



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA APLICADA A BLOCOS SOBRE ESTACAS

**Flávio Augusto Xavier Carneiro Pinho**

**Sylvia Regina Mesquita de Almeida**

**Sofia Leão Carvalho**

flavio.axcp@gmail.com

sylvia@ufg.br

sofialeao@gmail.com

Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás

Av. Universitária, n 1488, Qd86, Setor Universitário, Goiânia, GO, 74605-220, Brasil

**Abstract.** *O modelo de bielas e tirantes de blocos de fundações é encontrado na literatura para alguns casos particulares que não levam em consideração o recalque diferencial entre as estacas. A existência de momentos fletores, carregamentos horizontais e solos com um perfil heterogêneo tornam o problema ainda mais complexo. Neste trabalho, o modelo de bielas e tirantes de blocos de fundações foi determinado por meio do processo de otimização de topologia. Foi utilizada uma metodologia híbrida para a representação das estacas e do solo como um meio elástico no qual o bloco se apoia. Foram estudados blocos sobre diferentes configurações do arranjo das estacas. Constatou-se a influência da rigidez do solo no comportamento do bloco e do modelo de bielas e tirantes resultante.*

**Keywords:** *Otimização de Topologia, Modelo de Bielas e Tirantes, Blocos de Fundação*

## 1 INTRODUÇÃO

Blocos de fundação são estruturas tridimensionais responsáveis por receber o carregamento de pilares e transferi-lo para as estacas. Modelos de bielas e tirantes constituem a principal ferramenta usada para o dimensionamento de blocos sobre estacas e a literatura apresenta várias possibilidades de modelos para arranjos clássicos de estacas. Todavia, a maioria dessas soluções são estaticamente determinadas e se restringem a blocos simétricos, que recebem apenas um pilar e se apoiam sobre poucas estacas.

O crescimento vertical dos edifícios ocasionou o aumento da carga nos pilares e, com isso, a proporção entre a carga vertical e a projeção horizontal da edificação também aumentou. Em consequência, as fundações passam a receber uma quantidade maior de carga em uma área menor. Como estacas de diâmetro e comprimento maiores em maior quantidade são muitas vezes a opção mais viável de fundação, em alguns casos, é necessário utilizar o chamado *radier* estaqueado, constituído por um grande bloco que recebe a carga de todos os pilares da edificação e se apoia sobre um grande número de estacas.

Atualmente, os projetistas de fundações não só levam em conta a carga de ruptura das estacas, como também o recalque diferencial entre elas e a distribuição e a quantidade de estacas é pautada por ambas as análises. A resistência de base dos blocos e *radiers* em contato com o solo, desprezada nos modelos clássicos, também é considerada. Para efetuar uma análise conjunta entre blocos ou *radiers*, estacas e solo, pode-se utilizar modelos tridimensionais que discretizam a estrutura e o solo em uma única solução. Do ponto de vista computacional, esses modelos são muito onerosos devido ao grande número de graus de liberdade em uma discretização adequada da porção de solo a ser considerada.

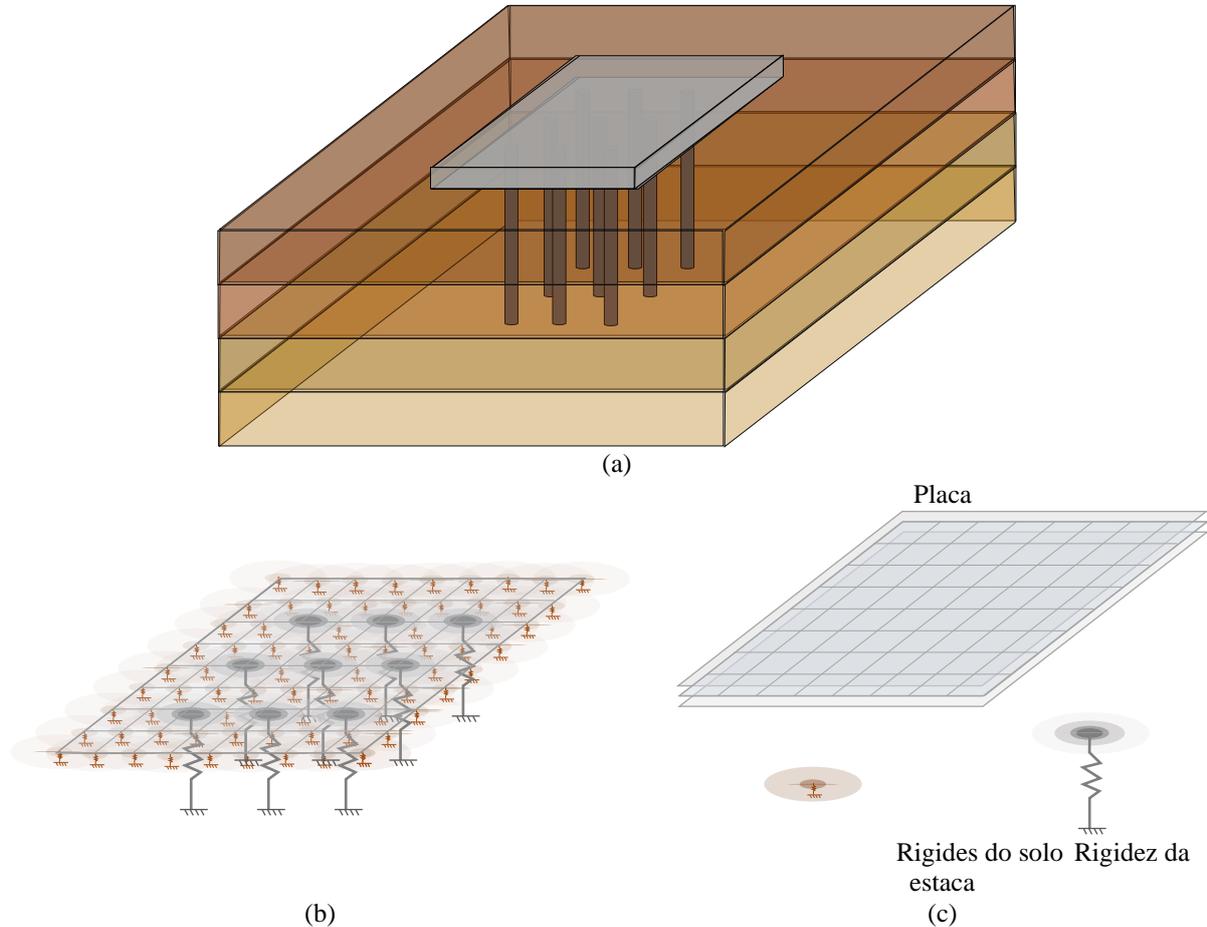
Alguns autores utilizam uma abordagem híbrida para resolver o problema de *radiers* estaqueados. O *radier* é modelado com uma malha de elementos finitos de placa, esbelta ou espessa, apoiada sobre uma base elástica que representa o conjunto solo/estacas. A rigidez equivalente da base elástica é determinada previamente e de forma independente pelo método dos elementos finitos ou por outros métodos numéricos. A seguir, a rigidez da base elástica é aplicada à modelagem do *radier* sujeito às cargas de projeto e a estrutura é armada de acordo com os momentos fletores resultantes. No caso de blocos sobre estacas, a metodologia híbrida pode ser utilizada para a determinação da parcela de carga e do recalque de cada estaca. Nos modelos clássicos de bielas e tirantes de blocos sobre estacas, admite-se que as estacas funcionem como apoios rígidos. Tal consideração é válida quando não existe recalque diferencial. Contudo, quando são utilizadas estacas muito flexíveis, o recalque afeta as condições de contorno do bloco, podendo levar à uma mudança no encaminhamento das cargas e no modelo de bielas e tirantes.

