



## CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO PARA SATÉLITES COM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

**Pedro J. D. Peixoto**

pjorgededeus@gmail.com

Universidade de Brasília Campus Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília - DF, Brasil

**André Murilo**

andremurilo@unb.br

Universidade de Brasília Campus Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília - DF, Brasil

**Luiz C. G. Souza**

lcgadelha@gmail.com

Universidade de Brasília Campus Darcy Ribeiro, 70910-900, Brasília - DF, Brasil

**Resumo.** *O controle de atitude de satélites é extremamente importante para garantir o seu desempenho de operação e atender aos requisitos de funcionamento em missões espaciais. A presença de estruturas flexíveis em satélites, tais como antenas ou painéis solares, implica no desenvolvimento de sistemas de controle com alta performance e robustez no intuito de reduzir as indesejáveis vibrações e deflexões que são geradas em função de manobras no espaço. Tais manobras, se executadas de forma incorreta, podem excitar modos de vibração, prejudicando o controle de orientação. Além disso, o projeto do controlador deve levar em consideração as diversas restrições dos atuadores e variáveis de estado do satélite, mantendo as condições operacionais em regime ótimo de funcionamento. Neste contexto, foi desenvolvido um controlador preditivo baseado em modelo (MPC) para o controle de atitude em satélites que possuem estruturas flexíveis. O controlador proposto foi discretizado e desenvolvido baseado no sistema linearizado da planta, e calcula, a cada instante de amostragem, uma solução ótima para o problema de controle, considerando, na formulação da estratégia, as saturações dos atuadores e limitações nas variáveis de estado do satélite. Os resultados de simulação mostram a eficiência do método de controle empregado e são comparados com o regulador linear quadrático (LQR).*

**Palavras-chave:** *Satélites rígido-flexíveis, Controle preditivo baseado em modelo (MPC), Controle de atitude*

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a humanidade vem presenciando uma revolução na capacidade de comunicação, devido ao desenvolvimento tecnológico. Nesse contexto, os satélites artificiais têm sido protagonistas, tornando possível a comunicação de dados quase instantânea entre duas pessoas em lados opostos do planeta, uma possibilidade inimaginável há algumas décadas.

Entre os benefícios que os satélites proporcionam em termos de comunicação, pode-se incluir a utilização da *internet*, dos *smartphones*, do *Global Positioning System* (GPS), das redes sociais e mensagens de voz ou videoconferências a longa distância.

Visto a importância de se manter um avanço nas telecomunicações, a indústria aeroespacial, no Brasil e no mundo, vem investindo em pesquisas de desenvolvimento de satélites cada vez mais eficientes.

Como os satélites devem funcionar em um ambiente bastante peculiar (o espaço), é natural que surjam dificuldades e problemas específicos em seu projeto. Além disso, são várias, as fases pelas quais um satélite passa, desde sua saída da Terra até o posicionamento na órbita desejada. Entre essas fases, coloca-se especial atenção na fase de controle de atitude do satélite.

O controle de atitude, basicamente, trata de estabelecer, relativamente à Terra, a posição e os ângulos de orientação de um satélite em relação aos três eixos principais. Os movimentos de rotação do satélite em relação a esses eixos são comumente conhecidos como arfagem, rolagem e guinada.

Existem diversas técnicas de controle possíveis de serem utilizadas no problema de controle de atitude de satélites. Entre essas técnicas, mostram-se interessantes aquelas que utilizam teoria de controle preditivo baseado em modelo (MPC), pois estas levam em consideração, no projeto, as restrições inerentes ao modelo a ser controlado, ou aos atuadores do sistema. Tais restrições são facilmente implementadas usando-se controle preditivo. Diversos trabalhos têm sido realizados na área de controle, utilizando técnicas de controle preditivo, potencialmente em aplicações aeroespaciais, mostrando a relevância desta técnica para esse campo de atuação.

Mayne et al. (2000) afirmam que o grande propósito do controle MPC é controlar plantas onde a implementação de um controle *off-line* é muito complicada, particularmente devido a restrições inerentes ao processo. Restrições estão presentes em quase todo tipo de processo, como, por exemplo, limite de força em atuadores e limites de segurança para temperaturas e velocidades.

Hegrenæs et al. (2009) utilizaram a técnica do MPC para controlar a atitude de um micro satélite. O satélite utilizado foi o SSETI/ESEO da *European Space Agency* (ESA), e os resultados foram exibidos em termos de simulações.

Uma abordagem utilizando MPC foi também utilizada por Xing et al. (2012) para controlar a atitude de um satélite. Os autores do trabalho utilizaram uma solução híbrida para os dispositivos atuadores do sistema: uma combinação de rodas de reação e atuadores magnéticos de torque, para, caso um atuador falhasse, o outro continuasse atuando, e o processo continuaria sendo devidamente controlado. Simulações foram realizadas com o modelo de controle proposto, o que comprovou bom desempenho do controlador.

Alguns trabalhos também mostram a utilidade de controladores baseados na técnica de controle preditivo para modelos não-lineares, NMPC.

Murilo et al. (2011) realizaram um trabalho em que projetam um controlador NMPC *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO) para controlar a emissão de gases poluentes de um motor a Diesel para veículos automotivos através do monitoramento de válvulas na passagem de ar do motor. Apesar de o trabalho não ter tido uma abordagem aeroespacial, ele ilustra muito bem a aplicação e o desempenho de controladores NMPC. O controlador foi testado em um motor real, mostrando a vantagem da técnica NMPC para controle em tempo real de uma planta não-linear, considerando as restrições do sistema.

Outro trabalho utilizando NMPC foi realizado por Cao e Chen (2014), desta vez aplicado a satélites. Com a motivação de que o uso de atuadores do tipo magneto-torquer, para controle de atitude de satélites, envolve fortes não-linearidades e variabilidade na dinâmica do sistema, os autores propõem um controlador NMPC. Uma abordagem interessante utilizada nesse trabalho é a utilização de tempos de amostragem variáveis na lei de controle. Isso permitiu uma melhor performance do controle utilizado e menos esforço computacional, fazendo a frequência de amostragem ser alta quando o satélite está longe da posição desejada, e baixa quando o mesmo está próximo dela. Simulação não-linear foi realizada comprovando a eficácia do controlador proposto.

Chegeni et al. (2014) realizaram um trabalho em que utilizam a técnica *Generalized Incremental Predictive Control* (GIPC) para controlar a atitude de um satélite. A técnica implementada foi testada e comparada com a técnica de *Generalized Predictive Control* (GPC), constatando que a primeira possui melhor desempenho que a segunda. No estudo, os autores utilizaram um modulador *Pulse-Width Pulse-Frequency* (PWPF) para modular o sinal de comando de torque, evitando, assim, não-linearidades na lei de controle.

