



## **PROJETO DE CONTROLADOR PREDITIVO BASEADO EM MODELO PARA SISTEMAS DE CONTROLE DE ATITUDE DE SATÉLITES ARTIFICIAIS.**

**Reurison Silva Rodrigues**

reurison@gmail.com

Universidade de Brasília Campus Universitário Darcy Ribeiro, 70910-900, DF, Brasília, Brasil.

**André Murilo**

andremurilo@unb.br

Universidade de Brasília Campus Gama, 72.444-240, DF, Gama, Brasil.

**Luiz Carlos Gadelha de Souza**

lcgs@unb.br

Universidade de Brasília Campus Gama, 72.444-240, DF, Gama, Brasil.

**Abstract.** *Os satélites artificiais são sistemas robóticos extremamente complexos e caros, empregados em aplicações científicas, militares e de comunicação. O controle de atitude para este sistema é responsável por assegurar que o objeto espacial se encontre na posição, velocidade e trajetória corretas, estabilizando o veículo espacial e o orientando nas direções desejadas durante a missão, independente de perturbações externas nele atuantes. É importante que o projeto do controlador seja desenvolvido visando atender aos requisitos de funcionamento do satélite e seja capaz de lidar com as diversas restrições presentes no sistema, caso contrário podem ocorrer falhas ou funcionamento inadequado do sistema. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver um controlador preditivo baseado em modelo para o controle de atitude de um satélite artificial e, por conseguinte, validar a estratégia de controle em ambiente de simulação. A escolha deste controlador foi baseada na sua flexibilidade, relativa facilidade de aplicação de uma solução ótima, e principalmente, por sua capacidade de lidar com restrições inerentes ao sistema de maneira explícita. Os resultados obtidos em simulação são comparados com outras estratégias de controle e mostram a eficiência do controlador proposto para rastreamento de trajetória em sistemas de controle de atitude de satélites.*

**Keywords:** *Controle preditivo, Sistema de controle de atitude, Satélites*

## 1 INTRODUÇÃO

O Subsistema de Controle e Determinação de Atitude (ADCS) é crucial para cada missão de satélite. O ADCS desempenha um papel fundamental, uma vez que deve fornecer informações de atitude do satélite bem como estabilizar o mesmo (Lin and Juang, 2014). Embora a necessidade do controle de atitude varie para diferentes missões, ele está presente em quase todos os satélites em órbita. Por muitas razões, a atitude de satélites determina diretamente o resultado das missões (Chen and Wu, 2010). Por exemplo, os satélites devem ser orientados corretamente para que sua antena seja direcionada de maneira a conseguir se comunicar com a terra. Além disso, a fim de produzir energia suficiente para seu funcionamento é desejável orientar as faces de seus painéis solares em direção ao sol.

Nos últimos anos, a pesquisa sobre controle de atitude de satélites tem se tornado o foco de várias pesquisas (Li et al., 2014). Neste tema abordagens de controle linear robusto (Han et al., 2011), controle não linear (Lo and Shen, 1995), sliding-mode control (Guan et al., 2005) e controle adaptativo (Xiao et al., 2011) foram desenvolvidas.

Hoje o controle preditivo baseado em modelos (MPC) lineares e não lineares é umas das técnicas avançadas mais promissoras para lidar com sistemas multivariáveis com restrições (Simon, 2014). A abordagem MPC usa a solução online de um problema de otimização numérica, gerando planos de ações futuras (Richards, 2004).

Neste contexto, pode-se considerar o uso da estratégia MPC para controle de atitude de satélites. Na verdade, o MPC se tornou bastante popular principalmente em aplicações industriais devido a sua flexibilidade, relativa facilidade de implementação, sua capacidade de lidar com restrições operacionais de maneira explícita (Mayne et. al., 2000), lidando com modelos multivariáveis e não lineares (Alamir, 2013). Contribuições na literatura utilizando o controlador MPC aplicado ao controle de atitude de satélites podem ser encontrados em (Hegrenaes et al., 2005; Chen and Wu, 2010; Pirouzmand and Ghahramani, 2013; Bai et al., 2013; Li et al., 2014).

Neste trabalho, é apresentado um estudo preliminar da aplicação do controlador MPC na sua formulação em espaço de estados utilizando restrições das variáveis de estado, dos atuadores e da taxa de variação dos atuadores para a plataforma de teste de satélites apresentada em (Gonzales, 2009). As simulações executadas irão utilizar o controlador MPC linearizado para controlar o modelo não linear da plataforma. O resultado destas simulações avaliará a eficiência do controlador proposto. Além disso, é apresentado um estudo comparativo de desempenho entre o controlador MPC e o controlador LQR desenvolvido por (Gonzales, 2009).

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2 a plataforma de testes de satélites e seu modelo dinâmico são descritos. Na seção 3 é apresentada a formulação do controle preditivo. Na seção 4 é desenvolvido o controlador MPC linear. Na seção 5 serão apresentados os resultados das simulações. As conclusões serão apresentadas na seção 6.