Neste trabalho foi utilizada uma metodologia híbrida para análise de blocos sobre estacas. O modelo de bielas e tirantes dos blocos são gerados pelo método de densidade em otimização de topologia. Um estudo sobre a quantidade de estacas e a rigidez do solo foi feito de forma a evidenciar as mudanças no comportamento do bloco.

## 2 METODOLOGIA HÍBRIDA

Carvalho (2015) propôs uma metodologia híbrida baseada inteiramente no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise de *radiers* estaqueados, a qual foi implementada no programa SoFIA - *Soil Foundation Interaction Analysis*. O conjunto solo-estacas forma uma

base elástica na qual o *radier* se apoia, conforme ilustra a Fig. 1. É possível utilizar um solo heterogêneo com camadas horizontais de diferentes parâmetros mecânicos. Além disso, um mesmo modelo pode conter estacas com propriedades geométricas e mecânicas diversas.



**Figura 1. Radier estaqueado (Carvalho, 2015). Em (a), representação do radier estaqueado no solo. Em (b), modelo utilizado para a consideração da base elástica. Em (c), representação da placa, solo e estacas conforme utilizado no SoFIA.**

A rigidez equivalente da base elástica, dada pela matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{S-E}$ , é calculada como a inversa da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}_{S-E}$ , de acordo com a Eq. (1).

$$\mathbf{K}_{S-E} = \mathbf{F}_{S-E}^{-1} \tag{1}$$

$$\mathbf{F}_{S-E} = [f_{ij}]$$

Os valores de  $i$  e  $j$  representam pontos do *radier* que fazem interface com a base elástica. Os coeficientes  $f_{ij}$  são iguais aos deslocamentos verticais em  $j$ , provocados pela aplicação de uma força unitária em  $i$  na base elástica. Os deslocamentos são determinados por meio de análises axissimétricas pelo MEF. Para o cálculo de  $\mathbf{F}_{S-E}$  são considerados quatro tipos de interações entre os pontos  $i$  e  $j$ , propostas inicialmente por Hain e Lee (1978), conforme ilustra a Fig. 2. A aplicação de um carregamento  $P$  na superfície do solo ou na estaca provoca deslocamentos em toda a superfície da base elástica.