Sendo um método bastante sistemático, facilmente solucionável com ferramentas computacionais, o *Linear Quadratic Regulator* (LQR), também tem sido bastante usado por pesquisadores para controlar atitude de satélites. Segundo Alamir (2013), o LQR é um caso particular de controle preditivo baseado em modelo que segue essas duas condições: não há restrições para as variáveis do problema, e o horizonte de predição é infinito.

Um estudo interessante, realizado por Kukreti et al. (2015), utiliza a técnica do LQR para controlar, através de atuadores magnéticos, a atitude de um Cubesat, que é um satélite em formato cúbico, geralmente com dimensões reduzidas, útil em missões de pequena escala. Kukreti et al. (2015) projetaram três tipos de controladores diferentes para posterior comparação de desempenho. Os controladores usados foram: controlador LQR, controlador proporcional-derivativo (PD) e uma variação do LQR, chamada de LQR genético. Algoritmos genéticos, como o utilizado nesse estudo, utilizam uma abordagem heurística na resolução de problemas de otimização de parâmetros. Os autores concluem, através de simulações, que os controladores LQR e PD obtêm respostas muito similares. Por outro lado, o controlador LQR genético implementado demonstrou um desempenho superior aos outros dois, exibindo maior robustez.

O controle LQR pode ser usado também em aplicações não-espaciais. É muito comum sua utilização em aeronaves também. O trabalho de Liu et al. (2013), por exemplo, propõe um controle de atitude para um helicóptero ao realizar manobras agressivas. Para controlar os três graus de liberdade da aeronave de asas rotativas, os autores implementaram uma arquitetura de controle robusto composta por um controlador *feedforward*, um controlador LQR e um controlador robusto. Tal arranjo é utilizado para melhorar o erro provocado por aproximações lineares no modelo e para minimizar os efeitos de não-linearidades do sistema e perturbações

externas. Os autores realizaram testes experimentais, além das simulações, comprovando que o controlador projetado funciona com a robustez desejada.

Souza et al. (2015) realizaram um trabalho em que estudam o problema de controle de orientação de satélites com estruturas flexíveis no espaço, tais como antenas ou painéis solares em satélites. Utilizando dois modelos matemáticos para o sistema (modelo massa-mola e modelo dos modos assumidos), a termos de comparação, Souza et al. (2015) projetaram um controlador LQR e realizaram simulações com o controlador projetado. A conclusão a que chega o trabalho é de que o controlador LQR projetado possui melhor performance com o modelo matemático dos modos assumidos.

Utilizando os mesmos modelos e protótipo de satélite com estrutura flexível que Souza et al. (2015) utilizaram, Castro et al. (2009) realizam um trabalho de controle de atitude utilizando duas técnicas: LQR e filtro  $H_\infty$ . As simulações realizadas atestam que o filtro  $H_\infty$  resulta em melhores resultados que aqueles mostrados com a técnica LQR.

Como mostram também os trabalhos de Gervini et al. (2003) e Ortiz et al. (2015), o estudo da dinâmica de estruturas flexíveis em missões espaciais é importante, pois elas podem sofrer oscilações indesejadas quando o satélite realiza grandes manobras, podendo atrapalhar ou mesmo inviabilizar o correto funcionamento do mesmo.

O presente artigo pretende utilizar os mesmos modelos de satélite utilizados por Castro et al. (2009) e Souza et al. (2015), para um satélite com estrutura flexível, numa malha de controle que utiliza uma rotina de controle MPC, e então verificar as vantagens de se utilizar este método em comparação com os utilizados por aqueles autores, levando-se em conta as restrições que os modelos apresentam.

O restante do presente trabalho está organizado em seções da seguinte maneira: os modelos de satélite rígido-flexível utilizados para realizar as simulações deste trabalho serão mostrados na seção 2, divididas por subitens. Os subitens 2.1 e 2.2 mostrarão o modelo massa-mola e o modelo dos modos assumidos, respectivamente. Na seção 3, serão apresentados os fundamentos básicos da técnica de controle preditivo baseado em modelo. Na seção 4, dividida em subitens, serão mostrados os resultados das simulações realizadas. Os subitens 4.1 e 4.2 apresentarão os resultados para o modelo massa-mola e para o modelo dos modos assumidos, respectivamente. Por fim, a seção 5 apresentará as conclusões do artigo.

## 2 MODELOS DE SATÉLITE COM ESTRUTURA FLEXÍVEL

O satélite utilizado nas simulações apresentadas neste artigo é um protótipo simples composto de um corpo rígido cilíndrico e de um braço flexível, segundo mostra a Fig. 1.

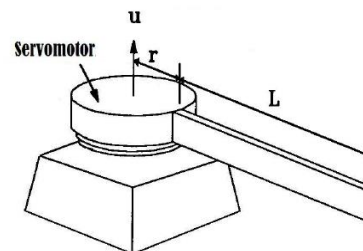


Figura 1. Protótipo de satélite rígido-flexível. (CASTRO et al., 2009)

Como pode-se perceber na Fig. 1, uma tensão  $u$  é aplicada a um motor para posicionar a parte rígida, de raio  $r$ , de acordo com a missão desejada. O braço flexível, de comprimento  $L$ , é então levado juntamente com a parte rígida. Entretanto, oscilações da estrutura flexível acontecem inevitavelmente, o que pode tornar a missão do satélite impraticável.

Um modelo que caracterize bem a dinâmica do satélite é fundamental para o projeto de um controlador eficiente e que seja condizente com a realidade, ao se fazer simulações para controle de atitude.

Neste artigo, serão utilizados dois modelos de dinâmica para o satélite rígido-flexível: o modelo massa-mola e o modelo dos modos assumidos. Ambos os modelos foram apresentados e desenvolvidos por Castro et al. (2009). Apesar de ambos representarem o mesmo sistema, o modelo massa-mola, por ser mais simples, apresenta uma dinâmica menos realista que o modelo dos modos assumidos, o qual leva em consideração os modos de vibração da estrutura flexível.

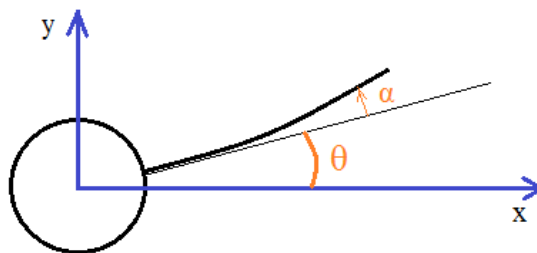
É importante ressaltar que ambos os modelos são lineares, não representando, assim, as não-linearidades envolvidas na dinâmica de um satélite real.