## 2 MODELO DO SISTEMA

O objeto de estudo deste trabalho é a plataforma de testes de satélite representada na Fig. 1. Como pode ser visto, o simulador é uma mesa giratória de três eixos suportada por um mancal esférico. O uso do mancal esférico é necessário para simular as condições em que é desejado

controle de atitude em três eixos de rotação. Em contrapartida possui a limitação de permitir a rotação completa em apenas um dos eixos.

A plataforma pode acomodar vários componentes de satélites; como sensores, atuadores, computadores e suas interfaces. Um dos principais aspectos que tem faltado tipicamente na área de controle de atitude de satélites é a validação experimental dos resultados teóricos. A grande dificuldade em implementar leis de controle para espaçonaves deve-se ao fato de que simular ambientes de gravidade zero, livres de torques não é fácil. (Tsiotras et. al, 2003).

Nesta plataforma os elementos responsáveis por manter a orientação desejada são as rodas de reação. A roda de reação é um motor ligado a um volante de alta inércia que é livre para girar ao longo de um eixo fixo da espaçonave (Votel and Sinclair, 2012). Ela utiliza o princípio da conservação do momento angular, que afirma que um sistema sem a ação de torques externos, a quantidade de momento angular é conservada. Quando o motor começa a girar, induzindo uma velocidade na roda de reação, surge um torque de mesma intensidade e direção oposta que é aplicado a plataforma. Neste trabalho não considera-se a modelagem dos motores das rodas de reação.

O sistema de referência inercial  $F_i(i_1, i_2, i_3)$  está localizado no centro do mancal esférico, considerado como o centro de rotação do simulador. O sistema de referência do corpo  $F_b$  é considerado como tendo o mesmo centro, variando-se apenas a orientação do mesmo com relação ao sistema inercial. Além disso, considera-se também que o sistema de referência do corpo está orientado conforme os eixos principais de inércia da mesa giratória.



**Figura 1: Mesa giratória de três eixos.**

Denomina-se atitude do simulador a orientação relativa entre o sistema de referência inercial  $F_i$  e o sistema de referência do corpo  $F_b$  fixo a mesa giratória. Para descrever a orientação de  $F_b$  com relação a  $F_i$ , utiliza-se os ângulos de Euler na sequência de rotações 3-2-1, ou seja, partindo-se de  $F_i$  para se chegar a  $F_b$ , o eixo 3 deverá ser rotacionado de um ângulo  $\theta_1$ , o eixo 2 deverá ser rotacionado de um ângulo  $\theta_2$ , e o eixo 1 deverá ser rotacionado de um ângulo  $\theta_3$ .

As equações que governam o comportamento dinâmico da plataforma foram obtidos de (Gonzales, 2009). Para um desenvolvimento completo consultar (Gonzales, 2009). A modelagem do sistema é obtida a partir do teorema de Euler para o momento angular:

$$\dot{\vec{h}} = \vec{g} \quad (1)$$

Onde  $\vec{g}$  é a somatória dos torques externos ao redor do centro de massa e  $\vec{h}$  é o momento angular ao redor do centro de massa. Utilizando a notação de (Hughes, 1980):

$$\vec{h} = \vec{I} \vec{\omega} + I_w(\Omega_1 + \omega_1)\hat{b}_1 + I_w(\Omega_2 + \omega_2)\hat{b}_2 + I_w(\Omega_3 + \omega_3)\hat{b}_3 \quad (2)$$

Onde  $I = \text{diag}(I_{11}, I_{22}, I_{33})$  é o tensor de inércia do simulador e  $I_{11}$ ,  $I_{22}$  e  $I_{33}$  são os momentos de inércia em torno dos eixos  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , respectivamente.  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular de  $F_b$  com relação a  $F_i$ . Utilizando os termos  $\vec{I}_w = \text{diag}(I_w, I_w, I_w)$  chamado tensor de inércia das rodas de reação, todos iguais a  $I_w$ , e  $\vec{\Omega} = (\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3)$ , que representa a velocidade angular das rodas de reação nos seus respectivos eixos, a equação pode ser reescrita como:

$$\vec{h} = \vec{I} \vec{\omega} + \vec{I}_w(\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \quad (3)$$

Diferenciando a eq. (3) utilizando a regra de (Hughes, 1980) e considerando  $\dot{\vec{g}} = 0$  chega-se na expressão:

$$\dot{\omega} = (I + I_w)^{-1}[-\omega^x(I + I_w)\omega - \omega^x I_w \Omega - I_w \dot{\Omega}] \quad (4)$$

Onde  $\omega^x$  é a chamada matriz *skew-symmetric*, definida:

$$\omega^x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  são as velocidades angulares de  $F_b$  com relação à  $F_i$ . A atitude do simulador como função da velocidade angular utilizando a sequência de rotação de ângulos de euler 3-2-1 é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\theta_3)/\cos(\theta_2) & \cos(\theta_3)/\cos(\theta_2) \\ 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ 1 & \sin(\theta_3)\sin(\theta_2)/\cos(\theta_2) & \cos(\theta_3)\sin(\theta_2)/\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

As variáveis  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  são os ângulos que descrevem a atitude do simulador como a orientação relativa entre o referencial inercial  $F_i$  e a referência fixada ao corpo  $F_b$ . A partir das equações (4) e (6) busca-se representar o sistema no modelo em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (7)$$

Onde o vetor de estados é definido como  $x = (\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$  e o vetor de entrada é definido como  $u = (\dot{\Omega}_1 \ \dot{\Omega}_2 \ \dot{\Omega}_3)^T$ , onde  $\dot{\Omega}_1$ ,  $\dot{\Omega}_2$  e  $\dot{\Omega}_3$  são as acelerações das rodas de reação. Como indicado em (Gonzales, 2009) assume-se que todos os estados do sistema são observáveis, logo a matriz de saída pode ser escrita como a matriz identidade  $C = \mathbb{I}_{6 \times 6}$  e a matriz de transmissão direta  $D$  visto que o sistema não possui alimentação direta de entrada é igual a zero, então  $D = 0_{6 \times 3}$ .

