



## GENERATING STRUT-AND-TIE MODELS USING CONTINUUM AND DISCRETE TOPOLOGY OPTIMIZATION

Lucas Cuellar de Moraes

Sylvia Regina Mesquita de Almeida

lucascmoraes@outlook.com

sylvia@ufg.br

Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás

Av. Universitária, n 1488, Qd86, Setor Universitário, Goiânia, GO, 74605-220, Brasil

**Abstract.** *Strut-and-tie models are largely used as an auxiliary tool in the design of reinforced concrete (RC) components with low shear span-to-depth ratio, such as deep beams, corbels, pile caps or joints. However, the generation of such models is still an open issue. This paper analyses two optimization schemes, using the density and the discrete truss approaches. In both schemes, bi-linear models are used to represent the material behavior of the struts and the steel reinforcing bars. Thus the separation of compressive and tensile load-carrying elements is achieved through an elastic model with a simple constitutive relationship for the continuum. Examples are provided demonstrating the potential value of the optimization approaches to RC design.*

**Keywords:** *Strut-and-tie-models, reinforced concrete, topology optimization, density methods, ground structure.*

## 1 INTRODUÇÃO

A otimização de topologia, entendida como o processo de determinação de ligações, formas e localização de vazios dentro de um domínio de projeto definido (Deaton; Grandhi, 2014), é uma poderosa ferramenta para concepção estrutural que pode ser estendida para a construção de modelos para análise de estruturas com materiais compósitos como o concreto armado. A literatura apresenta várias abordagens para obtenção de soluções topológica, dentre as quais destacam-se os métodos da densidade e da estrutura base, cuja aplicação para geração de modelos de bielas e tirantes é objeto de investigação neste trabalho.

O método da densidade é a técnica de otimização de topologia mais largamente difundida e visa a obtenção da distribuição de material em uma região do espaço, denominada domínio estendido, de forma a minimizar ou maximizar uma função objetivo que represente um comportamento global da estrutura. A análise estrutural é feita geralmente utilizando o método dos elementos finitos (MEF), em um domínio estendido discretizado ao qual são impostas as condições de contorno e de carregamento. A quantidade de material em cada parcela do domínio estendido é associada a uma pseudo-densidade que, na forma mais difundida, são diretamente as variáveis de projeto do problema de otimização. A quantidade total de material é prescrita pelo projetista e mantida constante durante todo o processo de otimização. No entanto, são escassos os trabalhos em relação à obtenção de modelos simplificados para análise de estruturas de concreto armado, como mostram sua ausência em revisões recentes da literatura como as de Sigmund e Maute (2013) e Deaton e Grandhi (2014). Citam-se os trabalhos de Bruggi (2009, 2010), Victoria et al. (2011) e Gaynor et al. (2013).

O método da estrutura base não pertence aos campos clássicos da otimização de topologia e guarda grande semelhança com a otimização de dimensões. Parte de uma estrutura reticulada altamente conectada da qual uma configuração topológica eficiente é extraída pela solução de um problema de otimização (ver Dorn et al, 1964; Ohsaki, 2010; Christensen and Klarbring, 2009). A despeito da tradição do método, sua utilização para obtenção de modelos de bielas e tirantes não é frequente e essas soluções são na maior parte das vezes obtidas com processos gráficos ou de caminhamento de cargas.

Modelos de bielas e tirantes (STM – *Strut and Tie Models*) são usados no dimensionamento de estruturas de concreto armado para as quais não são válidas as simplificações das hipóteses de Bernoulli. Esses modelos são uma estrutura auxiliar composta por bielas comprimidas, representando o concreto, e tirantes tracionados, representando o aço. O modelo assim constituído atende ao teorema do limite superior da teoria da plasticidade, podendo ser usado para dimensionamento da estrutura contínua original. Recentemente, a literatura apresenta propostas de geração desses modelos usando técnicas de otimização de topologia em sua abordagem em densidade (ver Liang et al., 2000, 2001 e Bruggi, 2009, 2010) e pelo método da estrutura base (ver Ali; White, 2000, 2001). Ambas são propostas bastante promissoras pois, como mostra Pantoja (2004), os modelos gerados por otimização de topologia com abordagem em densidade apresentam um índice de confiabilidade similar ou melhor que modelos gerados de outras formas. Outra vertente que vem sendo explorada recentemente é a que contempla a geração de modelos híbridos com as bielas geradas a partir de uma abordagem em densidade e os tirantes a partir de uma abordagem em estrutura base (ver Gaynor et al., 2013).

Este trabalho apresenta um estudo sobre a utilização de otimização topológica em um domínio contínuo, via métodos de densidade, e em um domínio discreto formado por barras,

via método da estrutura base. As limitações e as conveniências dos dois métodos são analisadas.

## 2 MÉTODO DE DENSIDADE

Os fundamentos do método de densidade foram desenvolvidos a partir de trabalhos envolvendo teoria de homogeneização e métodos de otimização estrutural, os quais embasaram o trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi (1988). Este trabalho utiliza-se o problema clássico de minimização de flexibilidade com restrição de volume e modelo SIMP (Bendsøe, 1989 e Zhou; Rozvany, 1991, Rozvany et al., 1992), de representação de distribuição do material. O problema então assume a forma aninhada:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & c = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{Tal que } & V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{ne} \rho_e V_e \leq f V_{\Omega} \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \\ \text{Com } & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1)$$

Onde:  $c$  é a flexibilidade média da estrutura;  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas aplicadas à estrutura;  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura;  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez global da estrutura;  $\boldsymbol{\rho}$  é o vetor de densidades  $\rho_e$  nos elementos da malha que discretiza o domínio estendido;  $V$  é o volume de material;  $V_e$  é o volume do elemento  $e$ ;  $V_{\Omega}$  é o volume do domínio estendido  $\Omega$ ;  $f$  é a fração de volume para distribuição do material;  $\rho_{\min}$  é um valor positivo e pequeno para o limite inferior da pseudo-densidade que evita instabilidades numéricas na solução do sistema de equações.