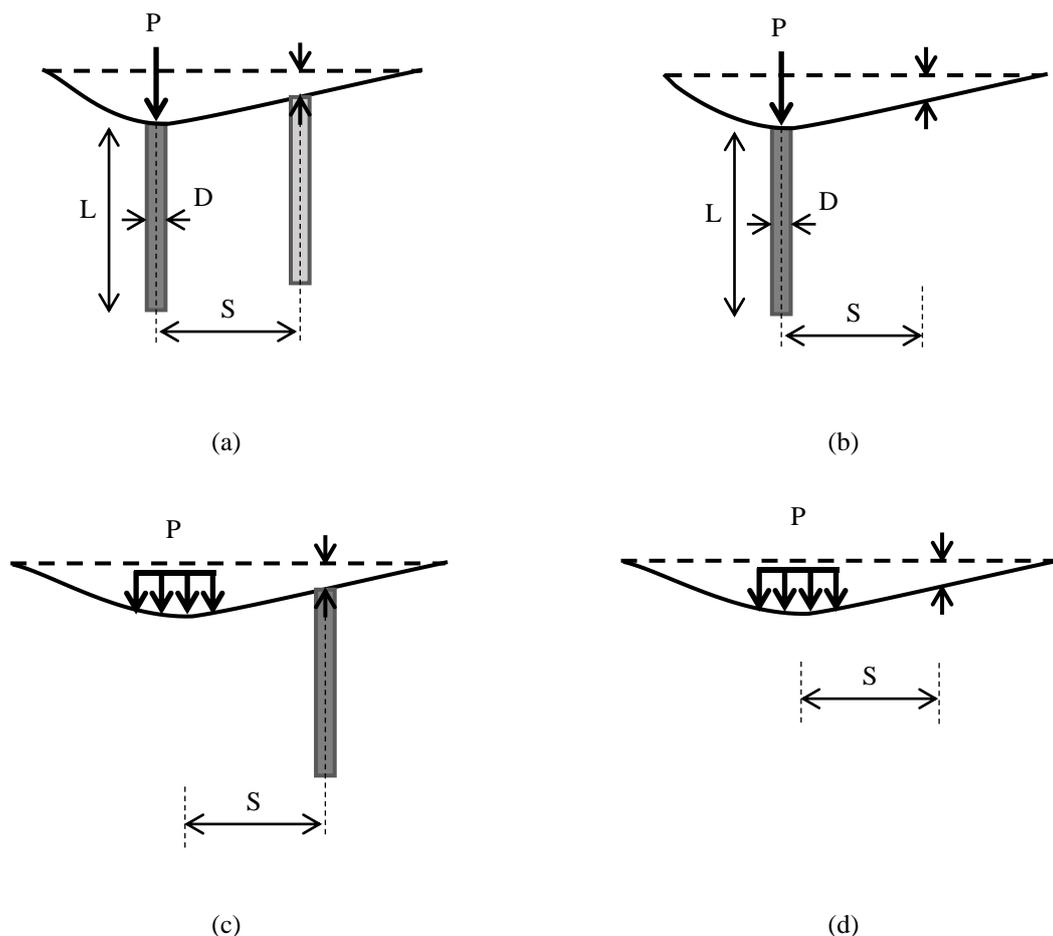


Figura 2. Interações de Hain e Lee (1969) adaptado de Carvalho (2015). Em (a), deslocamento em uma estaca provocado pela aplicação de carga em outra estaca. Em (b), deslocamento no solo provocado pela aplicação de carga em uma estaca. Em (c), deslocamento de uma estaca provocado pela aplicação de carga no solo. Em (d), deslocamento do solo provocado pela aplicação de carga no solo.

A matriz de rigidez da estrutura é determinada pela Eq. (2). A rigidez da base elástica, dada pela matriz  $\mathbf{K}_{S-E}$ , influencia o sistema apenas nos graus de liberdade dos deslocamentos verticais.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_R + \mathbf{K}_{S-E} \quad (2)$$

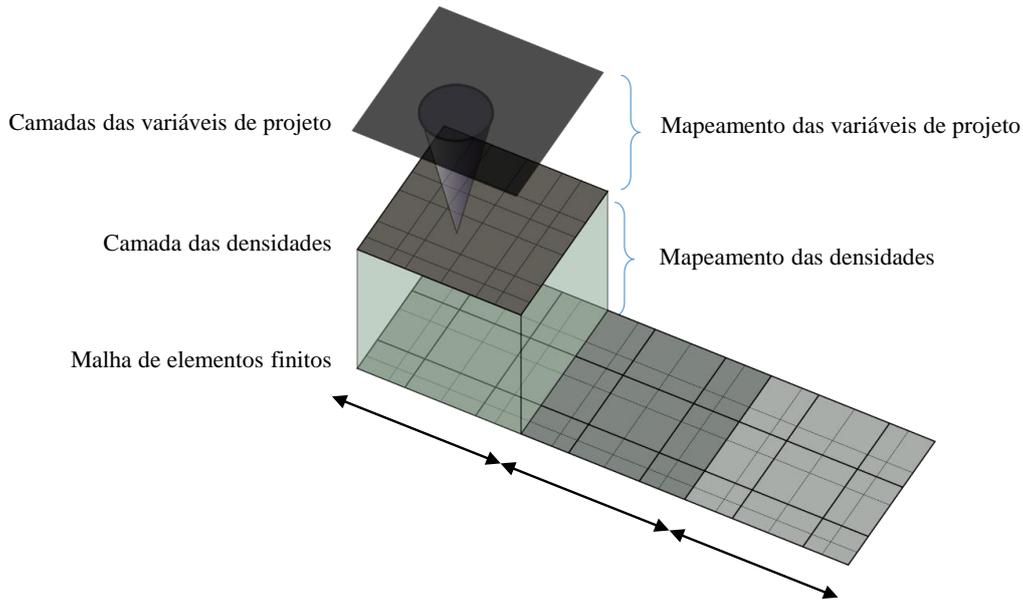
Onde:

- $\mathbf{K}_R$  é a matriz de rigidez do *radier*, que pode ser considerado tanto uma placa esbelta como uma placa espessa; e
- $\mathbf{K}_T$  é a matriz de rigidez do *radier* estaqueado.

### 3 OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA

Neste trabalho foi utilizada uma abordagem unificada para os métodos baseados em densidade proposta por Pinho e Almeida (2014) e Pinho (2015) que deu origem ao programa OTOO – Otimização de Topologia Orientada a Objetos. O ponto central dessa abordagem é a

divisão das variáveis do processo de otimização em três camadas, conforme ilustra a Fig. 3: a camada das variáveis de projeto; a camada das densidades; e a malha de elementos finitos.



**Figura 3. Camadas de variáveis utilizadas no programa OTOO (Pinho, 2015).**

No algoritmo do OTOO, primeiramente há a seleção do modelo de distribuição do material, que relaciona a densidade do material com os parâmetros mecânicos. Neste trabalho foi utilizado o modelo SIMP – *Solid Isotropic Material with Penalization* (Bendsøe, 1989; Zhou e Razvany, 1991; Rozvany et al, 1992). A Eq.(3) mostra a lei de formação que relaciona uma propriedade mecânica do material, no caso o módulo de elasticidade, com a densidade do material.

$$E = E_0 \rho^p \quad (3)$$

Onde:

- $E$  é o módulo de elasticidade do material;
- $E_0$  é o módulo de elasticidade inicial;
- $\rho$  é o valor da densidade do material e
- $p$  é o coeficiente de penalização.