Definindo-se a matriz de estados A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(\theta_3)}{\cos(\theta_2)} & \frac{\cos(\theta_3)}{\cos(\theta_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sin(\theta_3) \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} & \frac{\cos(\theta_3) \sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(I_{22}\omega_3 - I_\omega \Omega_3)}{(I_{11} + I_\omega)} & \frac{(-I_{33}\omega_2 + I_\omega \Omega_2)}{(I_{11} + I_\omega)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-I_{11}\omega_3 + I_\omega \Omega_3)}{(I_{22} + I_\omega)} & 0 & \frac{(I_{33}\omega_1 - I_\omega \Omega_1)}{(I_{22} + I_\omega)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(I_{11}\omega_2 - I_\omega \Omega_2)}{(I_{33} + I_\omega)} & \frac{(-I_{22}\omega_1 + I_\omega \Omega_1)}{(I_{33} + I_\omega)} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

É importante notar que a matriz A não é constante pois depende das velocidades das três rodas de reação  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ , que por sua vez são variáveis no tempo. A matriz B é constante e pode ser definida como:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-I_\omega}{I_{11} + I_\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_\omega}{I_{22} + I_\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-I_\omega}{I_{33} + I_\omega} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3 FORMULAÇÃO DO CONTROLE PREDITIVO

A estratégia MPC consiste em resolver um problema de otimização de horizonte deslizante, onde a solução é reiterada a cada período de amostragem baseado em informações de feedback

do sensor (Camacho and Bordons, 1999). Basicamente, os elementos necessários para definir adequadamente a formulação do controlador MPC são: a função custo e as restrições. Neste trabalho, utiliza-se a formulação do controlador preditivo presente em (Alamir, 2013). Para mais detalhes o leitor deverá consultar o trabalho original.

Inicialmente considera-se o modelo da planta descrito utilizando o modelo em espaço de estados discreto.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (10)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $n$  a ordem do sistema. As matrizes  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$  são constantes e descrevem a dinâmica do sistema. O vetor  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  das entradas de controle e  $n_u$  o número de entradas do sistema. O mapa de predição com horizonte  $n$  pode ser obtido calculando-se a sequência  $N$  de futuras ações, onde  $N$  é chamado de horizonte de predição. A sequência de entradas futuras é dada por:

$$\tilde{u}(k) := (u(k) \ u(k+1) \ \dots \ u(k+N-1))^T \in \mathbb{R}^{N \cdot n_u} \quad (11)$$

O mapa de predição com horizonte  $n$  permite prever para cada sequência  $\tilde{u}(k)$  de ações futuras, a trajetória de futuros estados  $\tilde{x}(k|\tilde{u}(k))$  dado o estado inicial  $x(k)$ . Onde,

$$\tilde{x}(k) := (x(k+1) \ x(k+2) \ \dots \ x(k+N-1))^T \in \mathbb{R}^{N \cdot n} \quad (12)$$

Para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) pode-se obter uma expressão geral para  $\tilde{x}(k)$  a partir das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da eq. (10), para uma determinada sequência  $\tilde{u}$  de ações futuras.

$$\tilde{x}(k) = (\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N)^T x(k) + (\Psi_1 \ \dots \ \Psi_N)^T \tilde{u} \quad (13)$$

Em que as matrizes  $\Phi_i$  and  $\Psi_i$  ( $i \in 1, \dots, N$ ) são definidas:

$$\Phi_i := A^i \quad \Psi_i := [A^{i-1}B, \dots, AB, B] \left( \Pi_1^{(n,N)} \ \dots \ \Pi_{i-1}^{(n,N)} \ \Pi_i^{(n,N)} \right)^T \quad (14)$$

Onde  $\Pi_i^{(n,N)}$  é chamada de matriz de seleção, definida como:

$$\Pi_i^{(n,N)} := \underbrace{(\mathbb{O}_{n \times n}, \dots, \mathbb{O}_{n \times n})}_{(i-1) \text{ termos}} \ \mathbb{I}_{n \times n} \ \underbrace{(\mathbb{O}_{n \times n}, \dots, \mathbb{O}_{n \times n})}_{(N-i) \text{ termos}} \quad (15)$$