O problema descrito em (1), quando proposto para valores discretos das pseudo densidades  $\rho_e$  é mal condicionado e não tem solução (Sigmund; Petersson, 1998) pois, à medida que se refina a malha, novas regiões vazias são introduzidas. A introdução de vazios sem modificar o volume da estrutura causa um aumento de eficiência da função objetivo e a solução ótima ficará cada vez mais distante de uma solução de projeto. Adota-se então uma relaxação do problema original, permitindo que a densidade  $\rho_e$  possa apresentar uma variação contínua entre 0 e 1. As soluções com densidade intermediária são desfavorecidas durante o processo de otimização pela introdução do coeficiente de penalização  $p$ , conforme o modelo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) apresentado na Eq. (2) (Bendsøe, 1989) e Zhou; Rozvany, 1991).

$$E_e = \rho_e^p E_0 \quad (2)$$

Onde:  $E_0$  é o módulo de elasticidade do material sólido;  $E_e$  é o módulo de elasticidade do elemento com densidade  $\rho_e$ ; e  $p$  é um coeficiente de penalização.

A matriz de rigidez de cada elemento com material com densidade  $\rho_e$  pode ser escrita em função da matriz de rigidez do elemento com material sólido, conforme a equação (3). Assim, a flexibilidade média da estrutura assume a forma da equação (4).

$$\mathbf{K}_e = \rho_e^p \mathbf{K}_0 \quad (3)$$

$$c = \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e^p \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{U}_e \quad (4)$$

Onde:  $p$  é o coeficiente de penalização;  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez do elemento;  $\mathbf{K}_0$  matriz de rigidez do elemento sólido;  $\mathbf{U}_e$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $e$ ;  $n_e$  é o número de elementos finitos da malha.

A sensibilidade da função objetivo  $c$  em relação às variáveis de projeto  $\rho_e$  é dada pela Eq. (5) (ver Bendsøe e Sigmund, 2003). As sensibilidades das restrições explícitas são de fácil avaliação, uma vez que as restrições são funções diretas das variáveis de projeto  $\rho_e$ .

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = - \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{U}_e = - p \rho_e^{p-1} \mathbf{U}_e^T \mathbf{K}_0 \mathbf{U}_e \quad (5)$$

O problema de otimização de topologia descrito na Eq. (1) apresenta instabilidades numérica, dentre as quais destaca-se a obtenção des soluções em tabuleiro de xadrez (veja Díaz e Sigmund, 1995 e Jog e Haber, 1996 e a revisão da literatura de Sigmund e Petersson, 1998). Neste trabalho, tais instabilidades são controladas com o filtro de sensibilidade (Sigmund, 2011), apresentado na Eq. (6). Embora heurístico, os conceitos subjacentes do filtro podem ser encontrados nos princípios da mecânica do contínuo e da elasticidade não local (Sigmund; Maute, 2013).

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^{n_e} H_j^i} \sum_{j=1}^{n_e} H_j^i \rho_j \frac{\partial c}{\partial \rho_j} \quad (5)$$

Onde:  $\hat{\phantom{x}}$  indica a grandeza modificada; e  $H_j^i$  é um fator de convolução definido para a vizinhança  $\Omega_i$  do elemento  $i$ , conforme a Eq. (6).

$$H_j^i = \begin{cases} 1 - \text{dist}(i, j) & \text{se } j \in \Omega_i \\ 0 & \text{se } j \notin \Omega_i \end{cases} \quad (6)$$

A formulação clássica do método de densidade prevê a utilização de apenas um material durante o processo de otimização. Todavia, o concreto e aço apresentam propriedades físicas distintas: para essa análise o módulo de elasticidade é o mais considerável. Essa diferença no valor do módulo de elasticidade, em torno de 10 vezes maior a favor do aço, impõe a necessidade de uma alteração no processo de otimização para obtenção de modelos de bielas e tirantes. Como os elementos de aço são utilizados para resistir os esforços de tração, essa diferenciação no módulo de elasticidade é feita a partir da tensão encontrada em cada elemento.

Neste trabalho, para avaliar se o elemento se encontra potencialmente em uma biela ou em um tirante utiliza-se a tensão principal que apresenta o maior valor em módulo. Se o maior valor de tensão principal no elemento for a tensão de compressão, utiliza-se um módulo de elasticidade  $E_C$  como módulo de elasticidade do material sólido e, caso seja de tração, utiliza-se  $E_S$ , conforme mostrado na Eq. (7).

$$E_0 = \begin{cases} E_C & \text{se } \sigma_m < 0 \text{ (compress\~ao)} \\ E_S & \text{se } \sigma_m \geq 0 \text{ (tra\~c\~ao)} \end{cases} \quad (7)$$

Onde:  $\sigma_m$  é o valor da maior tensão principal de cada elemento, em módulo;  $E_0$  é o módulo de elasticidade do elemento;  $E_C$  é o módulo de elasticidade de estruturas de concreto;  $E_S$  é o módulo de elasticidade de elementos de aço.