Os modelos utilizados neste trabalho envolvem quatro variáveis medidas no sistema: o deslocamento rígido  $\theta$ , o deslocamento flexível  $\alpha$  e suas respectivas derivadas no tempo, como mostra a Eq. (1), formando assim um sistema de dimensão 4.

$$x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T \quad (1)$$

A Eq. (1) mostra o que se chama de vetor de estados, pois possui as informações do estado do sistema a cada instante de tempo.

A Fig. 2 a seguir ilustra os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$  no protótipo do satélite. Esses dois estados são os mais importantes ao se fazer controle da atitude do satélite, pois não há interesse em controlar as velocidades de rotação do satélite, mas apenas seu posicionamento angular. Dessa forma, os demais estados não serão monitorados durante as simulações, apesar de fazerem parte da dinâmica do sistema.



**Figura 2. Vista superior do satélite mostrando os deslocamentos rígido ( $\theta$ ) e flexível ( $\alpha$ )**

Na Fig. 2, o apêndice em cor preta representa o braço flexível do satélite, que possui um deslocamento angular  $\alpha$  em relação ao posicionamento angular  $\theta$ , o qual é medido relativamente ao semi-eixo positivo das abscissas. Quando o satélite gira de um ângulo  $\theta$ , a haste flexível desloca-se de um ângulo  $\alpha$ , fazendo com que o deslocamento total seja na verdade uma soma dos ângulos  $\theta$  e  $\alpha$ .

Os modelos serão apresentados no espaço de estados, da forma mostrada na Eq. (2), onde  $x$  representa o vetor de estados,  $u$  representa a variável de comando, e  $A$  e  $B$ , as matrizes da

dinâmica do sistema. Para o sistema analisado,  $A$ , a matriz de estado do sistema, é quadrada de ordem 4, e  $B$ , a matriz de entrada, possui 4 linhas e 1 coluna.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

A seguir serão apresentados mais detalhadamente os dois modelos que serão utilizados nas simulações.

## 2.1 Modelo massa-mola

Esse modelo considera o satélite como dois corpos acoplados entre si por uma mola de torção, semelhante a um sistema massa-mola-massa rotativo. Um dos corpos representa a parte rígida do satélite, e o outro representa a parte flexível, cada um com seus respectivos momentos de inércia. A mola implementa então os movimentos de vibração da estrutura flexível em relação à parte rígida (CASTRO et al., 2009).

Sendo  $J_{ap}$  o momento de inércia do apêndice flexível e  $K_{mola}$  a constante elástica da mola, pode-se escrever a equação do movimento do apêndice em relação ao corpo do satélite, como na Eq. (3), onde o ângulo  $\alpha$  obedece à relação mostrada na Eq. (4) para pequenas oscilações.

$$J_{ap}\ddot{\alpha} + K_{mola}\alpha = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\alpha} = -\omega_c^2\alpha \quad (4)$$

Na Eq. (4),  $\omega_c$  é a frequência natural de oscilação do apêndice flexível. Juntando as expressões das Eq. (3) e (4), chega-se à expressão para a constante elástica da mola, dada pela Eq. (5).

$$K_{mola} = \omega_c^2 J_{ap} \quad (5)$$

O momento de inércia da haste flexível pode ser calculado como o de uma barra de massa  $M$  e comprimento  $L$  girando em torno de uma de suas extremidades, segundo a Eq. (6).

$$J_{ap} = \frac{ML^2}{3} \quad (6)$$

Para obter as equações que definem a dinâmica do sistema, Castro et al. (2009) utilizam teoria de mecânica lagrangeana. A função Lagrangeana  $L(\alpha, \theta)$  para o sistema em questão é mostrada na Eq. (7).

$$L(\alpha, \theta) = E_c - E_p = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{ap} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2} K_{mola} \alpha^2 \quad (7)$$

Na Eq. (7),  $E_c$  e  $E_p$  representam as energias cinética e potencial do sistema, respectivamente. Ainda nessa equação,  $J_{eq}$  representa o momento de inércia equivalente do satélite, incluindo o braço flexível.

Aplica-se então as equações de Euler-Lagrange para as coordenadas generalizadas  $\alpha$  e  $\theta$ , segundo as Eq. (8) e (9), onde  $B_{eq}$  representa o amortecimento do sistema, e  $\tau_m$ , o torque externo aplicado pelo motor.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_m - B_{eq} \dot{\theta} \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (9)$$

As equações resultantes para o modelo em discussão estão mostradas nas Eq. (10) e (11) a seguir.

$$J_{eq} \ddot{\theta} + J_{ap} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = \tau_m - B_{eq} \dot{\theta} \quad (10)$$

$$J_{ap} (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_{mola} \alpha = 0 \quad (11)$$

O torque fornecido pelo motor,  $\tau_m$ , pode ser modelado pela Eq. (12), que envolve parâmetros intrínsecos ao motor utilizado para movimentar o satélite.

$$\tau_m = \frac{\eta_m \eta_g k_t k_g (V_m - k_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (12)$$

Na Eq. (12), segundo Castro et al. (2009), “ $\eta_m$  e  $\eta_g$  são as eficiências do motor e das engrenagens, respectivamente;  $k_t$  é a constante de torque do motor;  $k_g$  é a razão de transmissão da caixa de engrenagens somada à razão de transmissão das engrenagens externas;  $V_m$  a tensão de alimentação do motor;  $k_m$  a constante de força contra-eletromotriz e  $R_m$  a resistência de armadura do motor.”

A tensão de entrada,  $V_m$ , do motor que movimenta o braço flexível do satélite será considerada a variável de comando  $u$  do sistema, como mostrado na Eq. (2).

As Eq. (10), (11) e (12) formam então as equações que definem a dinâmica do sistema, e que serão utilizadas para realizar as simulações deste trabalho.

## 2.2 Modelo dos modos assumidos

O método dos modos assumidos é uma representação mais fidedigna do satélite em questão, pois implementa, em seu desenvolvimento, os modos de vibração da estrutura flexível, o que não acontece com o modelo massa-mola.

O desenvolvimento do modelo dos modos assumidos, feito por Castro et al. (2009), é mais complexo que aquele desenvolvido para o modelo massa-mola. Não cabe no escopo do presente artigo mostrar o desenvolvimento detalhado deste modelo, porém serão mostradas as principais equações para se chegar ao modelo final.

Para utilizar as equações de Lagrange, são encontradas primeiramente as expressões das energias cinética,  $E_c$ , e potencial,  $E_p$ , do sistema, mostradas nas Eq. (13) e (14).