Em seguida determina-se a forma como as densidades se relacionam com a malha de elementos finitos. Neste trabalho foi utilizado o modelo MTOP – *Multiresolution Topology Optimization* – que permite obter soluções com alta resolução aliado a uma significativa redução na malha de elementos finitos e dos graus de liberdade (Nguyen *et al.*, 2010). A Fig. 4 mostra um elemento finito quadrangular com as distribuições clássicas de densidades e com a distribuição adotada no MTOP.

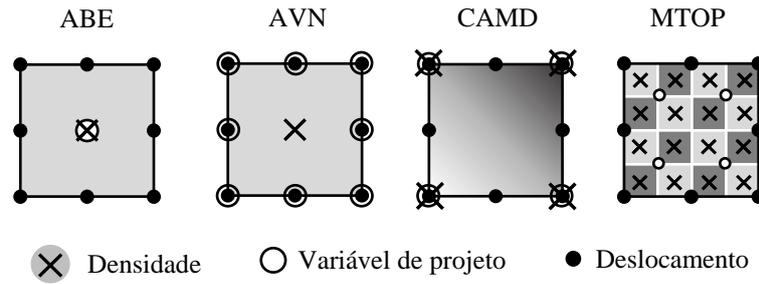


Figura 4. Exemplos de elementos finitos e de distribuição de densidades e variáveis de projeto das técnicas clássicas dos métodos de otimização de topologia baseados na densidade.

A matriz de rigidez do elemento no modelo MTOP pode ser determinada de acordo com a Eq. (4).

$$\mathbf{K}_e = \sum_{i=1}^{ndes} \rho_i^p \int \mathbf{B}^t \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (4)$$

No programa OTOO, esquemas de regularização são utilizados para eliminar as instabilidades do tipo tabuleiro de xadrez e formação de ilhas. Além disso, os esquemas permitem obter um controle sobre o tamanho das barras ou dos vazios resultantes do processo de otimização de topologia. Tais esquemas relacionam as variáveis de projeto com as densidades por meio de filtros de densidade como as técnicas de projeção direta (Guest et al., 2004) ou projeção inversa (Almeida et al., 2009). Também é possível aplicar filtros de sensibilidade (Sigmund e Petersson, 1998. Sigmund, 2001) para eliminar instabilidades do tipo tabuleiro de xadrez. Neste trabalho foi utilizado a projeção direta linear, que relaciona as densidades  $\rho$  com as variáveis de projeto  $x$  de acordo com a Eq. (5).

$$\rho_e = \frac{\sum_{n \in \Omega_e} x_n w_{e,n}}{\sum_{n \in \Omega_e} w_{e,n}} \quad (5)$$

$$w_{e,n} = \frac{r_{proj} - r_{e,n}}{r_{proj}}$$

Onde:

- $e$  e  $n$  são pontos de avaliação da densidade e das variáveis de projeto, respectivamente
- $r_{proj}$  e  $r_{e,n}$  são o raio de projeção e a distância entre os pontos  $e$  e  $n$ , respectivamente;
- $w_{e,n}$  é a função peso;
- $\Omega_e$  é o domínio que contém as variáveis de projeto a uma distância  $r_{proj}$  do ponto  $e$ .

A função objetivo utilizada nos processos de otimização é a flexibilidade média da estrutura. A cada iteração a estrutura deve permanecer em equilíbrio e a quantidade total de material constante. A densidade do material possui significado físico, portanto valores menores que zero e valores maiores que um não são aceitos. Para evitar instabilidades na

solução das equações do MEF é estabelecido um valor mínimo de densidade, próximo de zero. A Eq. (6) apresenta o problema de otimização de topologia utilizado neste trabalho.

$$\begin{cases} \min(c = \mathbf{F}'\mathbf{U}) \\ E = E_0\rho^p \\ \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \\ \frac{V(\mathbf{x})}{V_0} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Onde:

- $c$  é a flexibilidade média da estrutura;
- $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{K}$  são, respectivamente, o vetor de cargas, o vetor de deslocamentos e a matriz de rigidez;
- $V(\mathbf{x})$  e  $V_0$  são o volume do material em cada iteração e o volume inicial, respectivamente.

O algoritmo utilizado para a minimização da função objetivo é o OC (*Optimization Criteria*) que é um método heurístico proposto por Bendsøe (1989).

## 4 RESULTADOS

Foram estudados blocos em três situações de diferentes condições de contorno. Nos Caso 1 e Caso 2, o bloco é apoiado sobre um solo que possui as características mostradas nas tabelas Tab. 1 e Tab. 2, respectivamente. No Caso 1 buscou-se estucar blocos sobre solos bem flexíveis e no Caso 2 blocos sobre solos de rigidez intermediária. Uma terceira situação, Caso 3, os blocos estão fixados sobre apoios do primeiro gênero, representando estacas indeslocáveis, sobre solo muito rígido.

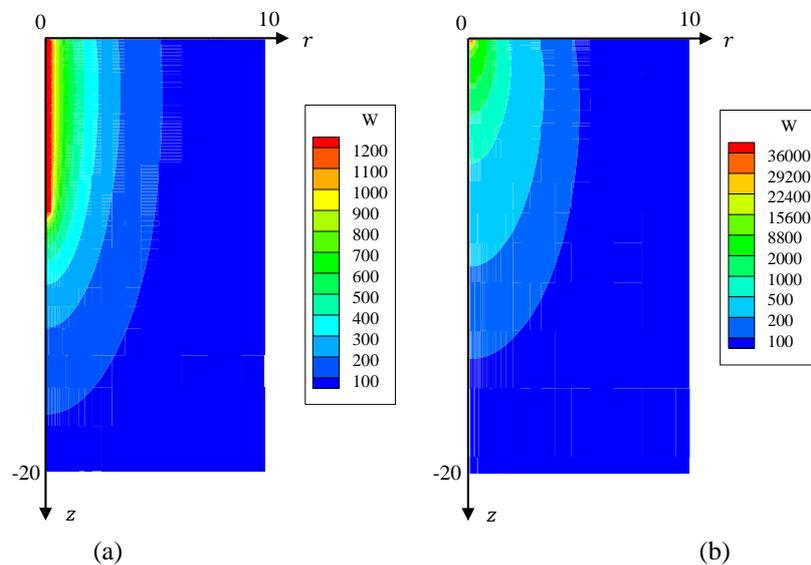
**Tabela 1. Propriedades do solo no Caso 1.**