### 3 MÉTODO DA ESTRUTURA BASE

Com o objetivo de se obter uma formulação nos moldes da otimização de topologia com o método de densidade, este trabalho adota a flexibilidade média da estrutura como função objetivo também nas aplicações pelo método da estrutura base. Essa abordagem apresenta a vantagem de a flexibilidade ser uma função convexa. Além disso, quando se atinge a flexibilidade mínima todas as barras estão com a mesma tensão, conseqüentemente todo material utilizado está sendo aproveitado ao máximo (Christensen; Klarbring, 2009). Assim, o problema de otimização estudado tem a forma apresentada na Eq. (8).

$$\begin{array}{ll} \text{Obter} & \mathbf{A} \\ \text{que minimiza} & c(\mathbf{A}) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(\mathbf{A}) \\ \text{tal que} & \mathbf{L}^T \mathbf{A} \leq V_{m\acute{a}x} \\ & A_{\min} \leq A_i \leq 0 \quad i = 1 \dots nb \\ \text{com} & \mathbf{K}(\mathbf{A}) \mathbf{U}(\mathbf{A}) = \mathbf{F} \end{array} \quad (8)$$

Onde:  $nb$  é o número de barras da treliça que forma a estrutura base;  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças atuantes na estrutura base;  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamento dos graus de liberdade da estrutura base;  $\mathbf{A}$  é o vetor de áreas da seção transversal das barras da estrutura base;  $\mathbf{K}(\mathbf{A})$  é a matriz de rigidez global da estrutura base;  $\mathbf{L}$  é o vetor dos comprimentos das barras da estrutura base;  $A_{\min}$  é o valor mínimo adotado para a área da seção transversal das barras.

A sensibilidade da função objetivo  $c$  em relação às variáveis de projeto  $A_i$  é dada pela Eq. (9) (ver Ohsaki, 2011). As sensibilidades das restrições explícitas são de fácil avaliação, uma vez que as restrições são funções diretas das variáveis de projeto  $A_i$ .

$$\frac{\partial c}{\partial x_j} = -\mathbf{u}_j^T \mathbf{k}_j \mathbf{u}_j \quad (9)$$

Onde:  $\mathbf{u}_j$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $j$ ;  $\mathbf{k}_j$  é a matriz de rigidez do elemento  $j$  no sistema global de coordenadas.

Neste trabalho, para avaliar se o elemento se encontra potencialmente em uma biela ou em um tirante utiliza-se sua tensão normal. Se o elemento  $i$  estiver submetido a compressão, utiliza-se um módulo de elasticidade  $E_C$  e, caso esteja submetido a tração, utiliza-se  $E_S$ , conforme mostrado na Eq. (10).

$$E_i = \begin{cases} E_C & \text{se } \sigma_i < 0 \text{ (compress\~ao)} \\ E_S & \text{se } \sigma_i \geq 0 \text{ (tra\~c\~ao)} \end{cases} \quad (10)$$

Onde:  $E_i$  é o módulo de elasticidade do elemento  $i$ ;  $E_S$  é o módulo de elasticidade de elementos de aço;  $E_C$  é o módulo de elasticidade de elementos de concreto.

## 4 RESULTADOS

Esta seção apresenta três exemplos de aplicação dos métodos de densidade e estrutura base para obtenção de modelos de bielas em tirantes para a viga-parede da Fig. 1, com três posições de carga. As dimensões apresentadas na figura estão em centímetros.