A função custo a ser minimizada correspondente a uma sequência  $\tilde{\mathbf{u}}$  de ações futuras, dado o estado atual  $x(k)$  e a trajetória de saída desejada  $\tilde{y}_r^d$  definida no horizonte de predição  $[k, k+N]$  é definida como:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}|x(k), \tilde{y}_r^d(k), \mathbf{u}^d) := \sum_{i=1}^N \|y_r(k+i) - \tilde{y}_r^d(k+i)\|_{Q_y}^2 + \sum_{i=1}^N \|\Pi_i^{(n_u, N)} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^d\|_{Q_u}^2 \quad (16)$$

O primeiro termo da eq. (16) representa a penalização referente as saídas reguladas e o segundo termo representa a penalização do vetor de controle  $\mathbf{u}$ . Onde  $Q_y \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  é a matriz de ponderação simétrica quadrada utilizada para penalizar o erro de rastreamento e  $n_r$  representa o número de estados regulados. A matriz  $Q_u \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$  é a matriz definida positiva de penalização do comando  $\tilde{\mathbf{u}}$ . O vetor  $\tilde{y}_r := (y_r(k+1) \dots y_r(k+N))^T$  representa o vetor de saída em torno do qual o comando deve estabilizar-se em regime estacionário. Onde  $y_r$  é:

$$y_r := C_r x \in \mathbb{R}^{n_r} \quad (17)$$

A matriz  $C_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n}$  define quais estados serão regulados. O vetor  $\tilde{y}_r^d(k) := (y_r^d(k+1) \dots y_r^d(k+N))$  é definido como a trajetória de referência e  $\mathbf{u}^d$  é definido como um valor fixo de entrada. A equação (16) pode ser colocada na forma de uma função quadrática padrão na variável de decisão  $\tilde{\mathbf{u}}$ , juntamente com as seguintes definições:

$$J(\tilde{\mathbf{u}}|x(k), \tilde{y}_r^d(k), \mathbf{u}^d) := \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}^T H \tilde{\mathbf{u}} + [F_1 x(k) + F_2 \tilde{y}_r^d + F_3 \mathbf{u}^d]^T \tilde{\mathbf{u}} + Cte \quad (18)$$

$$H := 2 \sum_{i=1}^N [\Psi_i^T C_r^T Q_y C_r \Psi_i + (\Pi_i^{(n_u, N)})^T Q_u (\Pi_i^{(n_u, N)})] \quad (19)$$

$$F_1 := 2 \sum_{i=1}^N [\Psi_i^T C_r^T Q_y C_r \Phi_i] \quad (20)$$

$$F_2 := -2 \sum_{i=1}^N [\Psi_i^T C_r^T Q_y \Pi_i^{(n_r, N)}] \quad (21)$$

$$F_3 := 2 \sum_{i=1}^N [(\Pi_i^{(n_u, N)})^T Q_u] \quad (22)$$

O valor  $Cte$  na eq. (18) não envolve nenhum termo que possa ser influenciado pela escolha da sequência  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

Chamam-se saídas restritas as variáveis que possuem restrições a serem respeitadas. As restrições podem ser de três tipos: restrições de estados, variável de comando e variação da taxa de comando. Para sistemas LTI estas saídas são definidas através da matriz de restrições  $C_c$ , mais precisamente:

$$y_c := C_c x + D_c u \quad (23)$$

E deve obedecer a seguinte desigualdade  $y_c^{min} \leq y_c \leq y_c^{max}$ . Onde  $y_c^{min}, y_c^{max} \in \mathbb{R}^{n_c}$  são limites dados. Nota-se que devido ao horizonte de predição a desigualdade acima deve ser calculada para todos os instantes  $k + i$  para  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Isto é:

$$y_c^{min} \leq y_c(k + i) = C_c x(k + i) + D_c u(k + i - 1) \leq y_c^{max} \quad (24)$$

Que pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} +C_c \Psi_1 + D_c \Pi_1^{(n_u, N)} \\ \vdots \\ +C_c \Psi_N + D_c \Pi_N^{(n_u, N)} \\ -C_c \Psi_1 - D_c \Pi_1^{(n_u, N)} \\ \vdots \\ -C_c \Psi_N - D_c \Pi_N^{(n_u, N)} \end{pmatrix} \tilde{u} \leq \begin{pmatrix} -C_c \Phi_1 \\ \vdots \\ -C_c \Phi_N \\ +C_c \Phi_1 \\ \vdots \\ +C_c \Phi_N \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} +y_c^{max} \\ \vdots \\ +y_c^{max} \\ -y_c^{min} \\ \vdots \\ -y_c^{min} \end{pmatrix} \quad (25)$$

O conjunto de restrições relacionadas a variação da variável de controle  $u$  pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \delta^{min} \leq u(k + i) - u(k + i - 1) \leq \delta^{max} \quad (26)$$

Que pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} +\mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\mathbb{I} & +\mathbb{I} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & -\mathbb{I} & +\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ +\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & +\mathbb{I} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \tilde{u} \leq \begin{pmatrix} +\mathbb{I} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} u(k - 1) + \begin{pmatrix} +\delta^{max} \\ +\delta^{max} \\ \vdots \\ +\delta^{max} \\ -\delta^{min} \\ -\delta^{min} \\ \vdots \\ -\delta^{min} \end{pmatrix} \quad (27)$$



Considerando as restrições de comando, ou seja, aquelas ligadas aos atuadores.