Camada	Módulo de elasticidade	Coefficiente de <i>Poisson</i>	Tamanho da camada (m)
Camada 1	0,0001 $E_c$	0,35	1
Camada 2	0,0002 $E_c$	0,35	1
Camada 3	0,0003 $E_c$	0,35	2
Camada 4	0,0004 $E_c$	0,35	$\infty$

**Tabela 2. Propriedades do solo no Caso 2.**

Camada	Módulo de elasticidade	Coefficiente de <i>Poisson</i>	Tamanho da camada (m)
Camada 1	0,0018 $E_c$	0,30	3
Camada 2	0,0028 $E_c$	0,30	4
Camada 3	0,0032 $E_c$	0,30	5
Camada 4	0,0047 $E_c$	0,30	2
Camada 5	0,0066 $E_c$	0,30	1
Camada 6	0,0044 $E_c$	0,30	1
Camada 7	0,0040 $E_c$	0,30	3
Camada 8	0,0053 $E_c$	0,30	1
Camada 9	0,0070 $E_c$	0,30	5
Camada 10	0,0094 $E_c$	0,30	$\infty$

As estacas e o bloco possuem modulo de elasticidade longitudinal  $E_c$  igual a 1 e coeficiente de Poisson igual a 0,15. As estacas possuem diâmetro de 0,4m. Os coeficientes de flexibilidade são tirados das seguintes análises axissimétricas mostradas nas Fig. 5 e Fig. 6 para os Casos 1 e 2, respectivamente.



**Figura 5. Resultado do deslocamento vertical do Caso 1 das análises Estaca-Solo/Estaca-Estaca (a) e Solo-Solo/Solo-Estaca (b).**

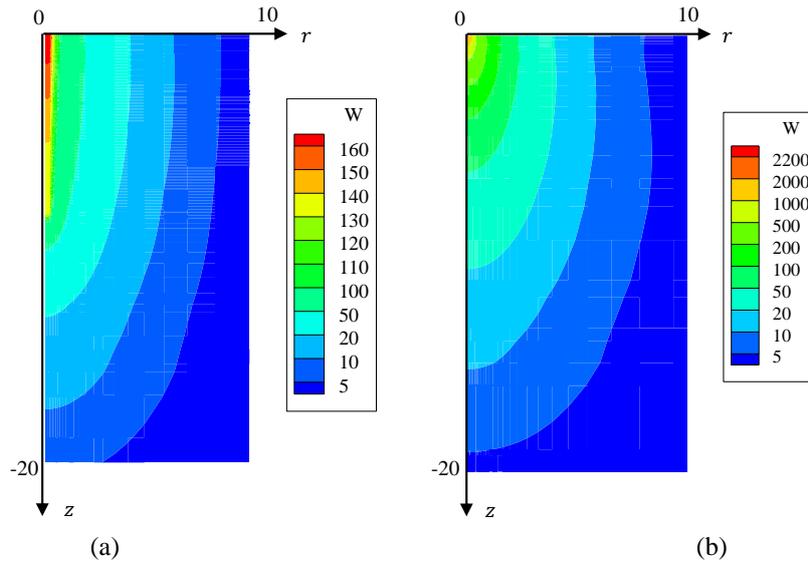


Figura 6. Resultado do deslocamento vertical do Caso 2 das análises Estaca-Solo/Estaca-Estaca (a) e Solo-Solo/Solo-Estaca (b).

Os gráficos da Fig. 7 mostram os valores de  $f$  em função da distância  $s$  entre o ponto de aplicação da carga unitária e o ponto de medida do deslocamento na superfície do solo.

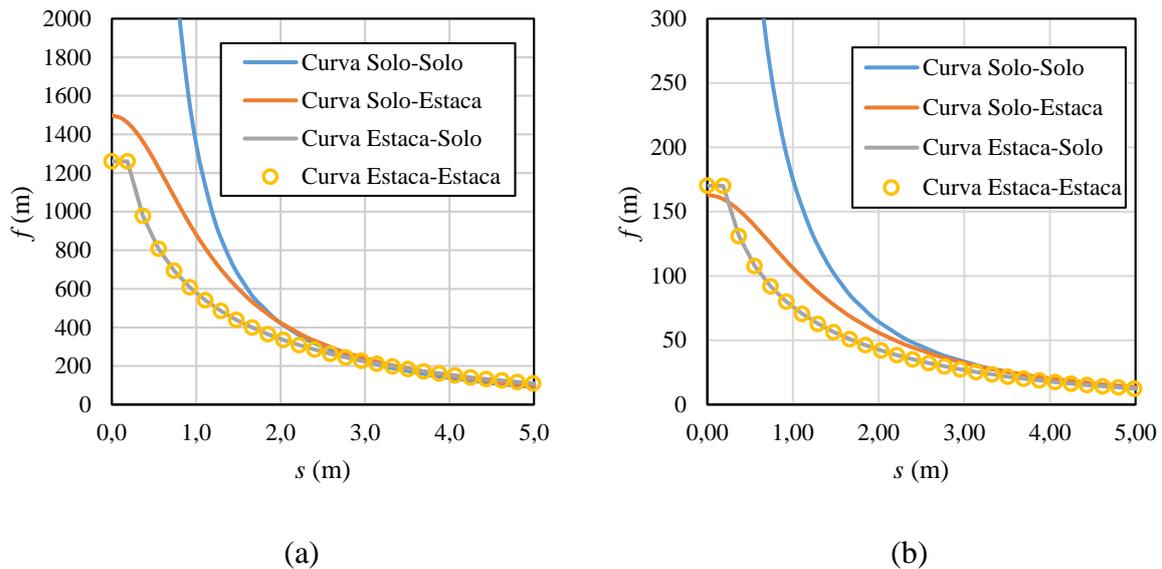
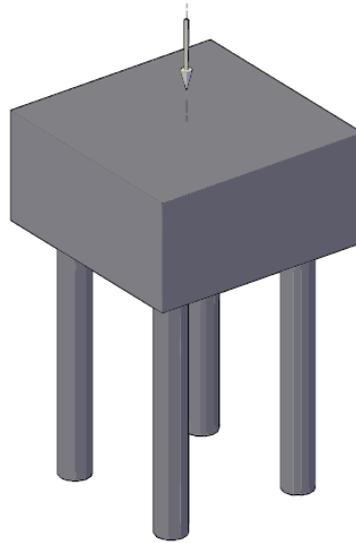


