é a massa por unidade de comprimento, que será obtida tomando a massa total da viga e dividindo pelo comprimento, chegamos a massa generalizada que é:

$$m^* = \frac{17}{35}mL \quad (9)$$

As integrais Eqs. 5, 6 e 7 vão ser integradas de 0 a L/2 porque a função cúbica, Eq. 8, está definida somente até a metade da viga, por não ser simétrica. Logo em seguida multiplicaremos o resultado por 2 para valer para todo o L, sendo assim, fica:

$$m^* = 2 \int_0^{L/2} m(x)\phi(x)^2 dx \quad (10)$$

$$k_0^* = 2 \int_0^{L/2} EI(x)\phi''(x)^2 dx \quad (11)$$

$$k_g^* = 2F \int_0^{L/2} \phi'(x)^2 dx \quad (12)$$

À massa generalizada vamos acrescentar a massa do motor M que não foi computada na Eq. 9

$$m^* = \frac{17}{35}mL + M \quad (13)$$

Já a rigidez elástica generalizada será obtida pela Eq.11. A viga da Fig. 2 tem $EI(x) = EI$, (prismática e uniforme) e sendo assim obtemos:

$$k_0^* = \frac{48EI}{L^3} \quad (14)$$

A rigidez geométrica é conseguida pela Eq.12 e é função da força axial, como se vê e confirmando aquilo que Alexandre de Macedo Wharhaftig diz em sua tese de doutorado, Wharhaftig (2008).

$$k_g^* = \frac{24F}{5L} \quad (15)$$

Calcularemos a frequência para as forças $F = \{-200, -150, -100, -75, -50, -25, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 25, 50, 75, 100, 150, 200\}$ em kN, os valores estão na tabela 2.

Tabela 2 - Valores das frequências conforme variamos a força axial usando o método de Rayleigh.

| Cargas(kN) | Frequências (Hz) |
|------------|------------------|
| -200 | 14,5 |
| -150 | 19,2 |
| -100 | 22,9 |
| -75 | 24,6 |
| -50 | 26,2 |
| -25 | 27,6 |
| -1 | 29,0 |

| | |
|-------------|-------------|
| -0,5 | 29,0 |
| 0 | 29,0 |
| 0,5 | 29,0 |
| 1 | 29,1 |
| 25 | 30,4 |
| 50 | 31,6 |
| 75 | 32,9 |
| 100 | 34,0 |
| 150 | 36,3 |
| 200 | 38,4 |

3.1.3 Analisando os dados

Nosso motor trabalha a 1715 RPM ou 28,6 Hz em regime permanente. A ressonância ocorre quando a fonte excitadora, no caso o motor, tem sua **frequência igual ou próxima da frequência natural da viga**, Wikipédia (referência). Assumiremos uma zona de ressonância de 10% em torno de 28,6 Hz, ou seja 25,7 a 31,5 Hz, ou seja, a frequência natural da viga tem que ficar fora dessa faixa para que não haja ressonância.

Observando a Tabela 2, teremos que aplicar uma força acima de 75 kN na compressão e acima de 50 kN na tração para que a viga saia da ressonância.

Nos 3 gráficos abaixo temos visualmente o comportamento da frequência natural da viga conforme variamos as forças axiais.

Os gráficos ajudam a confirmar aquilo que na tabela está explícito. Os gráficos não podem se encontrar. A interseção significa ressonância.

No gráfico de tração, a medida que aumentamos a força axial, a frequência natural vai aumentando e saindo da zona de ressonância. Na compressão temos um comportamento semelhante. Conforme aumentamos a compressão, menor será a frequência e também estaremos nos afastando da zona de ressonância.

Ao alterar os valores da **força axial** estaremos alterando o valor da **rigidez geométrica** que vai influenciar na rigidez total da estrutura e influenciar na **frequência natural**.