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left( J_{cr} + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (r+x)^2 dx \right) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{y}^2 dx + \dot{\theta} \left( \int_0^L \rho y (r+x) dx \right) \quad (13)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (14)$$

Na Eq. (13),  $J_{cr}$  representa o momento de inércia do corpo rígido do satélite,  $\rho$  representa a densidade linear do apêndice flexível,  $r$  representa o raio do corpo rígido,  $L$  representa o comprimento do apêndice flexível, e  $x$  e  $y$  são as coordenadas cartesianas retangulares. A Eq. (14) é obtida de acordo com o modelo de Euler-Bernoulli.

Segundo a teoria dos modos assumidos (Castro et al., 2009), os modos elásticos podem ser modelados pela Eq. (15).

$$y(t, x) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \phi_j(x) \quad (15)$$

Na Eq. (15),  $q_j(t)$  representa a  $j$ -ésima coordenada generalizada,  $N$  representa o número de modos de vibração, e  $\phi_j(x)$  representa a função de forma que modela o comportamento espacial do apêndice flexível, a qual está representada na Eq. (16).

$$\phi_j(x) = 1 - \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{j+1}\left(\frac{j\pi x}{L}\right)^2 \quad (16)$$

As energias potencial e cinética são então aplicadas às equações de Lagrange, de onde saem as equações diferenciais que representam o modelo final do sistema, mostrado como espaço de estados na Eq. (17).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}N \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}D \end{bmatrix} u \quad (17)$$

Na Eq. (17),  $0$  e  $I$  representam, respectivamente, a matriz nula e a matriz identidade de ordem 2. O vetor  $x$  representa o vetor de estados já mostrado na Eq. (1), e a variável de comando  $u$  representa a tensão de entrada do motor,  $V_m$ .

As matrizes  $M$ ,  $N$ ,  $K$  e  $D$  estão mostradas nas Eq. (18), (19), (20) e (21) a seguir.

$$M = \begin{bmatrix} \hat{J} & M_{\theta q}^T \\ M_{\theta q} & M_{qq} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$N = \begin{bmatrix} -C_m k_g + B_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{qq} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$D = \begin{bmatrix} C_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Nas equações acima, os valores representados por  $M_{\theta q}$ ,  $M_{qq}$ ,  $K_{qq}$ ,  $\hat{J}$  e  $C_m$  estão mostrados nas Eq. (22), (23), (24), (25) e (26).

$$[M_{\theta q}]_j = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(r+x) \phi_j(x) dx \quad (22)$$

$$[M_{qq}]_{jk} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \phi_j(x) \phi_k(x) dx \quad (23)$$

$$[K_{qq}]_{jk} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \phi_j''(x) \phi_k''(x) dx \quad (24)$$



$$\hat{J} = J_{cr} + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(r+x)^2 dx \quad (25)$$

$$C_m = \frac{\eta_m \eta_g k_r k_g}{R_m} \quad (26)$$

Nas Eq. (22), (23) e (24), os parâmetros  $j$  e  $k$  representam os índices de suas respectivas matrizes. Entretanto para o caso particular tratado, em que apenas um modo de vibração é analisado, tais matrizes são de ordem unitária.

Assim, obtém-se um sistema no espaço de estados que será utilizado nas simulações realizadas neste trabalho.

### 3 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO (MPC)

Segundo Mayne et al. (2000), a técnica do MPC é uma forma de controle na qual a ação atual de controle é obtida resolvendo-se em tempo real, a cada instante de tempo de amostragem, um problema de controle ótimo de malha aberta com horizonte finito, usando o estado atual da planta como o estado inicial. Em outras palavras, o algoritmo de controle preditivo baseado em modelo calcula o melhor sinal de controle para que o sistema siga o sinal de referência, dados os estados atuais da planta, sem desobedecer às restrições que os estados e as variáveis de comando possuem inerentemente.

É fundamental, para o uso do MPC, o conhecimento prévio de um modelo bem definido para a planta do sistema, seja ela linear ou não-linear. Os dois modelos utilizados no presente artigo, os quais foram mostrados na seção 2, são lineares e invariantes no tempo.

Utilizar MPC é bastante interessante em situações onde alguma variável do sistema a ser controlado possui restrições que devem ser obedecidas para a correta realização do procedimento desejado. Dependendo da aplicação, podem surgir diversas restrições na operação de um sistema, tais como, por exemplo, máximo torque fornecido por um motor, máxima tensão de saída de um gerador ou de entrada de um motor, posicionamento permitido somente em certa faixa de operação, pressão ótima de operação em câmaras de processos industriais, entre outras.

O algoritmo de controle preditivo calcula, a partir do estado atual e do sinal de referência, a melhor sequência de controle  $u$  que deve ser comunicada à planta do sistema para atingir a referência desejada, sendo obedecidas todas as restrições impostas às variáveis do sistema.

Para prever a melhor sequência de controle que deve ser tomada nos próximos  $N$  passos, o algoritmo utiliza também o sinal de referência  $N$  passos à frente. A esse valor  $N$ , dá-se o nome de horizonte de predição, e quanto maior ele for, mais otimizado o algoritmo de controle será, podendo atingir o caso limite em que  $N$  é infinito, o que transforma o problema de controle preditivo em um problema de LQR.

O método do MPC utiliza uma função custo  $J(u)$  que deve ser minimizada para calcular a melhor sequência de controle que o sistema deve seguir. A função escolhida, mostrada na Eq. (27), possui duas parcelas principais.

$$J(u) = \sum_{i=1}^N \|y_r(k+i) - y_r^d(k+i)\|_{Q_y}^2 + \sum_{i=1}^N \|u_i - u^d\|_{Q_u}^2 \quad (27)$$

A primeira parcela leva em conta a diferença entre os estados regulados  $y_r$  e o valor final  $y_r^d$ , o qual se deseja que os estados atinjam. Considera-se uma matriz de ponderação  $Q_y$  para esta parcela. Essa matriz define o grau de importância de cada estado ao se minimizar a função.

A segunda parcela da função custo considera a diferença entre a variável de comando  $u_i$  e o valor desejado que ela atinja,  $u^d$ . Também para esta parcela, utiliza-se uma matriz de ponderação,  $Q_u$ , que define o quanto as variáveis de comando são importantes ao se minimizar a função custo.

Na Eq. (27),  $N$  representa o horizonte de predição,  $n_u$  representa o número de variáveis de comando, e  $i$  representa o passo dentro do horizonte de predição.

É interessante observar que o algoritmo MPC trabalha com passos discretizados. Daí aparecer, na Eq. (27), a variável  $k$ , que representa o tempo no domínio discreto. Por isso, o modelo do sistema deve ser discretizado antes de enviar informações à rotina de controle.

A Fig. 3 mostra um esquema em diagrama de blocos representando os principais componentes de um sistema de controle em malha fechada utilizando um algoritmo MPC.