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad u^{min} \leq u(k+i+1) \leq u^{max} \quad (28)$$

Onde os vetores  $u^{min}, u^{max} \in \mathbb{R}^{n_u}$  são limites dados que dependem do atuador. A equação (28) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} u^{min} \\ \vdots \\ u^{max} \end{pmatrix} \leq \tilde{u} \leq \begin{pmatrix} u^{max} \\ \vdots \\ u^{max} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nn_u} \quad (29)$$

Para completo desenvolvimento do controlador preditivo linear é necessário obter a linearização da matriz A através do Jacobiano calculado em um ponto de operação  $(x_0, u_0)$  a ser definido. O jacobiano é definido como:

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{pmatrix} \quad (30)$$

O ponto operacional escolhido para o cálculo da matriz linear é aquele para pequenas excursões em torno da origem, ou seja, pequenas variações de ângulo, velocidade angular e aceleração. Este ponto de operação é o mesmo escolhido em (Gonzales, 2009). Calculando-se o jacobiano da eq. (8) no ponto de operação  $x_0 = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  e  $u_0 = (\dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_3) = (0, 0, 0)$ , logo a matriz A linearizada é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

## 4 RESULTADO DAS SIMULAÇÕES

Neste seção serão apresentados os resultados obtidos através das simulações para comparar a performance do controlador preditivo linear desenvolvido neste trabalho e o controlador LQR (Linear-Quadratic Regulator) proposto por (Gonzales, 2009). As simulações foram feitas no Simulink utilizando-se o *Matlab*<sup>®</sup> R2013a. O período de amostragem utilizado em todas as simulações foi de 100ms com um horizonte de predição  $N = 40$ . O problema de programação quadrática foi resolvido utilizando a função *quadprog* fornecida pelo Matlab.

Na simulações deseja-se ponderar as posições angulares  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  uma vez que são importantes para o controle de orientação da plataforma de testes de satélites. Os termos da matriz de penalização dos estados  $Q_y \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  são:  $n_r = 3$  e  $Q_y = \text{diag}(1 \times 10^9, 1 \times 10^9, 1 \times 10^9)$ . Os termos da matriz de penalização de comando  $Q_u \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ , uma vez que o sistema apresenta três entradas, são  $n_u = 3$  e  $Q_u = \mathbb{I}_{3 \times 3}$ . Restringindo-se apenas os estados  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ , a matriz de restrição  $C_c$  é dada por:

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

O conjunto de valores associados as restrições utilizadas nas simulações estão colocadas na tabela 1.

**Tabela 1: Restrições de estado e variáveis de comando.**

Parâmetros	Valores
$\theta_1(rad)$	$[-\frac{10\pi}{180}, +\frac{10\pi}{180}]$
$\theta_2(rad)$	$[-\frac{10\pi}{180}, +\frac{10\pi}{180}]$
$\theta_3(rad)$	$[-\frac{10\pi}{180}, +\frac{10\pi}{180}]$
$u(\frac{rad}{s^2})$	$[-1.5, +1.5]$
$\delta(\frac{rad}{s^3})$	$[-50, +50]$

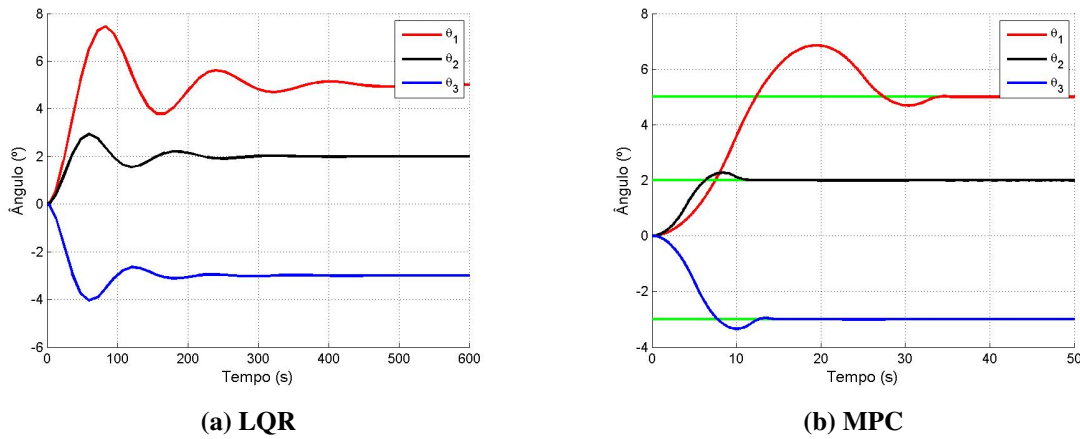
Os valores correspondentes as restrições de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  foram escolhidos de maneira que os ângulos não tenham grandes variações de amplitude, para que o controlador opere na faixa de linearização definida na seção anterior. Outra restrição que poderia ser tratada é aquela relacionada a própria bancada de testes que não permite rotações superiores a 90° em relação aos eixos  $i_2$  e  $i_1$ . As restrições dos atuadores  $u^{min}$  e  $u^{max}$  delimitam o intervalo de acelerações as quais as rodas de reação podem fornecer. Os parâmetros  $\delta^{min}$  e  $\delta^{max}$  limitam a variação da variável de comando  $u$  em relação ao tempo. As restrições dos atuadores e a taxa de variação dos atuadores são iguais para as três rodas de reação.