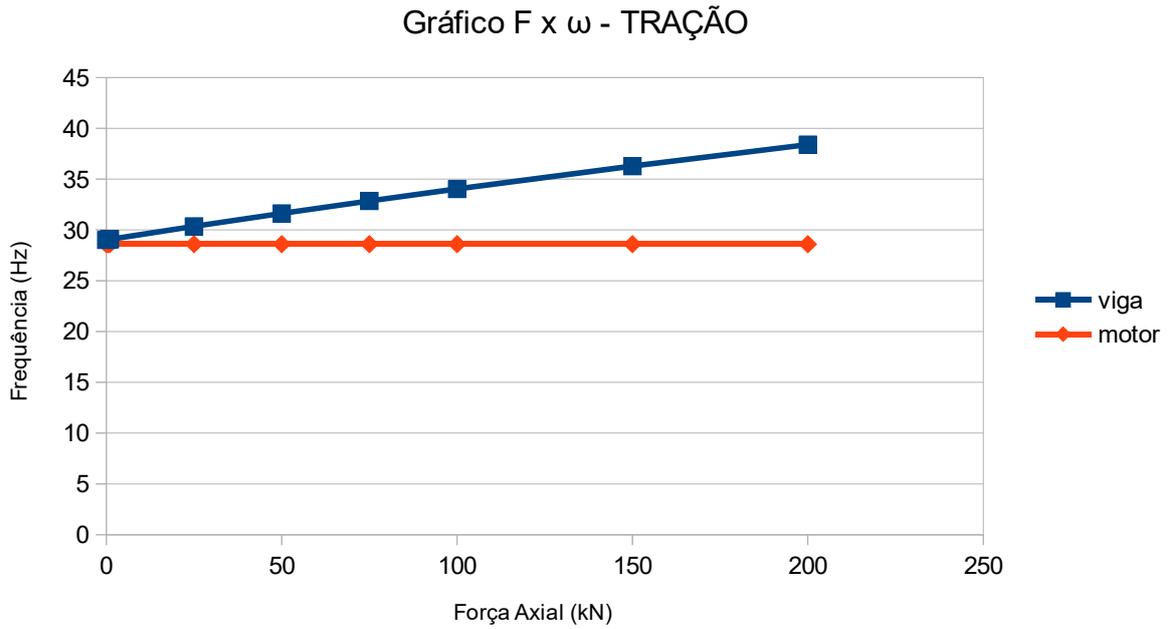


Figura 4 - Gráfico que relaciona a frequência natural da viga conforme variamos a força axial na tração.