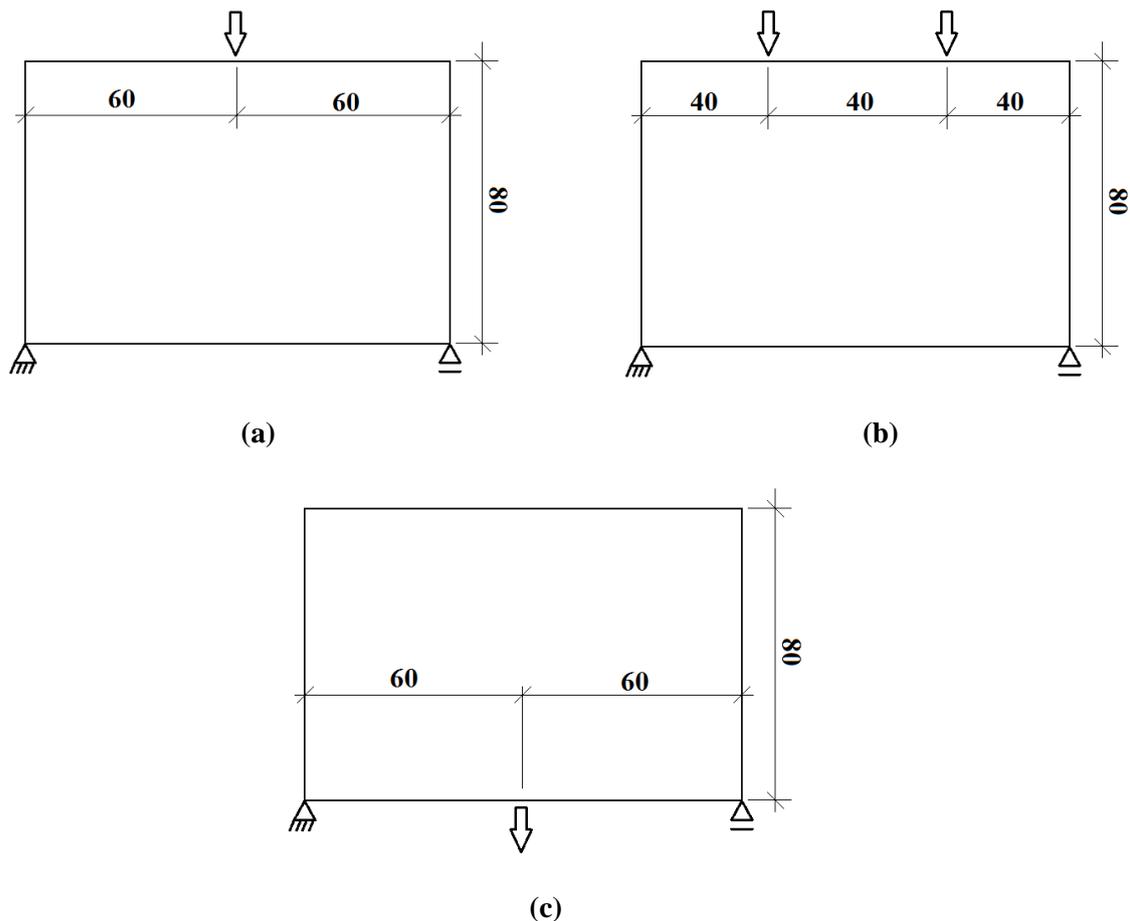


Figura 1. Estruturas analisadas: (a) Exemplo 1; (b) Exemplo 2; (c) Exemplo 3.

Nas análises com dois materiais foram considerados os seguintes valores para as propriedades dos materiais: 205 GPa para o módulo de elasticidade do aço; 21 GPa para o módulo de elasticidade do concreto; 0,2 para o coeficiente de Poisson. Nas análises com um material adotou-se o módulo de elasticidade do concreto. Todas as análises foram realizadas para carga de 260 kN.

Nas análises utilizando o método de densidade foi utilizada uma malha de 120 x 80 elementos, totalizando 9.600 elementos. O volume de material corresponde a 50% do volume do domínio estendido e o raio do filtro de sensibilidade é de 1,5 elementos. Utilizou-se a técnica de continuação com coeficiente de penalização variando de 1 a 3 com incremento de 0,5.

Nas análises utilizando o método da estrutura base utilizou-se um grid de 7 x 5 nós. As barras foram geradas considerando níveis de conectividade 2, 3 e 6. As malhas com os elementos lineares são apresentadas na Fig. 2.

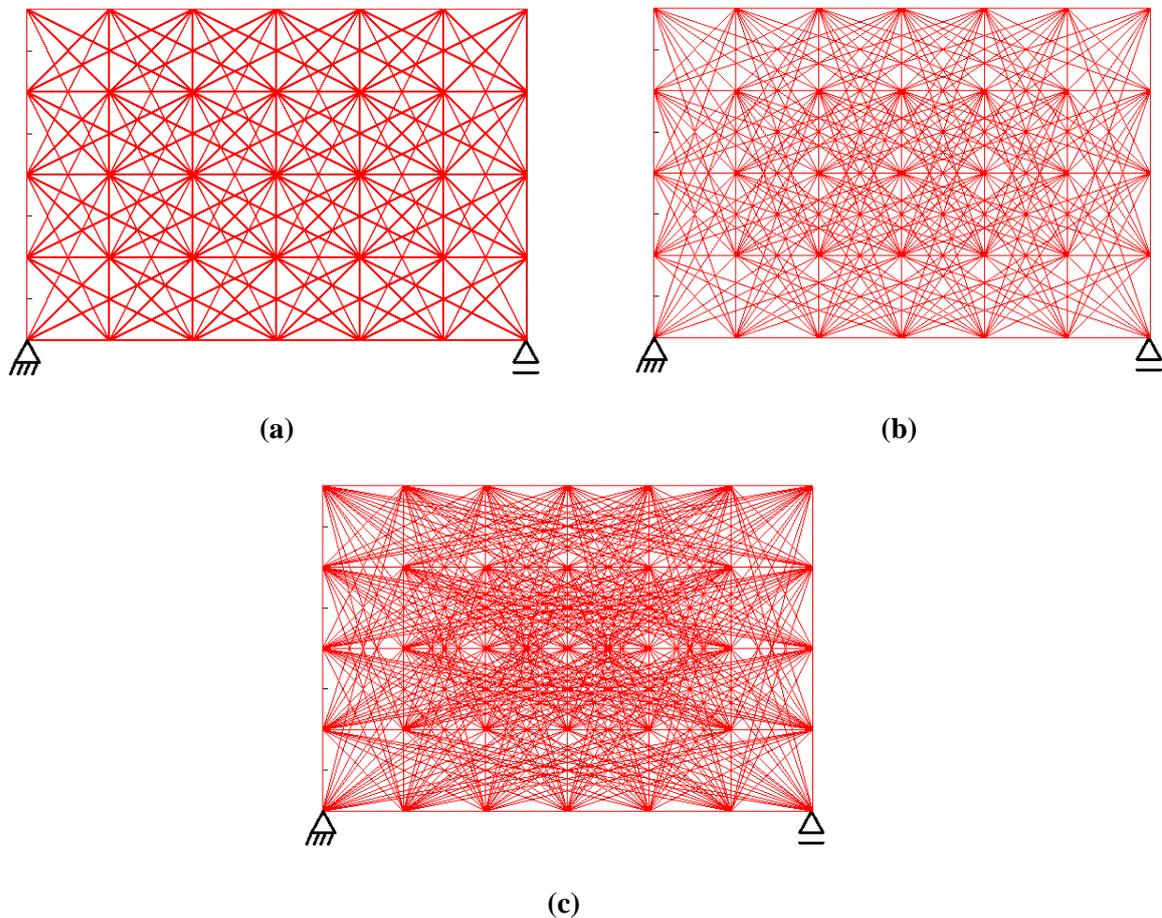
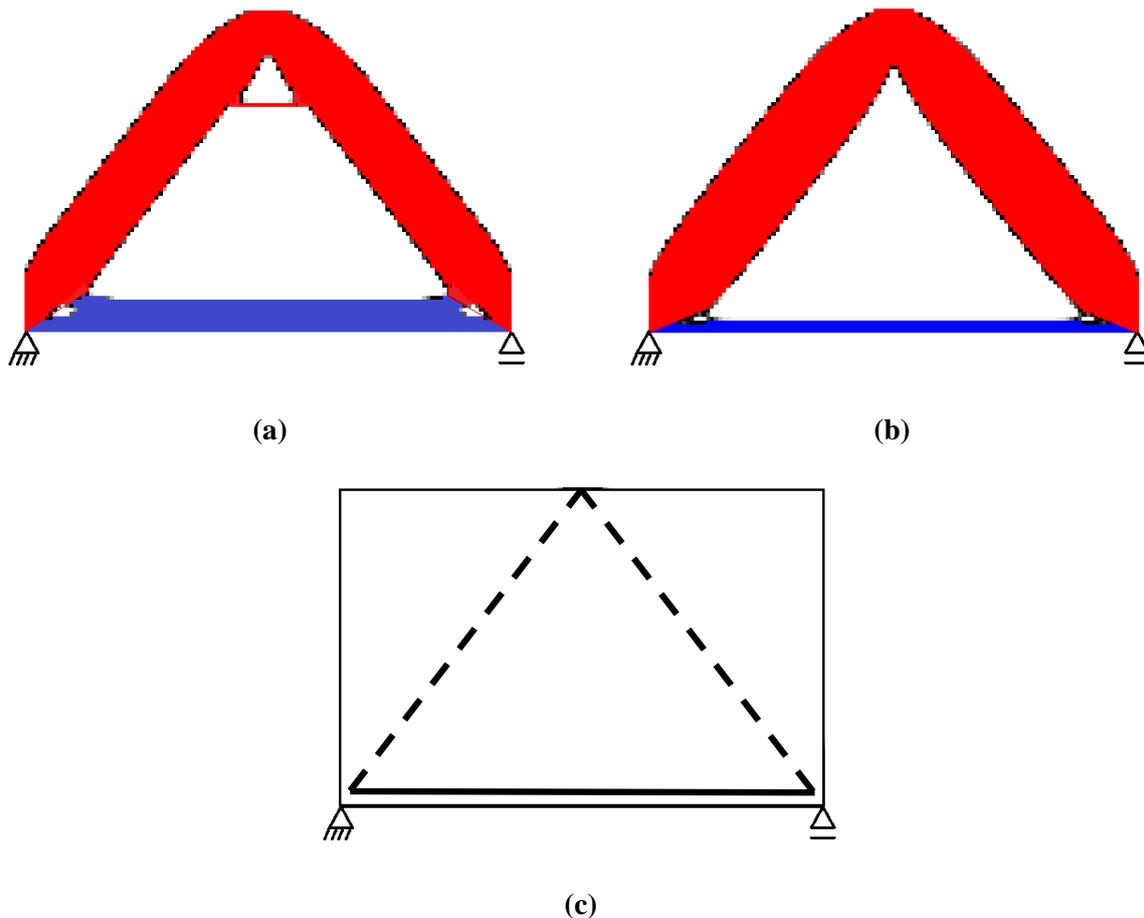