Os momentos de inércia da plataforma e das rodas de reação estão indicados na tabela (2).

**Tabela 2: Momentos de Inércia**

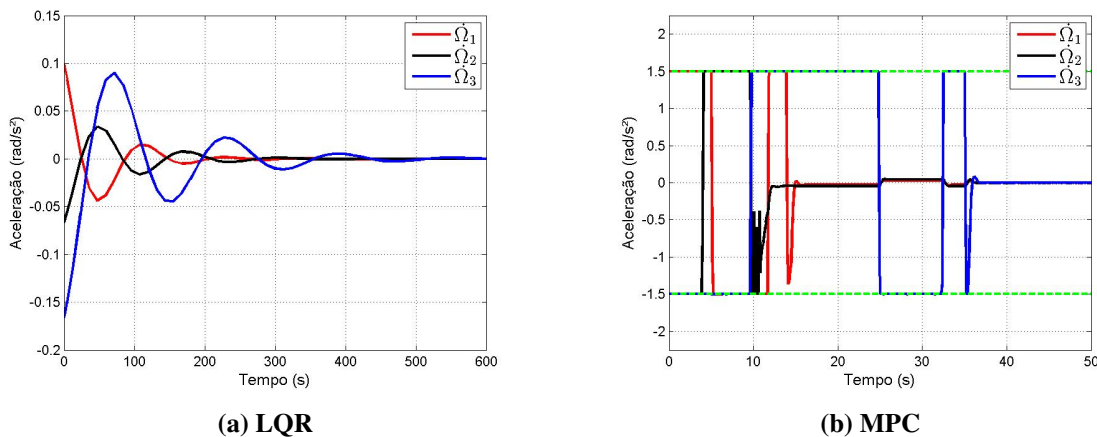
Parâmetros	Valor
$I_{11}(Kg.m^2)$	1.17
$I_{22}(Kg.m^2)$	1.17
$I_{33}(Kg.m^2)$	2.13
$I_{\omega}(Kg.m^2)$	$1.8 \times 10^{-3}$

O cenário utilizado nas simulações corresponde a entradas de referência para pequenos ângulos, para que os controladores operem na faixa linear. Os gráficos serão apresentados lado a lado para efeito comparativo. A primeira simulação realizada irá fornecer como entrada ao sistema uma entrada degrau para os seguintes valores de ângulos  $\theta_1 = 5^\circ$ ,  $\theta_2 = 2^\circ$ ,  $\theta_3 = -3^\circ$ . Na fig. 2 tem-se a resposta dos ângulos de euler.



**Figura 2: Evolução dos ângulos de euler para pequenos ângulos.**

Na fig. 3 a resposta das acelerações para entradas degrau.



**Figura 3: Evolução das acelerações para pequenos ângulos.**

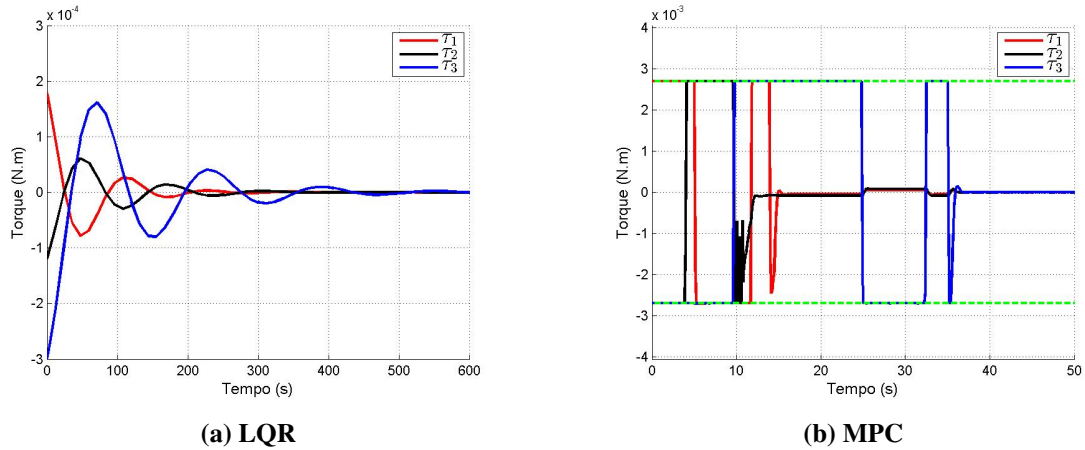


Figura 4: Evolução dos torques para pequenos ângulos.

Na fig. 4 o valor dos torques fornecidos pelas rodas de reação. Os valores máximos e mínimos de torque, utilizados pelo controlador preditivo, foram obtidos através da seguinte relação  $\tau_i = I_w \dot{\Omega}_i$ . Considerando os valores máximo e mínimo da aceleração das rodas de reação  $u^{max} = 1.5 \frac{rad}{s^2}$  e  $u^{min} = -1.5 \frac{rad}{s^2}$  respectivamente, temos que o valor do torque máximo é  $\tau^{max} = 2.7 \times 10^{-3} N.m$  e o torque mínimo  $\tau^{min} = -2.7 \times 10^{-3} N.m$ .