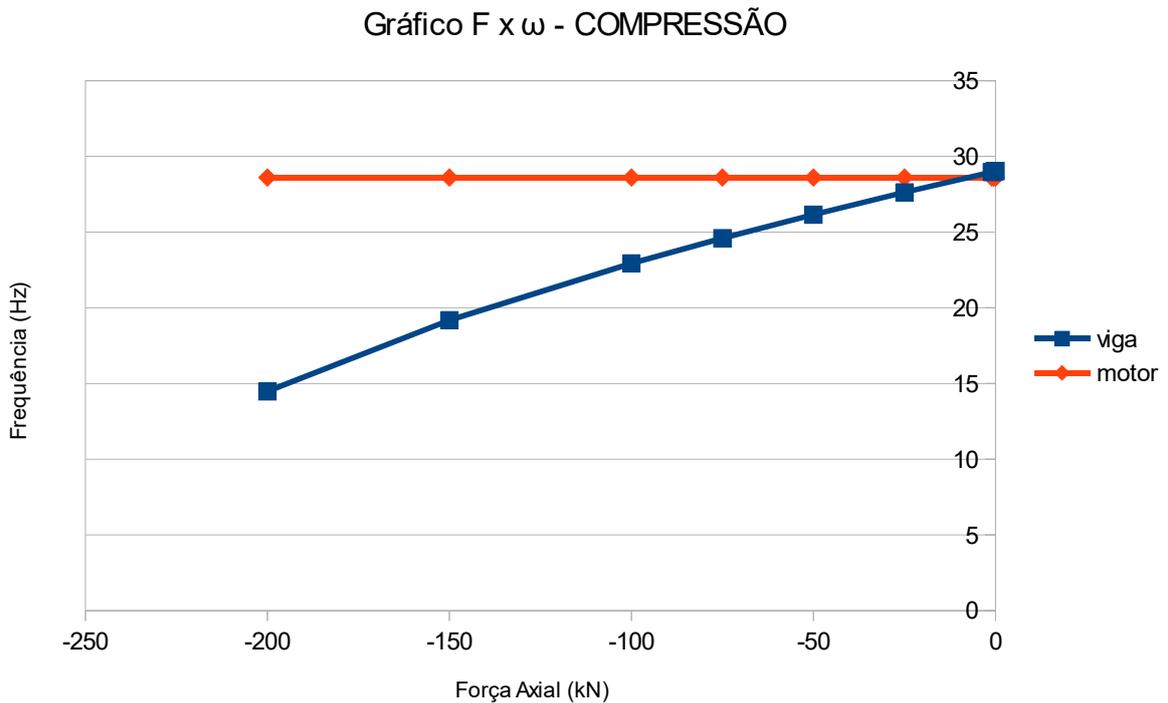


Figura 5 - Gráfico que relaciona a frequência natural da viga conforme variamos a força axial na compressão.

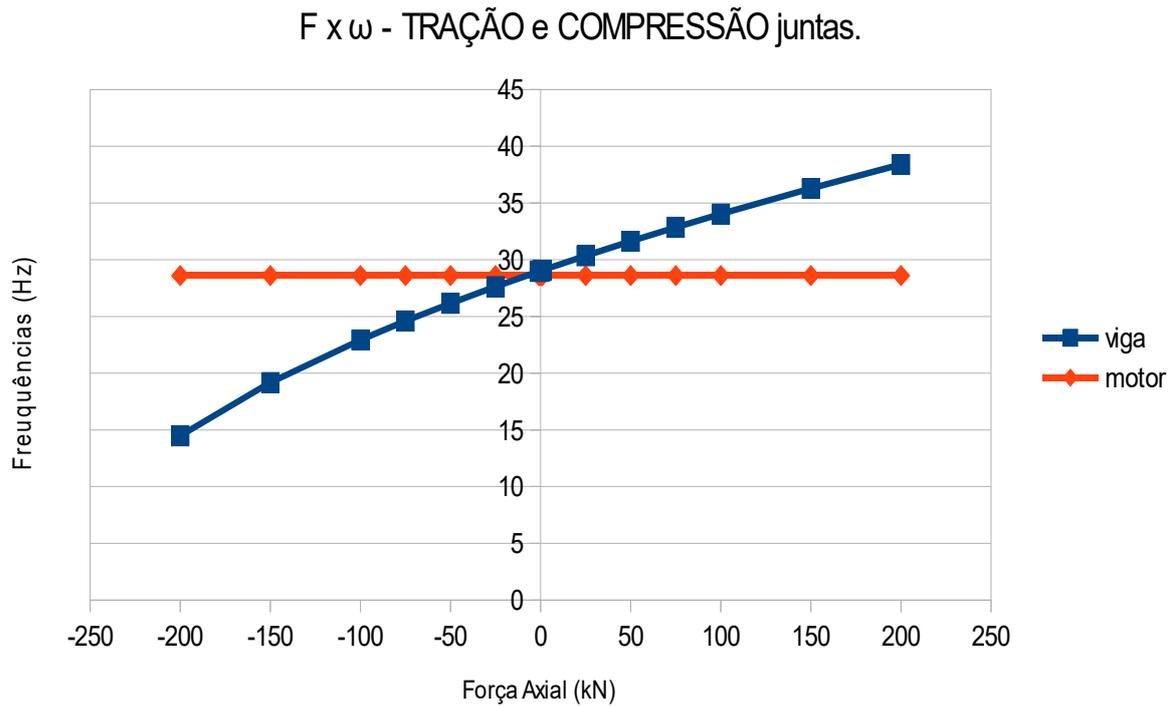


Figura 6 - Gráfico que mostra os gráficos da figura 5 e 7 ao mesmo tempo.