Figura 3. Malhas para o método da estrutura base: (a) grau de conectividade 2, (b) grau de conectividade 3 e (c) grau de conectividade 6.

#### 4.1 Exemplo 1: uma carga no topo da viga

Apresenta-se aqui os resultados obtidos para a estrutura da Fig. 1(a). Primeiramente, aplicou-se o método de densidade considerando-se um único material sólido com um único módulo de elasticidade e em seguida considerando-se dois materiais com relação tensão x deformação bi-linear. No caso do concreto, desconsiderou-se a resistência à tração e no caso do aço, desconsiderou-se a resistência à compressão.

Os resultados são apresentados na Fig. 3: a Fig. 3(a) apresenta o resultado para um único material sólido com um único módulo de elasticidade; a Fig. 3(b) apresenta a solução encontrada para dois materiais com relação tensão x deformação bi-linear; e a Fig. 3(c) apresenta o modelo de bielas e tirantes normalmente encontrado na literatura. Nesse último caso, as bielas são representadas com linha tracejada e os tirantes com linha contínua.



**Figura 3. Soluções do exemplo 1 pelo método da densidade: (a) com a consideração de apenas um material; (b) solução com dois materiais com comportamento bi-linear; (c) modelo de bielas e tirantes encontrado na literatura.**

Observa-se que ambos os resultados apresentados nas Figs. 3(a) e 3(b) reproduzem o modelo da literatura (Fig. 3(c)). A consideração de dois materiais, aço e concreto, faz com que haja uma redução da espessura da região tracionada, neste exemplo localizada na horizontal na parte inferior da viga. Tal se dá pelo aumento do módulo de elasticidade nesta, demandando uma menor quantidade de material para fazer frente ao nível de tensão provocado pelo carregamento nesta região. Como foi considerada a mesma quantidade prescrita global de material, houve naturalmente um aumento de material na região comprimida, neste exemplo localizada nas diagonais.

A mesma estrutura da Fig. 1(a) foi analisada utilizando-se o método da estrutura base foram utilizadas as mesmas dimensões, condições de contorno e posição de carga. A Fig. 4 apresenta os resultados obtidos para graus de conectividade 3 e 6. As barras tracionadas são representadas em azul e as comprimidas em vermelho. As soluções pela formulação clássica do método da estrutura base demandam a aplicação de um filtro final que elimine as barras mais finas, normalmente uma porcentagem do maior valor de área encontrado na solução. Para o primeiro caso foi utilizado um corte de 20% e para o segundo caso foi utilizado um corte de 30%.