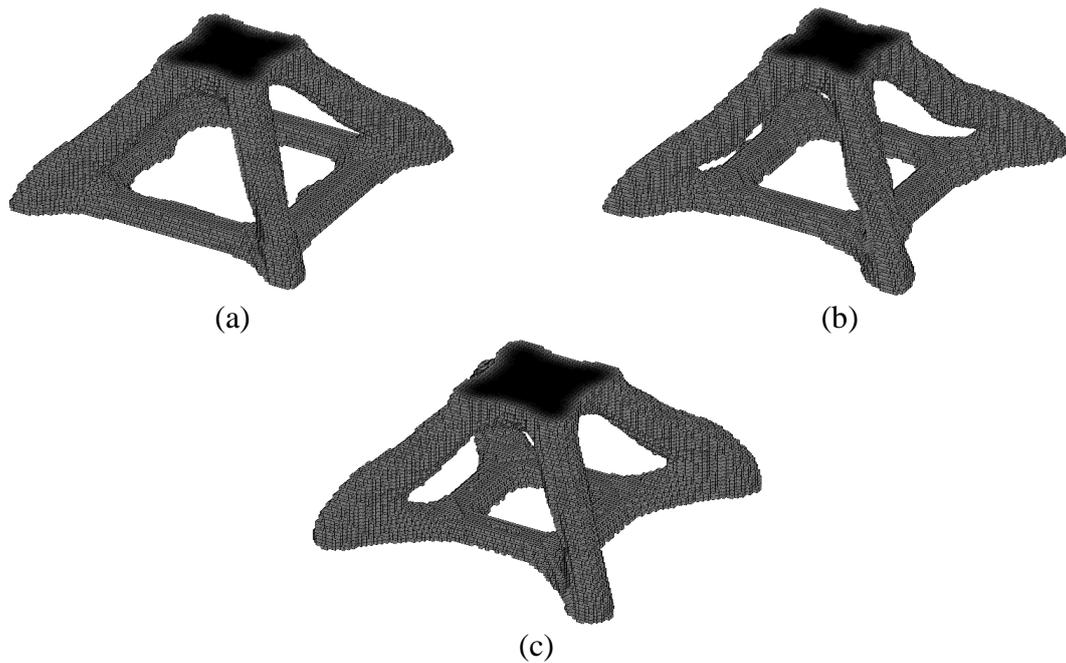
Figura 7. Variação do coeficiente de flexibilidade  $f$  com a distância  $s$ .

Foram estudados blocos de geometria convencional, prismática de base retangular, submetidos a um carregamento vertical aplicado no centro da face superior, conforme exemplifica a Fig. 8 cujo bloco está apoiado sobre 4 estacas.



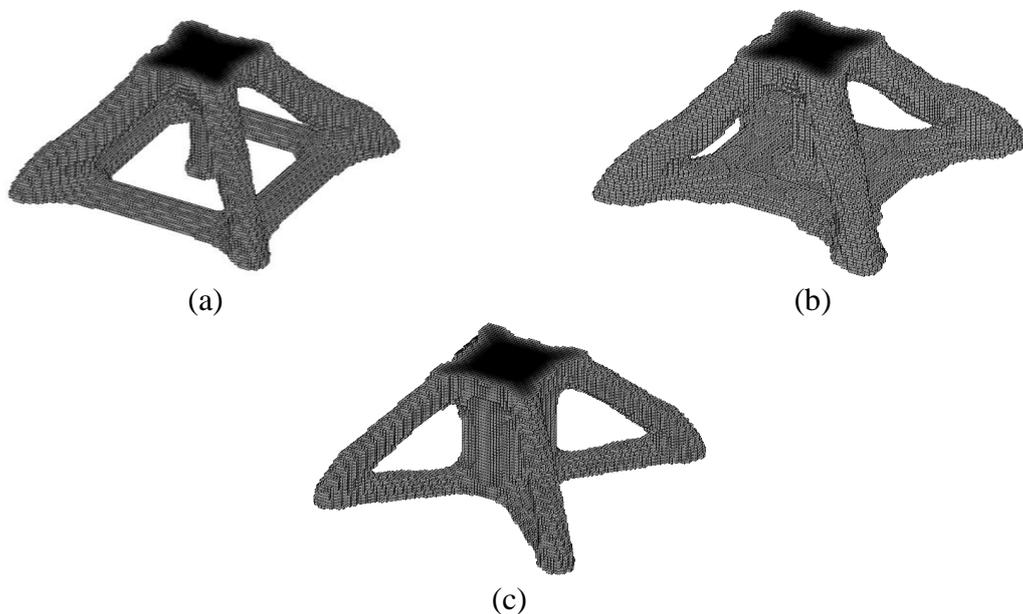
**Figura 8. Bloco de fundação sobre 4 estacas.**