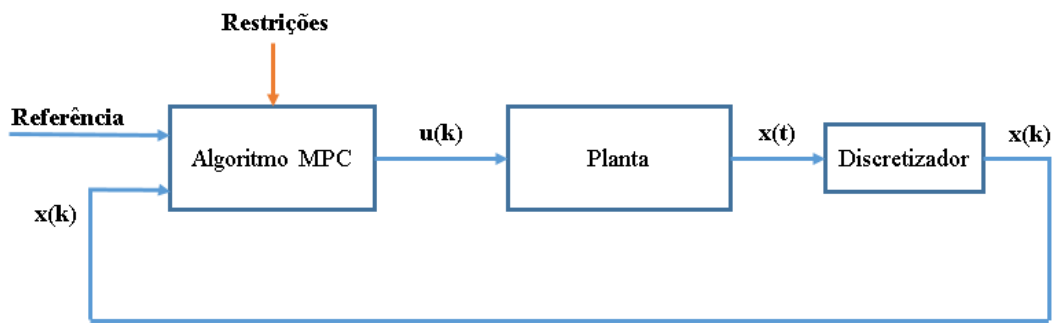


Figura 3. Malha de controle de um problema MPC

Na Fig. 3,  $u(k)$  representa a variável de comando,  $x(t)$  representa o vetor de estados do sistema no domínio contínuo, e  $x(k)$ , o vetor de estados do sistema no domínio discreto.

A Eq. (27) pode ser simplificada para a forma mostrada na Eq. (28). A minimização de  $J(u)$ , no entanto, está sujeita às restrições do problema, as quais estão modeladas pela Eq. (29).

$$J(u) = \frac{1}{2} u^T H u + [F_1 x(k) + F_2 y_r^d + F_3 u^d]^T u. \quad (28)$$

$$A_{ineq} u \leq G_1 x(k) + G_2 u(k-1) + G_3 \quad (29)$$

Na Eq. (28), a matriz  $H$ , chamada de matriz hessiana, deve ser positivo-definida para garantir que o problema tenha solução. As matrizes  $H$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  envolvem em seu cálculo as matrizes de ponderação  $Q_y$  e  $Q_u$ , que definem, a critério do projeto, quais variáveis devem ser priorizadas ao se minimizar a função custo. Ambas as matrizes de ponderação são unidimensionais para o sistema analisado neste artigo, pois apenas uma variável será regulada ( $\theta$ ), e há apenas uma variável de comando ( $V_m$ ).

O vetor  $u$  na Eq. (28) é  $N$ -dimensional, sendo  $N$  o horizonte de predição escolhido para o problema. Sendo assim, a rotina de otimização deve minimizar uma função custo dependente de  $N$  variáveis. Então, a complexidade do problema cresce com o aumento do horizonte de

predição. Essa complexidade pode ser diminuída aplicando uma parametrização adequada ao sistema, o que reduz o número de variáveis na função custo. Este trabalho não utiliza, entretanto, tal parametrização.

A Eq. (29) sintetiza em apenas uma inequação matricial, através das matrizes  $A_{ineq}$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ , todas as restrições que podem ser impostas ao problema, incluindo restrições nas variáveis de estado, e também nos atuadores do sistema. As Eq. (28) e (29) formam o que se chama de problema de programação quadrática.

Cada vez que a malha de controle é realizada, é encontrada uma sequência ótima de controle  $u$  para  $N$  passos à frente. Entretanto, apenas o primeiro dos  $N$  comandos de controle calculados é utilizado como entrada para a planta a cada iteração, o que permite que o sistema de controle seja capaz de contornar mudanças inesperadas no ambiente.

Para o satélite rígido-flexível em análise neste artigo, existem duas restrições importantes para seu funcionamento. A primeira delas é a restrição de amplitude do deslocamento flexível. Sem qualquer controle sobre essa variável, o braço flexível pode vibrar com amplitudes inconvenientemente altas para a realização de alguma manobra. Por isso, é interessante impor restrições para esta deflexão. A outra variável que pode ser problemática na operação do satélite é a variável de comando  $u$ , que representa a tensão de entrada do motor que opera o braço flexível. Este motor possui uma tensão máxima de entrada, pois ele não consegue fornecer torque ilimitado ao satélite.

As restrições mencionadas serão então analisadas através de simulações com controle preditivo.

## 4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, serão apresentados os resultados de simulação em Matlab/Simulink para o controle de atitude dos dois modelos propostos para o satélite rígido-flexível utilizando MPC.

Todas as simulações que serão apresentadas foram realizadas com um tempo total de simulação de cinco segundos. Além disso, os parâmetros utilizados nas rotinas de controle foram mantidos constantes para fins de comparação dos resultados. Tais parâmetros, como o horizonte de predição, as matrizes de ponderação e o tempo de amostragem utilizado para discretizar o modelo, estão mostrados na Tab. 1 a seguir.

**Tabela 1. Parâmetros usados para discretização e controle da planta**

Parâmetro	Nomenclatura	Valor
Horizonte de predição	$N$	20
Matriz de ponderação da variável regulada	$Q_y$	[100]
Matriz de ponderação da variável de controle	$Q_u$	[1]
Tempo de amostragem (s)	$\tau$	0.1

A malha de controle para o problema do satélite rígido-flexível foi criada utilizando a ferramenta Simulink do Matlab, como mostra o diagrama de blocos na Fig. 4.

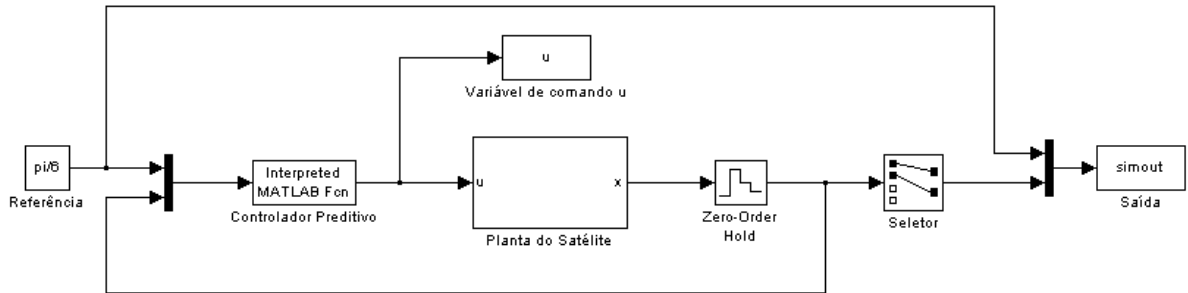


Figura 4. Malha de controle no Simulink

Na Fig. 4, a planta linear contínua do satélite está contida no bloco intitulado “Planta do Satélite”, o qual está mostrado mais detalhadamente na Fig. 5 a seguir. Tanto as equações que definem a planta, quanto as rotinas de controle são implementadas por linhas de código do Matlab.