Outro cenário a ser analisado é aquele correspondente a aplicação de uma entrada degrau filtrada  $y_i(t)$ , com o seguinte formato:

$$y_i(t) = \theta_i(1 - e^{-Kt}) \quad (33)$$

Onde  $\theta_i$  é a amplitude da referência correspondente a entrada degrau e  $K$  uma constante que define a taxa de variação da exponencial. As simulações aqui desenvolvidas utilizam  $K = \frac{1}{5}$ . Os valores de  $\theta_i$  são 5, 2 e  $-3$  para os ângulos de euler  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  respectivamente.

O objetivo desta simulação é obter uma melhor performance na resposta do sistema utilizando o controlador preditivo, modificando-se apenas o formato do sinal de entrada. Na fig. 5 tem-se a resposta dos ângulos de euler e acelerações para entrada degrau filtrada.

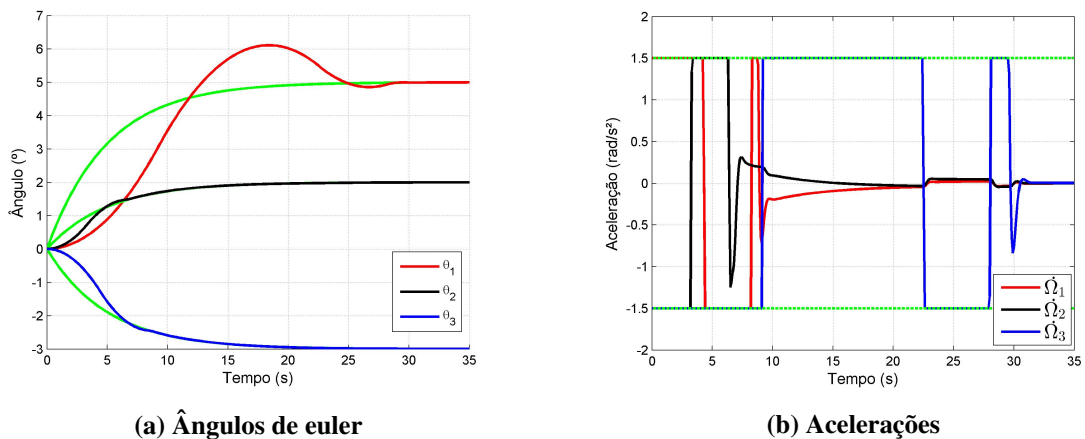


Figura 5: Evolução dos ângulos de euler e acelerações para degrau filtrado.

Na fig. 6 a resposta relativa aos torques gerados pelo sistema com entradas degrau filtradas.

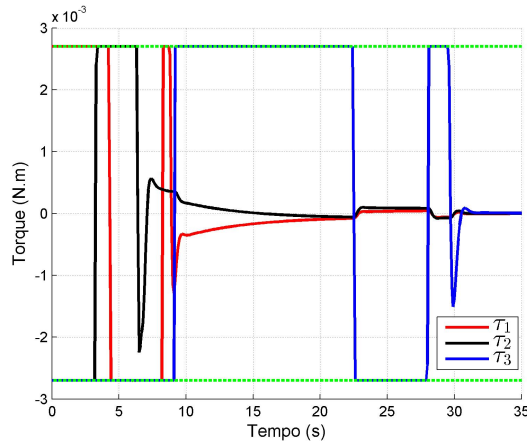


Figura 6: Evolução dos torques para degrau filtrado.

#### 4.1 Análise Comparativa

A tabela (3) apresenta uma comparação quantitativa entre os dois controladores desenvolvidos.

Tabela 3: Comparação entre controladores

Características	MPC	LQR
Overshoot ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) (%)	(37, 13.5, 14)	(49.2, 47, 35)
Tempo de Assentamento ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) (s)	(36, 12, 15)	(700, 370, 450)
Aceleração máxima ( $\frac{rad}{s^2}$ )	1.5	0.1
Aceleração mínima ( $\frac{rad}{s^2}$ )	-1.5	-0.17
Torque máximo (N.m)	$2.70 \times 10^{-3}$	$2.13 \times 10^{-3}$
Torque mínimo (N.m)	$-2.70 \times 10^{-3}$	$-3 \times 10^{-3}$

Da tabela pode-se inferir que o tempo de assentamento e o overshoot para os ângulos de euler com o controlador preditivo é inferior do que aquele obtido com o LQR. Os valores de torque estão próximos aos fornecidos pelo LQR. É importante destacar a capacidade do controlador preditivo lidar com as restrições impostas, permitindo uma maior flexibilidade na manipulação das variáveis de controle pertencentes ao modelo em estudo, característica essa que não pode ser alcançada diretamente com o LQR.

Na tabela (4) tem-se a comparação do controlador preditivo quando submetido a entrada degrau e a entrada degrau filtrada.