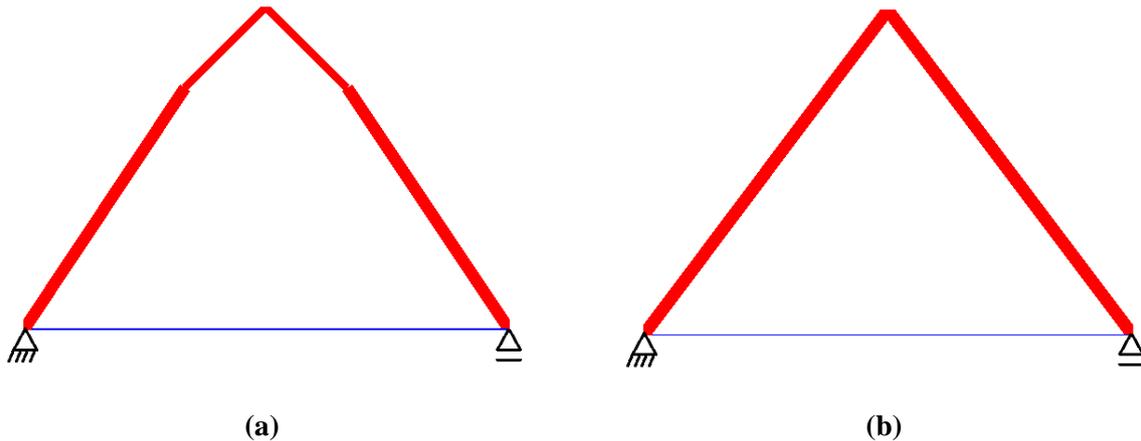


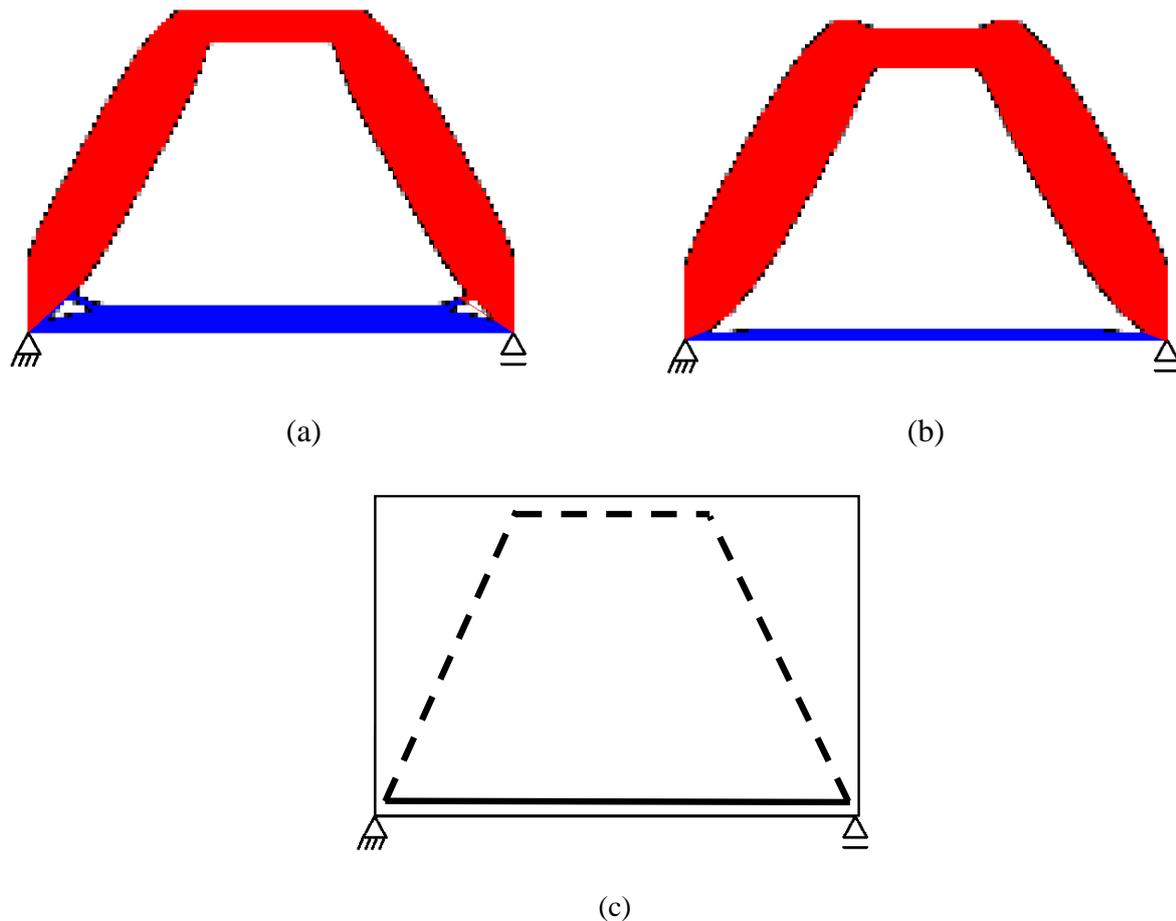
Figura 4. Soluções do exemplo 1 pelo método da estrutura base: (a) grau de conectividade 3; (b) grau de conectividade 6.