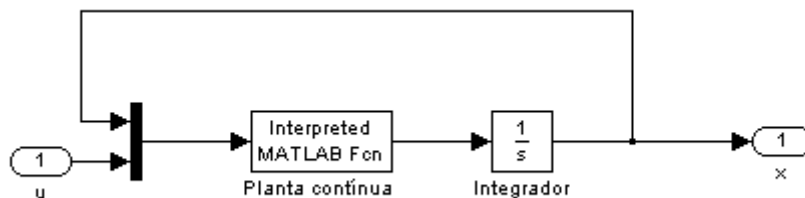


Figura 5. Planta Contínua do Satélite

Ainda na Fig. 4, pode-se perceber que o controlador recebe como entradas o sinal de referência e os quatro estados discretizados. Após calculado o comando ótimo  $u$ , o mesmo é enviado para a planta, a qual atualizará os estados.

Devido à natureza contínua da planta, é necessário colocar um segurador de ordem zero na saída da mesma, para que os estados cheguem discretizados na rotina de controle preditivo.

Nos tópicos a seguir, serão mostrados os resultados para cada um dos modelos utilizados.

#### 4.1 Resultados para o modelo massa-mola

O modelo massa-mola foi utilizado para realizar simulações em Matlab/Simulink com a rotina de controle preditivo. As equações dinâmicas para este modelo resultam no espaço de estados que está mostrado na Eq. (30).

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 591.9 & -31.9 & 0 \\ 0 & -947.2 & 31.9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 56.2 \\ -56.2 \end{bmatrix} u \quad (30)$$

As restrições impostas para as variáveis do modelo estão mostradas na Tab. 2.

Tabela 2. Restrições utilizadas no algoritmo MPC

Parâmetro	Nomenclatura	Restrição
Deslocamento flexível (graus)	$\alpha$	[-2, 2]
Tensão de entrada do motor (V)	u	[-24, 24]

Foi escolhido então que o braço flexível não deve oscilar com amplitude maior que  $2^\circ$ , e que a tensão de entrada do motor não deve ultrapassar 24V de amplitude, por limitação do próprio motor utilizado no protótipo do satélite.

Para excitar o sistema, utilizou-se uma referência com valor  $30^\circ$  para a variável de deslocamento rígido  $\theta$ . A ideia é verificar como o braço flexível se comporta ao se realizar uma manobra com o satélite, impostas as restrições da rotina de controle preditivo.

A Fig. 6 mostra o resultado da simulação com o modelo massa-mola.

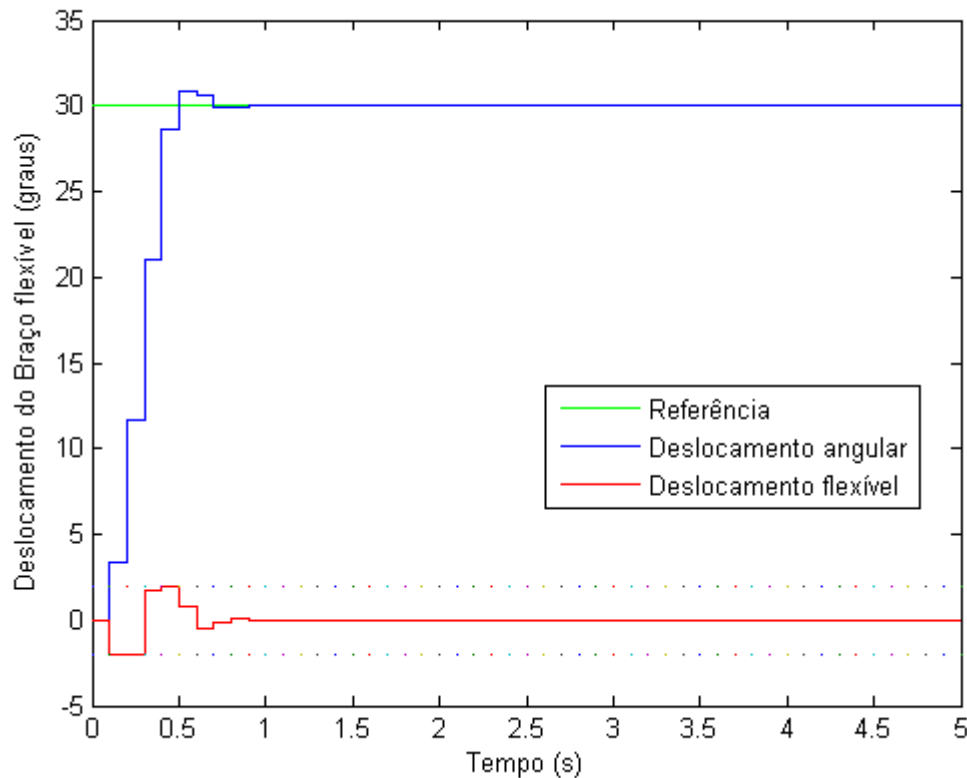


Figura 6. Resultado de simulação para o modelo massa-mola com sinal de referência de  $30^\circ$

No gráfico mostrado na Fig. 6, percebe-se que, ao se comandar um deslocamento de  $30^\circ$  para o ângulo  $\theta$ , o satélite acompanha a referência em menos de um segundo. A linha em vermelho demonstra as oscilações do braço flexível (ângulo  $\alpha$ ). Pode-se perceber que as oscilações não ultrapassam a linha pontilhada, a qual representa a restrição para o deslocamento flexível, em  $2^\circ$ .

A Fig. 7 a seguir mostra a evolução da variável de comando  $u$  durante a referida manobra. Como se percebe, a tensão de entrada do motor também não ultrapassa a restrição imposta de 24V, chegando a apenas pouco mais de 1.4V.