3.2 ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos (MEF) nada mais é que uma técnica de discretização de sistemas contínuos e aproximação numérica de suas equações diferenciais como explicita Wahrhaftig (2008).

Pelo método dos elementos finitos trabalhamos com o modelo de elemento com 6 graus de liberdade para estruturas com deslocamento no plano.

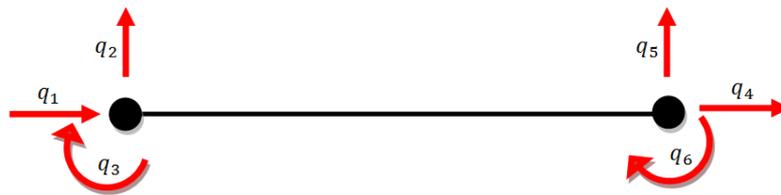


Figura 7 - Esboço de elemento finito de estruturas planas com 6 graus de liberdade.

Utilizando este modelo de elemento finito teremos as matrizes abaixo:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L} + \frac{6P}{5L} & \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} & \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} - \frac{6P}{5L} & \frac{-6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{6P}{5L} & \frac{-6EI}{L} - \frac{P}{10} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{P}{10} & \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} - \frac{P}{10} & \frac{4EI}{L} + \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[m] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I}{5AL^2} & \frac{11L}{210} + \frac{I}{10AL} & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I}{5AL^2} & \frac{-13L}{420} + \frac{I}{10AL} \\ 0 & \frac{11L}{210} + \frac{I}{10AL} & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15A} & 0 & \frac{13L}{420} - \frac{I}{10AL} & \frac{-L^2}{140} - \frac{I}{30A} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I}{5AL^2} & \frac{13L}{420} - \frac{I}{10AL} & 0 & \frac{13}{35} + \frac{6I}{5AL^2} & \frac{-11L}{210} - \frac{I}{10AL} \\ 0 & \frac{-13L}{420} + \frac{I}{10AL} & \frac{-L^2}{140} - \frac{I}{30A} & 0 & \frac{-11L}{210} - \frac{I}{10AL} & \frac{L^2}{105} + \frac{2I}{15A} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$[k]$ é a matriz de rigidez total do elemento, nela está contida tanto a rigidez geométrica $[k_g]$ como a rigidez elástica $[k_0]$.

$$[k] = [k_0] + [k_g] \quad (18)$$

e $[m]$ é a matriz de massa onde considera-se o **momento de inércia** I da seção para levar em conta a inércia rotacional, não incluída no Método de Rayleigh.

Observando a matriz de rigidez $[k]$ temos que os elementos tem uma parcela que carrega o efeito da rigidez geométrica, as que incluem a força axial F .

A matriz de rigidez e a matriz de massa foram retiradas do livro Análise Matricial de Estruturas de Venancio Filho (1975).

3.2.1 Simulações

Os cálculos foram automatizados através de um programa implementado em OCTAVE , que é uma versão compatível ao MATLAB, como diz o Site da Organização Octave (referência) .

O programa estabilizou os valores de saída a partir de 6 elementos finitos como mostra a Tabela 3 abaixo.