Como a forma clássica do método da estrutura base estabelece uma estrutura base à qual não se acrescentam elementos, atingir determinada solução desejada depende de a estrutura base conter essa solução. Neste exemplo, observa-se que a estrutura base apresentada na Fig. 2(b), com nível de conectividade 3, não contém barra ligando o ponto de aplicação de carga ao apoio. Assim, a solução obtida nesse caso e apresentada na Fig. 4(a), embora tente estabelecer essa ligação não o faz por meio de uma linha direta. Já a estrutura base apresentada na Fig. 2(c), com nível de conectividade 6, permite a obtenção da solução da Fig. 4(b), reproduzindo o resultado da literatura (Fig 3(c)). Observa-se ainda que, conforme esperado, a área da barra tracionada é sensivelmente menor que a das barras comprimidas.

## 4.2 Exemplo 2: duas cargas no topo da viga

Em seguida analisou-se a estrutura da Fig. 1(b). Primeiramente, aplicou-se o método de densidade considerando-se um único material sólido com um único módulo de elasticidade e em seguida considerando-se dois materiais com relação tensão x deformação bi-linear, desconsiderando a resistência à tração do concreto e a resistência à compressão do aço,

Os resultados são apresentados na Fig. 5: a Fig. 5(a) apresenta o resultado para um único material sólido com um único módulo de elasticidade; a Fig. 5(b) apresenta a solução encontrada para dois materiais com relação tensão x deformação bi-linear; e a Fig. 5(c) apresenta o modelo de bielas e tirantes normalmente encontrado na literatura. Nesse último caso, as bielas são representadas com linha tracejada e os tirantes com linha com linha contínua.



**Figura 5. Soluções do exemplo 2 pelo método da densidade: (a) com a consideração de apenas um material; (b) solução com dois materiais com comportamento bi-linear; (c) modelo de bielas e tirantes encontrado na literatura.**

Novamente observa-se que ambos os resultados apresentados nas Figs. 5(a) e 5(b) reproduzem o modelo da literatura (Fig. 5(c)). Tal como no exemplo anterior, a consideração de dois materiais, aço e concreto, faz com que haja uma redução da espessura da região tracionada, neste exemplo localizada na horizontal na parte inferior da viga. Como foi considerada a mesma quantidade prescrita global de material, houve naturalmente um aumento de material na região comprimida, neste exemplo localizada nas diagonais.

A mesma estrutura da Fig. 2(a) foi analisada utilizando-se o método da estrutura base foram utilizadas as mesmas dimensões, condições de contorno e posição de carga. A Fig. 6 apresenta os resultados obtidos para graus de conectividade 2 e 6. As barras tracionadas são representadas em azul e as comprimidas em vermelho. As soluções pela formulação clássica do método da estrutura base demandam a aplicação de um filtro final que elimine as barras mais finas, normalmente uma porcentagem do maior valor de área encontrado na solução. Para o primeiro caso foi utilizado um corte de 20% e para o segundo caso foi utilizado um corte de 30%.

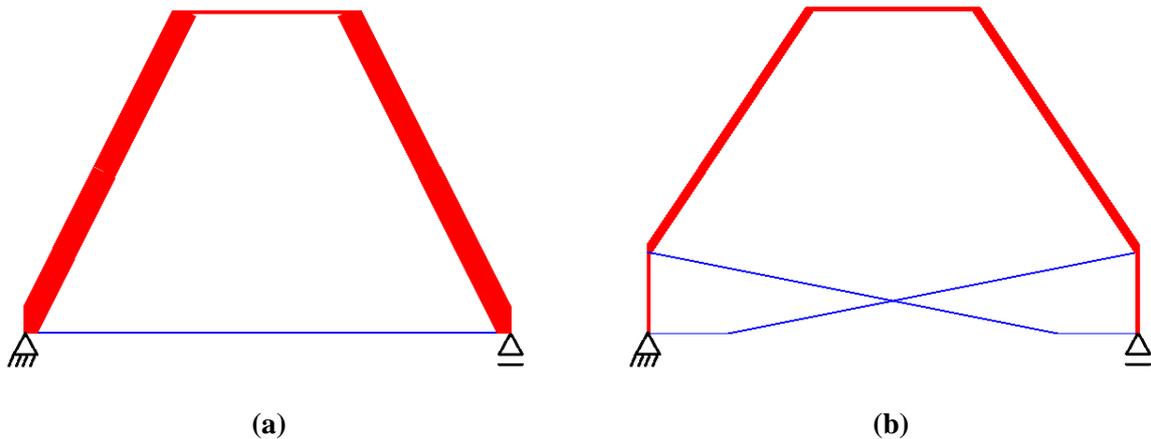


Figura 6. Soluções do exemplo 2 pelo método da estrutura base: (a) grau de conectividade 2; (b) grau de conectividade 6.

Neste exemplo, apesar de as estruturas base apresentadas na Fig. 2(a) e 2(c), com níveis de conectividade 2 e 6m respectivamente, conterem barra ligando o ponto de aplicação de carga ao apoio, a solução da Fig. 6(a) difere da apresentada na Fig. 6(b). A solução obtida com nível de conectividade 2 (Fig. 6(a)) reproduz a solução da literatura (Fig. 5(c)). Já a solução obtida com nível de conectividade 6 (Fig. 6(b)) não seria adequada para o detalhamento de uma estrutura de concreto armado.

### 4.3 Exemplo 3: uma carga na base da viga

A fim de avaliar a potencialidade desse tipo de abordagem para além dos modelos de bielas e tirantes, apresentam-se na Fig. 7 as soluções obtidas para a estrutura da Fig. 1(c). No método da estrutura base foi usado grau de conectividade 6 e corte de 20%.