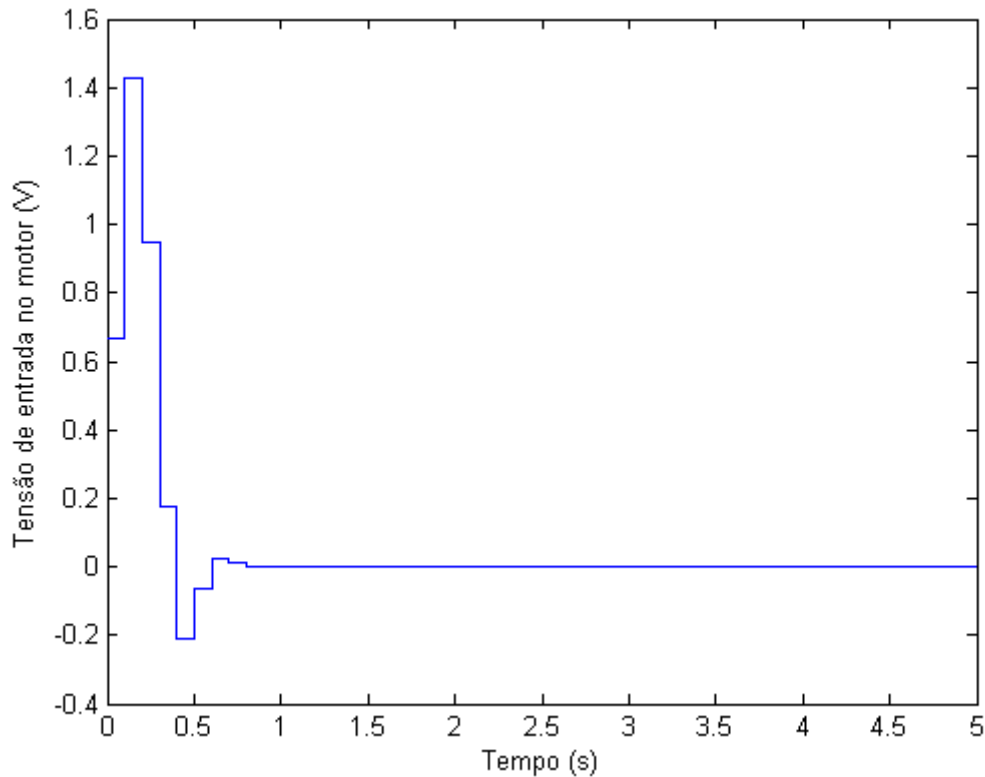


Figura 7. Evolução da variável de comando para o modelo massa-mola

Esses resultados mostram-se satisfatórios, se comparados àqueles obtidos por Castro et al. (2009), pois conseguiu-se reduzir a amplitude de oscilação do braço flexível a menos de  $2^\circ$ , sem muito esforço do atuador.

Com este mesmo modelo, utilizando um controlador LQR, Castro et al. (2009) obtiveram amplitude para o deslocamento flexível de mais de  $5^\circ$  para alguns casos, enquanto que a variável de comando chega a atingir valores acima de 10V, valor bem acima daquele obtido com o MPC.

Percebe-se que o método do MPC faz com que a variável de comando varie de tal forma que o movimento do braço flexível não sofra oscilações com amplitude considerável. O valor imposto para a restrição de amplitude de oscilação pode ser reduzido ainda mais, para  $1^\circ$ , por exemplo, caso seja necessário para a aplicação.

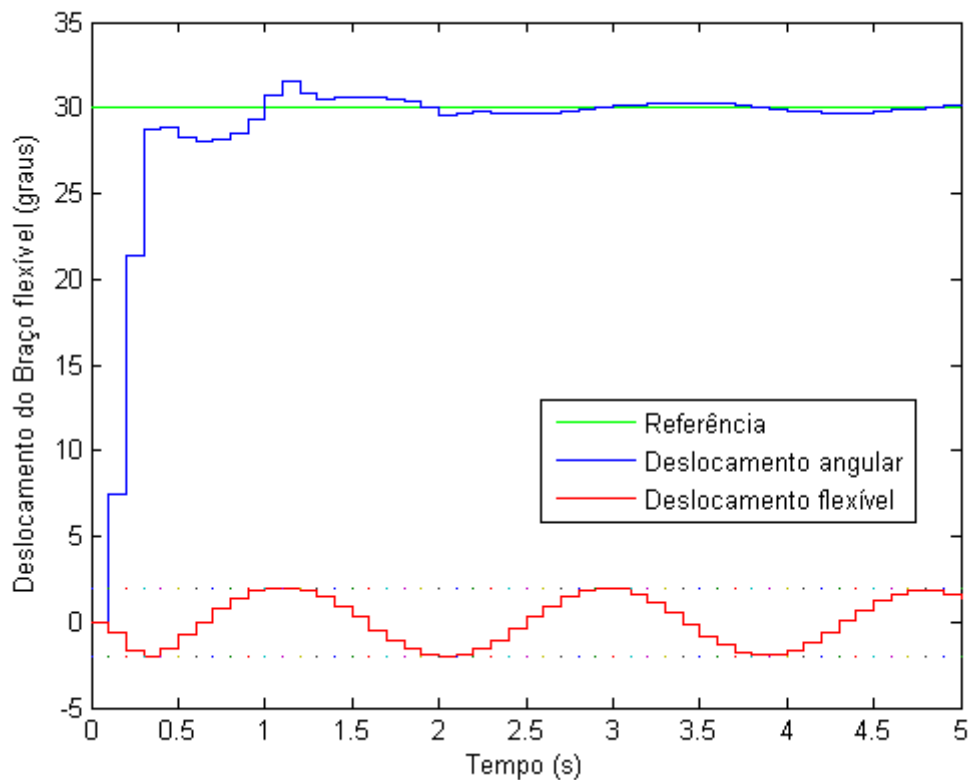
## 4.2 Resultados para o modelo dos modos assumidos

O modelo dos modos assumidos foi simulado em Matlab/Simulink com os mesmos parâmetros que o modelo massa-mola, também utilizando os diagramas de blocos das Fig. 4 e 5. As equações para este modelo resultam no espaço de estados mostrado na Eq. (31)

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 326.3 & -32.8 & 0 \\ 0 & -38.1 & 2.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 61.1 \\ -4.9 \end{bmatrix} V_m \quad (31)$$

Um sinal de referência do tipo degrau de 30° excita o sistema, o qual deve obedecer as restrições impostas às variáveis, mostradas na Tab. 2. O resultado da simulação está mostrado na Fig. 8.

É interessante notar, na Fig. 8, que a deflexão rígida (linha azul) não acompanha corretamente a referência, mas oscila em torno da mesma com amplitude muito pequena. Esse movimento oscilatório, o qual não é notado no modelo massa-mola, é devido aos modos de vibração considerados para este modelo. A linha pontilhada na Fig. 8 indica a restrição imposta para o deslocamento flexível (2°).



**Figura 8. Resultado de simulação para o modelo dos modos assumidos com sinal de referência de 30°**

Pode-se perceber, na Fig. 8, que o satélite acompanha a trajetória de referência, apresentando um sobressinal e um tempo de assentamento maiores que aqueles apresentados pelo modelo massa-mola. Apesar disso, o deslocamento flexível mantém-se dentro da restrição imposta, variando apenas no intervalo de - 2° a 2°.

É interessante notar que a dinâmica deste modelo faz com que o ângulo de deslocamento flexível oscile bem mais que com o modelo massa-mola. Isso acontece devido ao fato de que este modelo é mais realista e implementa, em sua formulação, os modos de vibração do braço flexível.