Tabela 3 - Tabela que relaciona a quantidade de elementos cujos os quais permitem que o programa dê um melhor valor. Valores para carga 0 kN e dados geométricos e de materiais da viga da Fig.1. Não foi considerado a massa do motor.

| Nº Elementos | ω (Hz) |
|--------------|---------------|
| 1 | 51,46 |
| 2 | 46,55 |
| 3 | 46,40 |
| 4 | 46,38 |
| 5 | 46,37 |
| 6 | 46,37 |
| 10 | 46,37 |
| 20 | 46,37 |
| 100 | 46,37 |

Portanto toda análise vai ser realizada com 6 elementos para garantir a precisão máxima do programa.

3.2.2 Adicionando o motor

A distribuição da massa do equipamento depende da posição do centro de massa do equipamento e da forma como este equipamento está apoiado sobre a estrutura, como afirmam Ferro, Ferreira e Calenzani (2014).

Na matriz de massa [m] temos que adicionar a massa do motor que é de $M=12,5$ kg. Como o programa estabilizou a partir de 6 elementos e o motor está no centro da viga, esta massa M vai ficar em cima do nó 4, que é o nó central, como mostra a Fig. 9. Assim no grau de liberdade 6 adicionaremos a massa e no grau de liberdade 7 vamos adicionar o momento de inércia I relativo a possível rotação do motor em relação a eixo elástico da viga.

Como o modelo de elementos finitos tem 12 graus de liberdade, a matriz de massa da estrutura (assim como a matriz de rigidez) será uma matriz 12x12. Sendo assim, na posição $m(6,6)$ adicionamos, além do que já está contido, os 12,5 kg, e na posição $m(7,7)$ adicionamos, além do que já lá está contido, o momento de inércia . A excentricidade é $e = \frac{0,060}{2} + 0,08 = 0,110$.

$$I = Me^2 \tag{19}$$

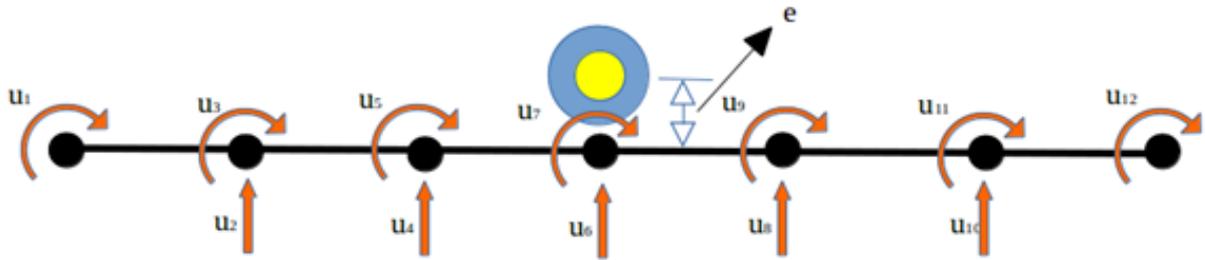


Figura 8 - Viga dividida em 6 elementos finitos, mostrando os 12 graus de liberdade e onde fica o motor nesta divisão.

3.2.3 Análise dos dados

Gerando as frequências para as cargas em análise temos a tabela 4. Comparando essas frequências com as frequências obtidas pelo Método de Rayleigh temos a tabela 5 e como podemos observar houve uma diferença média de 2%.

Tabela 4 - As várias frequências conforme variamos as forças no eixo da viga.

| Cargas(kN) | FEM (6 elem.) Frequências (Hz) |
|------------|-----------------------------------|
| -200 | 14,0 |
| -150 | 18,7 |
| -100 | 22,4 |
| -75 | 24,1 |
| -50 | 25,6 |
| -25 | 27,1 |
| -1 | 28,4 |
| -0,5 | 28,5 |
| 0 | 28,5 |
| 0,5 | 28,5 |
| 1 | 28,5 |
| 25 | 29,8 |
| 50 | 31,1 |
| 75 | 32,3 |
| 100 | 33,4 |
| 150 | 35,6 |
| 200 | 37,7 |

Tabela 5 - Comparação entre as frequências via método de Rayleigh e o FEM.