Tabela 4: Comparação entre a entrada degrau e entrada degrau filtrada

Características	DEGRAU	DEGRAU FILTRADO
Overshoot ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) (%)	(37, 13.5, 14)	(22.1, 0, 0)
Tempo de Assentamento ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) (s)	(36, 12, 15)	(30, 20, 20)
Aceleração máxima ( $\frac{rad}{s^2}$ )	1.5	1.5
Aceleração mínima ( $\frac{rad}{s^2}$ )	-1.5	-1.5
Torque máximo (N.m)	$2.70 \times 10^{-3}$	$2.70 \times 10^{-3}$
Torque mínimo (N.m)	$-2.70 \times 10^{-3}$	$-2.70 \times 10^{-3}$

As mudanças ocasionadas pela entrada degrau filtrada impactam diretamente no valor relacionado ao overshoot e tempo de assentamento. Pode-se perceber a diminuição do overshoot para os três ângulos de euler. O tempo de assentamento para o ângulo  $\theta_1$  foi reduzido, mas para os outros ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  o tempo aumentou. Percebe-se que houve uma melhora na resposta dinâmica do sistema, pois, apesar de um aumento de 8s e 5s no tempo de assentamento para os ângulos de  $\theta_2$  e  $\theta_3$  respectivamente, o valor de overshoot para os três ângulos foi reduzido, indo para zero no caso de  $\theta_2$  e  $\theta_3$ .

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado o projeto de um controlador preditivo baseado em modelos para uma plataforma de testes de satélites proposto por (Gonzales, 2009). A metodologia empregada foi a obtenção do controlador preditivo linear sendo aplicado ao modelo não linear da plataforma de testes. Para provar sua eficiência seus resultados foram comparados com outro controlador já existente. Com os resultados obtidos é possível perceber para entrada de pequenos ângulos de referência próximas do ponto onde o controlador preditivo foi linearizado ele consegue convergir e lidar com as restrições de maneira satisfatória. Sugestões para trabalhos futuros incluem a parametrização do controlador atual, desenvolvimento de um controlador preditivo não linear, desenvolvimento de um sistema hardware in the loop (HIL) para testar as leis de controle e introduzir o modelo dinâmico das rodas de reação ao modelo da plataforma de testes.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

## REFERÊNCIAS

- Alamir, M., 2013. A Pragmatic Story of Model Predictive Control: A Self-Contained Algorithms and Case-Studies. *CNRS - University of Grenoble*.
- Bai, X., Hagel, P., Wu, X., Xiao, S., 2012. *Control Conference (CCC)*, pp. 4085-4090.

- Camacho, E. F., Bordons, C., 1999. Model Predictive Control. *Springer-Verlag, London*.
- Chen, X., Wu, X., 2010. Model Predictive Control of Cube Satellite With Magneto-torquers. *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference On Information and Automation*, pp. 997-1002.
- Gonzales, R. G., 2009. *Utilização dos Métodos SDRE e Filtro de Kalman para o Controle de Atitude de Simuladores de Satélites*. Msc Thesis, Instituto de Pesquisa Espaciais (INPE).
- Guan, P., Liu, X. J., Liu, J. Z., 2005. Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Flexible Satellite. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 18, n. 4, pp. 451-459.
- Han, X. D., Bo, C. M., Zhang, D. F., 2011. Robust Control Based on LMI for Satellite Attitude Control Systems *Journal of ShangHai JiaoTong University*, vol. 45, pp. 1146-1150.
- Hegrenaes, O., Gravdahl, J. T, TØndel, P., 2005. Spacecraft Attitude Control Using Explicit Model Predictive Control. *Automatica*, vol. 41, n. 12, pp. 2107-2114.
- Hughes, P., C., 1980. Spacecraft attitude dynamics. *John Wiley & Sons, London*.
- Li, L., Yang, J., Liu, H., 2014. Robust Attitude Control for Flexible Satellite During Orbit Maneuver. *Proceeding of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, pp. 2531-2536.
- Lin, T.Y, Juang J.C., 2014. Design and Verification of the Operating Procedure of Attitude Determination and Control Subsystem of a Nanosatellite. *Automatic Control Conference (CACs), CACS International*, pp. 51-56.
- Lo, S., Chen Y., 1995. Smooth Sliding-Mode Control for Spacecraft Attitude Tracking Maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 18(6), pp. 1345-1349.
- Pirouzmand, F., Ghahramani, N. O., 2013. Robust Model Predictive Control Based on MRAS for Satellite Attitude Control System; *3rd International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA)*, pp. 53-58.
- Richards, A. G., 2004. *Robust Constrained Model Predictive Control*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Simon, D., 2014. *Model Predictive Control in Flight Control Design*. Licentiate Thesis, Linköping University.
- Tsiotras, P., Kriengsiri, P., Velenis, E., Kim, B., 2003. *IEEE Control Systems*, vol. 23, n. 4, pp. 26-37.
- Votel, R., Sinclair, D., 2012. Comparison of Control Moment Gyros and Reaction Wheels for Small Earth-Observing Satellites. *Proceedings of the AIAA/USU Conference on Small Satellites*, Advanced Technologies III, SSC12-X-1.
- Xiao, B., Hu, Q., L., Ma, G., F., 2011. Adaptive L-Two-gain Controller for Flexible Spacecraft Attitude Tracking.