A evolução da variável de comando  $u$ , que representa a tensão de entrada do motor durante esta manobra, pode ser vista na Fig. 9.

Na Fig. 9, nota-se uma oscilação no valor do comando  $u$ , o que não se percebe com o modelo massa-mola. Tal oscilação acontece para controlar a oscilação do braço flexível inerente ao modelo dos modos assumidos.

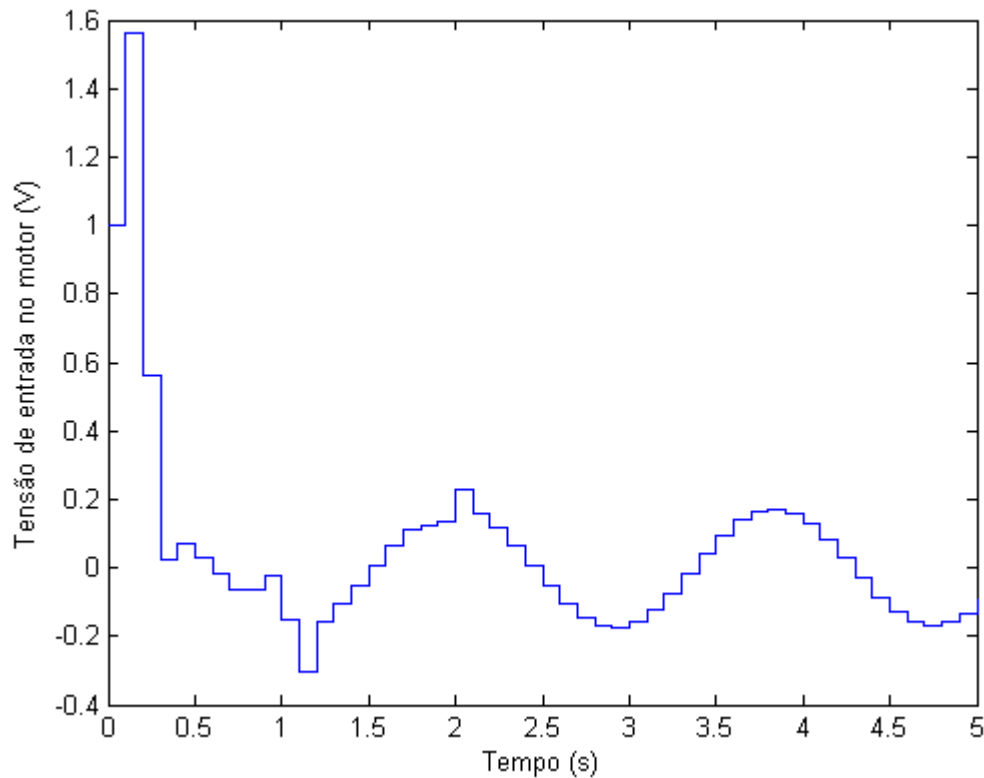


Figura 9. Evolução da variável de comando para o modelo dos modos assumidos

Como se pode ver na Fig. 9, a variável de comando não ultrapassa a restrição imposta de 24V, assim como na simulação com o modelo massa-mola.

Também para este modelo, verifica-se que os resultados são melhores que aqueles obtidos por Castro et al. (2009), pois as oscilações restringem sua amplitude para  $2^\circ$ , sem forçar o atuador ao extremo, e com um tempo de resposta bom, ao passo que Castro et al. (2009) obtiveram amplitudes de até  $8^\circ$  utilizando um controlador LQR para este modelo.

## 5 CONCLUSÕES

As simulações realizadas com os dois modelos para o satélite rígido-flexível neste trabalho mostraram que o controle preditivo é uma técnica eficiente para controlar este tipo de sistema, onde restrições sobre o deslocamento flexível devem ser obedecidas para correta realização da manobra.

Tanto o modelo massa-mola quanto o modelo dos modos assumidos mostraram bom desempenho e respeito às restrições ao se impor um sinal de referência a ser seguido.



A variável de comando não se mostrou uma variável determinante ao se considerar suas restrições, pois, para os dois modelos, não atinge valores próximos do valor limite imposto como restrição.

Em trabalhos futuros, poder-se-á testar o método de controle preditivo para um modelo não-linear do satélite rígido-flexível, o qual terá uma dinâmica bem mais próxima de um satélite real.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer pelo apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior (CAPES) e ao Conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico (CNPq) na realização deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Alamir, M., 2013. *A pragmatic story of model predictive control: self-contained algorithms and case-studies*. CreateSpace.
- Cao, Y., & Chen, W., 2014. Variable sampling-time nonlinear model predictive control of satellites using magneto-torquers. *Systems Science & Control Engineering*, vol. 2, n. 1, pp. 593–601.
- Castro, J., & Souza, L., 2009. *Estudo experimental da dinâmica e do Sistema de controle de um satélite rígido-flexível*. Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).
- Chegeni, E., Zandieh, M., & Ebrahimi, J., 2014. Attitude control of satellite with Pulse-Width Pulse-Frequency (PWPF) modulator using generalized incremental predictive control. *Majlesi Journal of Electrical Engineering*, vol. 8, n. 3, pp. 25–31.
- Gervini, V., & Hemerly, E., 2003. *Controle adaptativo de estruturas flexíveis*. Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).
- Hegrenæs, Ø., Gravdahl, J., & Tøndel, P., 2009. Spacecraft attitude control using explicit model predictive control. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 44, n. 8, pp. 891–904.
- Kukreti, S., Walker, A., Putman, P., & Cohen, K., 2015. Genetic Algorithm LQR for attitude control of a magnetically actuated Cubesat. *AIAA SciTech*.
- Liu, H., Lu, G., & Zhong, Y., 2013. Robust LQR attitude control of a 3-DOF laboratory helicopter for aggressive maneuvers. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, n. 10, pp. 4627–4636.
- Mayne, D., Rawlings, J., Rao, C., & Sokaert, P., 2000. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, n. 36, pp. 789–814.
- Murilo, A., Alamir, M., & Ortner, P., 2011. Multivariable control strategy based on a parameterized NMPC for a diesel engine air path. In International Congress of Mechanical Engineering.

Ortiz, R., & Serpa, A., 2015. *Controle modal de vibrações em estruturas flexíveis*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.

Souza, L., & Galvão, B., 2015. Experimental design of robust controller for a rigid flexible satellite. In *International Congress of Mechanical Engineering*.

Xing, Y., Low, K., & Pham, M., 2012. Distributed Model Predictive Control of satellite attitude using hybrid reaction wheels and magnetic actuators. In *IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA)*, pp. 230–235. IEEE.