As Fig. 9-a, Fig. 9-b e Fig. 9-c mostram os resultados do processo de otimização de topologia em um bloco de fundação sobre quatro estacas para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente. O bloco possui 2,5m de largura por 2,5m de comprimento por 1m de altura e foi modelado com uma malha de 20 x 20 x 8 elementos MTOP B8/n27/d125. Foi utilizado uma técnica de continuidade para o modelo SIMP em que o coeficiente de penalização  $p$  varia de 1 a 3 com incremento unitário. Foi utilizado um raio de projeção  $r_{proj}$  de 0,2m. Observa-se que há uma pequena variação na região dos tirantes no bloco. Em termos de projeto, tal variação não exerce influência no dimensionamento da armadura já que a solução do modelo é estaticamente determinada e são encontradas na literatura três formas de armar este tipo de bloco apoiado sobre quatro estacas: em cruz, em malha, e em retângulo.



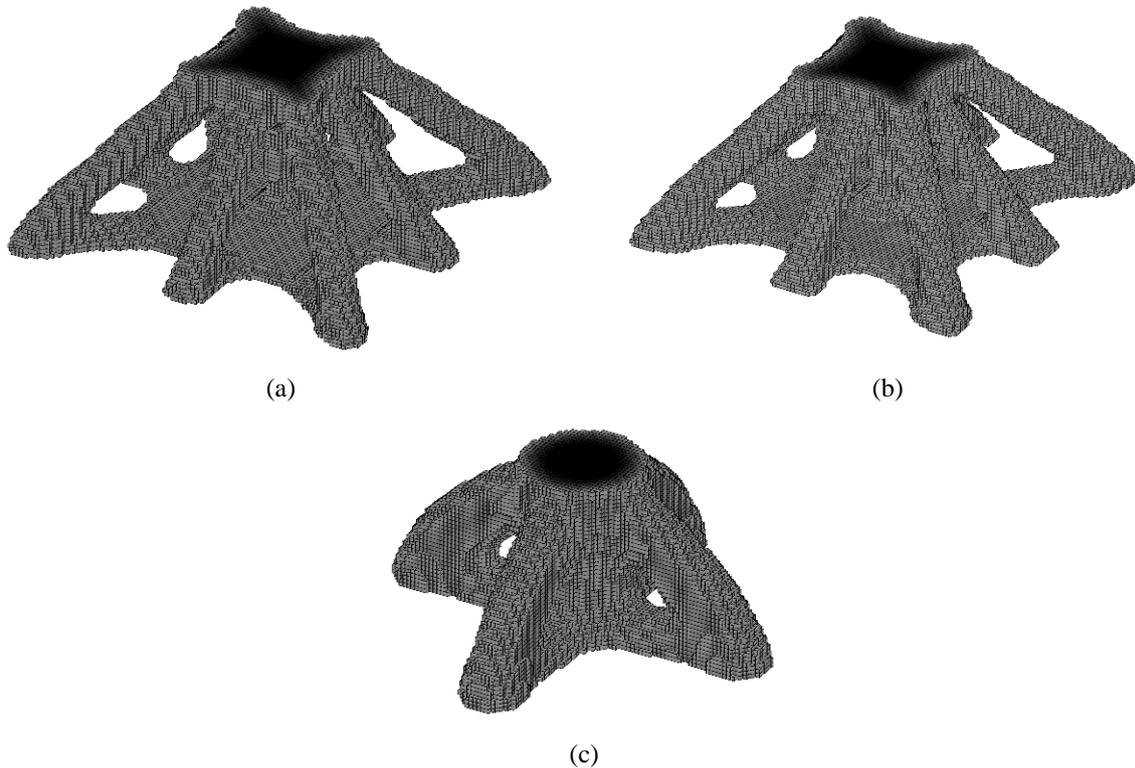
**Figura 9. Resultado do processo de otimização para blocos sobre 4 estacas. Em (a) considerando o Caso 1, em (b) o Caso 2 e em (c) o Caso 3.**

A Fig. 10 mostra o resultado do processo de otimização para um bloco de fundação sobre cinco estacas para os Casos 1, 2 e 3. Os mesmos parâmetros do exemplo do bloco da Fig 9 foram aplicadas a este bloco. Aqui, vê-se claramente uma mudança brusca no modelo de bielas e tirantes em decorrência do tipo de solo. Quão mais rígido é o solo, maior a tendência de concentração de cargas na estaca central.



**Figura 10. Resultado do processo de otimização para blocos sobre 5 estacas. Em (a) considerando o Caso 1, em (b) o Caso 2 e em (c) o Caso 3.**

A Fig. 11 mostra o resultado do process de otimização para um bloco similar ao bloco da Fig 9 mas sobre nove estacas. Nesse exemplo, a mudança do encaminhamento das cargas é tão brusca no Caso 3 que as estacas mais distantes sequer são solicitadas.



**Figura 11. Resultado do processo de otimização para blocos sobre 9 estacas. Em (a) considerando o Caso 1, em (b) o Caso 2 e em (c) o Caso 3.**

A Fig. 12 mostra o resultado do processo de otimização para um bloco sobre 16 estacas. O bloco possui dimensões de 5,25m de largura por 5,25m de comprimento e 2,25m de altura. Foi utilizada uma malha de 28 x 28 x 12 elementos finitos MTOP B8/n27/d125. As demais propriedades foram mantidas em relação aos exemplos anteriores. Novamente, houve o encaminhamento das cargas apenas para as estacas mais próximas ao centro no Caso 3.