| Cargas (kN) | FEM -- ω (Hz) | Rayleigh -- ω (Hz) | Diferença em % |
|--------------------|--|---|-----------------------|
| -200 | 14,0 | 14,5 | 4% |
| -150 | 18,7 | 19,2 | 3% |
| -100 | 22,4 | 22,9 | 2% |
| -75 | 24,1 | 24,6 | 2% |
| -50 | 25,6 | 26,2 | 2% |
| -25 | 27,1 | 27,6 | 2% |
| -1 | 28,4 | 29,0 | 2% |
| -0,5 | 28,5 | 29,0 | 2% |
| 0 | 28,5 | 29,0 | 2% |
| 0,5 | 28,5 | 29,0 | 2% |
| 1 | 28,5 | 29,1 | 2% |
| 25 | 29,8 | 30,4 | 2% |
| 50 | 31,1 | 31,6 | 2% |
| 75 | 32,3 | 32,9 | 2% |
| 100 | 33,4 | 34,0 | 2% |
| 150 | 35,6 | 36,3 | 2% |
| 200 | 37,7 | 38,4 | 2% |

4. CONCLUSÃO

Como pode ser observado na Tabela 5, a viga sem força axial alguma já está com sua frequência natural na faixa de ressonância do motor que é de 25,7 a 31,5 Hz, tendo em Rayleigh como em FEM, sendo assim uma intervenção imediata é necessária.

Alterando a **rigidez geométrica** através da **força axial**, conseguimos imediatamente alterar sua frequência natural e livrando todo o sistema de situações desagradáveis, tais como amplitude de vibração grande ou até mesmo o colapso do sistema. A força aplicada terá que ser acima de 75 kN na compressão e de 50 kN na tração.

Concluimos ainda que os 2 métodos de análise mostram a mesma coisa: que alterações na rigidez geométrica (forças aplicada axialmente) interferem diretamente na frequência natural da viga e que valores obtidos por métodos diferentes diferiram na média de apenas 2%

Assim, é possível retirar uma base de máquina rotativa da ressonância somente **alterando sua rigidez** através da aplicação de uma força no seu eixo principal.

Agradecimentos

Os autores agradecem apoio do CNPq e CAPES, ambas agências brasileiras de apoio à pesquisa.

REFERENCIAS

Ray W. Clough, Joseph Penzien, 1995. Dynamics of Structures - Computers & Structures, New York.

Reyolando M. L. R. F. Brasil e Marcelo Araújo da Silva, 2015. Introdução à dinâmica das Estruturas. 2ª edição. Ed. Blucher, São Paulo.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ressonancia>, na data de 07/2016

Vaz J. C., 2008. Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga de Euler-Bernoulli Escalonada com Apoios Elasticamente Variáveis. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Itajubá.

Singiresu S. Rao, 2003. Mechanical Vibrations - 4ª edição. Ed. Pierson, São Paulo.

Rafael M. Ferro, Walnório G. Ferreira, Adenilcia F. G. Calenzani, 2014. Estado da Arte: Análise Dinâmica de Estrutura de Aço Suporte de Máquinas Rotativas. IMMEC/EMMCOMP 2014 XI Simpósio de Mecânica Computacional II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional Juiz De Fora, MG, 28-30 de Maio De 2014.

<https://www.gnu.org/software/octave/about.html> - site do programa OCTAVE.

Ferdinand P. Beer, Johnston Jr, E, Russell, 2010. Resistência dos Materiais. Makron, São Paulo.

Reyolando M. L. R. F. Brasil, 2014. On the Effect of Geometric nonlinearity on Resonance in a Machine Foudation. Artigo apresentado no 11th. World Congress on Computational Mechanics(WCCM XI), 5th. European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) e 6th. European conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI).

<http://www.weg.net/br> -- na data de 07/2016

Fernando Venância Filho, 1975. Análise Matricial de Estruturas. Ed. A. Neves, Rio de Janeiro, 1975.