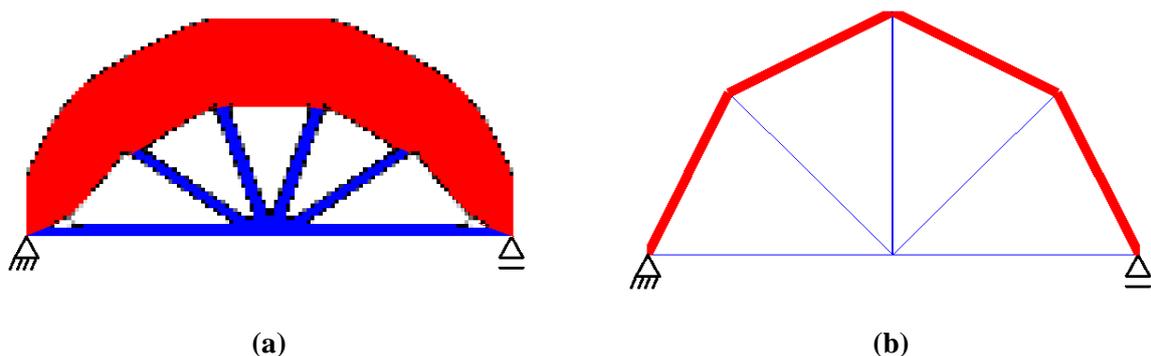


Figura 7. Soluções do exemplo 3: (a) pelo método da densidade; (b) pelo método da estrutura base.

Comparando-se os resultados da Fig. 7, vê-se que ambos têm uma distribuição de barras comprimidas em forma de arco ligando os apoios. No entanto, na solução pelo método de densidade (Fig. 7(a)) esse arco é mais suave e mais abatido. Tal se dá pelo fato de o *grid* de nós ser relativamente esparsa. O aumento no número de nós no método da estrutura base proporcionaria uma solução mais próxima da obtida com o método de densidade.

## 5 CONCLUSÕES

Observa-se pelos resultados que ambos os métodos apresentam limitações para simulação de estruturas de concreto armado. O método de densidade apresenta maior flexibilidade para posicionamento do material. No entanto, a solução resultante frequentemente não respeita o posicionamento de barras de aço em locais normalmente utilizados em projeto. Por outro lado, o método da estrutura base apresenta boas soluções desde que a estrutura base e o nível de conectividade seja adequado. Além disso, a necessidade de um filtro com um valor de corte para eliminar as barras muito finas pode gerar soluções que não se encontram em equilíbrio.

Este trabalho ainda apresenta várias possibilidades para estudos futuros. Observa-se que o método de densidade é mais adequado para a representação dos elementos de concreto, enquanto que o método da estrutura base é mais adequado para a representação dos elementos de aço. Assim, o encaminhamento natural é um processo misto, com elementos planos representando o concreto e elementos lineares para representando o aço. Os elementos de concreto seriam tratados por uma abordagem em densidade e os elementos de aço em uma abordagem típica de estrutura base.

## AGRADECIMENTOS

LCM agradece à CAPES pela bolsa de estudos durante sua pesquisa de mestrado. SRMA agradece ao auxílio financeiro do CNPq por meio dos projetos de números 477905/2013-7, 309035/2014-7 e 202095/2015-0.

## REFERENCIAS

- Ali, M. A.; White, R. N., 2000. Consideration of compression stress bulging and strut degradation in truss modeling of ductile and brittle corbels. *Engineering Structures*, 23(3): 240-249.
- Ali, M.A.; White, R.N., 2001. Automatic generation of truss model for optimal design of reinforced concrete structures. *ACI Structural Journal*, 98:431-442.
- Bendsøe, M.P., 1989. Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct Optim*, 1(4): 193-202.
- Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N., 1988. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2): 197-224.
- Bendsøe, M. P.; Sigmund, O., 2003. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer, New York.
- Bruggi, M., 2009. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. *Computers and Structures*, 87: 1483-1495.
- Bruggi, M., 2010. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. *Advances in Structural Engineering*, 13(6): 1116-1181.
- Christensen, P.; Klarbring, A., 2009. *An introduction to structural optimization*. Springer, Berlin.

- Deaton, J. D.; Grandhi, R. V., 2014. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1): 1-38.
- Díaz, A.; Sigmund, O., 1995. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 10(1): 40-45.
- Dorn, W.; Gomory, R.; Greenberg, H., 1964. Automatic design of optimal structures. *J Mecanique*, 3(1): 25-52.
- Gaynor, A.T.; Guest, J.K.; Moen, C.D., 2013. Reinforced concrete force visualization and design using bilinear truss-continuum topology optimization. *Journal of Structural Engineering*, 139, 607-618.
- Jog, C. S.; Haber, R., 1996. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130(3-4): 203-226.
- Liang, Q.Q.; Xie Y.M.; Steven G.P., 2000. Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure. *ACI Structural Journal*, 97(2): 322-332.
- Liang, Q.Q.; Xie Y.M.; Steven G.P., 2001. Performance-based optimization for strut-tie modeling of structural concrete. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 128(6): 815-823.
- Ohsaki, M., 2010. Optimization of finite dimensional structures. CRC Press.
- Pantoja, J.C., 2004. *Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes*. Tese (doutorado). Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 240 f.
- Rozvany, G.I.N.; Zhou, M.; Birker, T., 1992. Generalized shape optimization without optimization. *Structural Optimization*, 4(3): 250-252.
- Sigmund, O., 2001. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(1): 120-127.
- Sigmund, O.; Maute, K., 2013. Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Berlin, 48(6): 1031-1055.
- Sigmund, O.; Petersson, J., 1998. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealign with checkerboards, mesh-dependencies and local-minima. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 16(1): 68-75.
- Victoria, M.; Querin, O.M.; Mart, P., 2011. Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(2): 247-258.
- Zhou, M.; Rozvany, G.I.N., 1991. The COC algorithm, Part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89: 309-336.