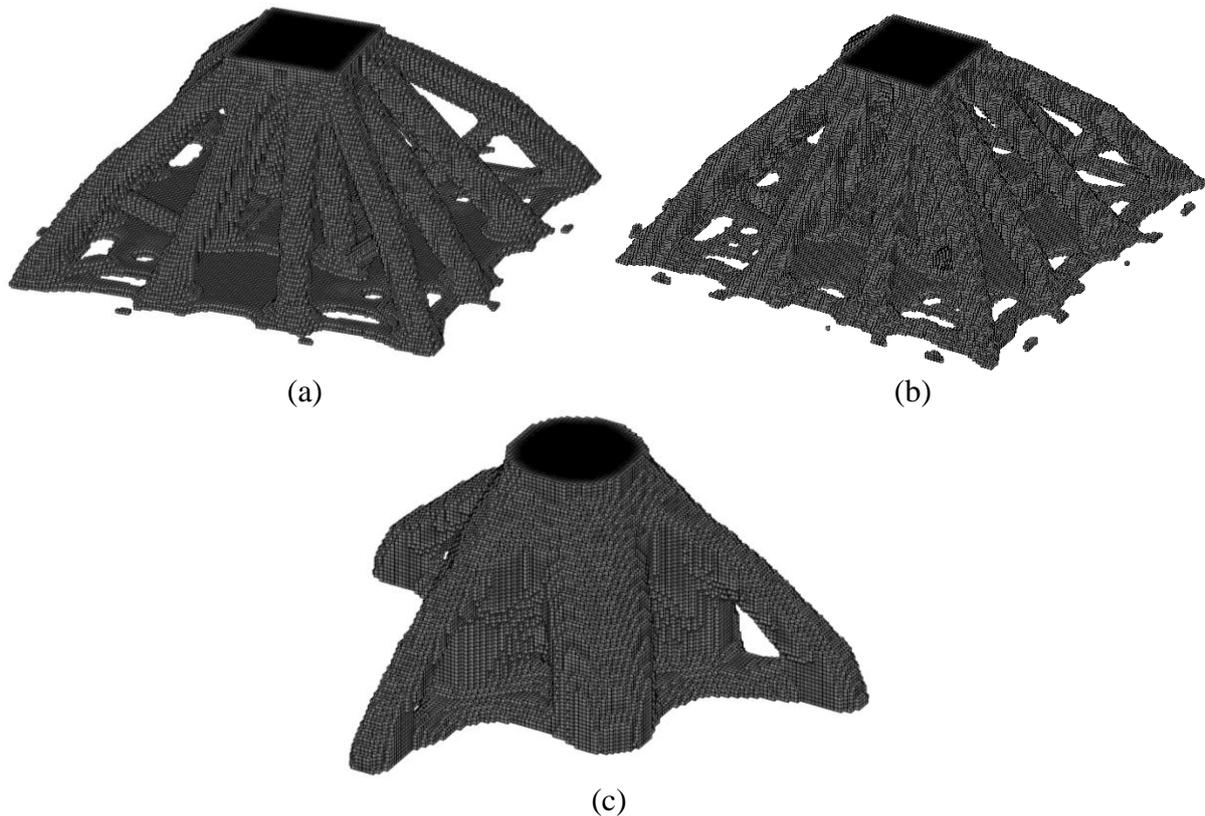


Figura 12. Resultado do processo de otimização para blocos sobre 16 estacas. Em (a) considerando o Caso 1, em (b) o Caso 2 e em (c) o Caso 3

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram determinados os modelos de bielas e tirantes para blocos de fundação de geometria convencional por meio do processo de otimização de topologia. Foi utilizada uma metodologia híbrida para consideração do meio solo/estacas como uma base elástica na qual o bloco se apoia. Constatou-se a influência do solo e das estacas no comportamento do bloco. Tal influência resulta num diferente encaminhamento das cargas para as estacas. Quanto mais rígido é o solo, maior a tendência das bielas e estacas centrais receberem a maior parte da carga. Em alguns casos, certas estacas sequer são mobilizadas por conta da rigidez elevada do solo mobilizando apenas as estacas centrais.

## AGRADECIMENTOS

FAXCP e SLC agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo financiamento de seus respectivos projetos de mestrado. SRMA agradece ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) por financiamento por meio dos projetos de números [477905/2013-7](#) e [309035/2014-7](#). Todos os autores agradecem à FAPEG e à CAPES pelo financiamento à manutenção dos laboratórios de pesquisa do PPG-GECON/UFG por meio do edital 11/2012.

## REFERÊNCIAS

- Almeida, S. R. M., Paulino, G. H., & Silva, E. C. N., 2009. A simple and effective inverse projection scheme for void distribution control in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 39, n. 4, p. 359-371.
- Bendsøe, M. P., 1989. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 1, n. 4, p. 193-202.
- Carvalho, S. L., 2015. Metodologia Híbrida Aplicada em uma Ferramenta Numérica para Análise de Radier Estaqueado. Dissertação de Mestrado em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal de Goiás/Goiânia.
- Guest, J. K., Prevost, J. H., & Belytschko, T., 2004. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 61, n. 2, p. 238-254.
- Hain, S. J., & Lee, I. K., 1978. The analysis of flexible raft-pile systems. *Geotechnique*, v. 28, n. 1, p. 65-83.
- Nguyen, T. H., Paulino, G. H., Song J., & Le, C. H., 2010. A computational paradigm for multiresolution topology optimization (MTOPT). *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 41, n. 4, p. 525-539.
- Pinho, F. A. X. C. P., 2015. Métodos de densidade em otimização de topologia aplicados a subsistemas de edifícios. Dissertação de Mestrado em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil. Universidade Federal de Goiás/Goiânia.
- Pinho, A. X. C. P., & Almeida S. R. M., 2014. A unified computational tool for the most common approaches on density methods in topology optimization. *Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE2014)*. Fortaleza.
- Rozvany, G. I. N., 2001. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 90-108.
- Sigmund, O., 2001. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 120-127.
- Sigmund, O., & Petersson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, v. 16, n. 1, p. 68-75.
- Zhou, M., & Rozvany, G. I. N., 1991. The Coc Algorithm .2. Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 89, n. 1-3, p. 309-336.