



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

CONSIDERAÇÃO DE BARRAS RÍGIDAS E INEXTENSÍVEIS NA ANÁLISE MATRICIAL ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Guilherme Coelho Gomes Barros

Luiz Fernando Martha

gbarros@tecgraf.puc-rio.br

lfm@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente 225 - Edifício Cardeal Leme sala 301 - Gávea, Rio de Janeiro,
22451-900, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo. *Este trabalho apresenta uma metodologia robusta e teoricamente consistente para consideração de barras rígidas e inextensíveis na análise de estruturas pelo método da rigidez direta. Esta metodologia é baseada na adição de equações de restrição ao problema de minimização da energia potencial total, podendo, ainda, ser acoplada à Análise Matricial preservando sua generalidade. A motivação principal para a implementação dessa metodologia é o desenvolvimento de software educacional para análise de estruturas. São deduzidas as equações adicionais necessárias para a consideração desses tipos de restrições nas deformações das barras. O problema é formulado através da programação matemática, minimizando a energia potencial total do modelo, sujeito às restrições no comportamento das barras. Esta formulação permite ainda a obtenção dos esforços internos nas barras com restrições por meio dos multiplicadores de Lagrange. Por fim, são apresentados resultados de verificação da metodologia proposta.*

Palavras-Chave: *Barras Rígidas, Barras Inextensíveis, Análise Matricial, Programação Matemática.*

1 INTRODUÇÃO

A análise de estruturas hiperestáticas é um dos principais objetos de estudo em todos os cursos de graduação em engenharia civil. Classicamente, resoluções para esses problemas são obtidas pelo Método das Forças ou pelo Método dos Deslocamentos. Aliado a esses métodos de solução são feitas hipóteses simplificadoras para viabilizar a resolução manual. Em geral, essas hipóteses envolvem restrições nas deformações das barras do modelo estrutural, em que vale ressaltar a consideração de barras inextensíveis – cuja energia de deformação axial é nula – e barras rígidas – cuja energia de deformação total é nula.

Essas hipóteses alteram os resultados, mas podem viabilizar a resolução manual de estruturas complexas em algumas situações. Sua consideração era usual em problemas reais de engenharia, ficando a cargo do autor da concepção estrutural como ferramenta de modelagem. Entretanto, com o desenvolvimento computacional e de técnicas de Análise Matricial em conjunto com a Computação Gráfica, o uso de hipóteses simplificadoras em problemas reais perdeu espaço.

Ainda assim, essas hipóteses continuam a ser utilizadas nos cursos de graduação, uma vez que a solução manual provê grande compreensão do comportamento estrutural. Um programa iterativo com o qual o aluno possa verificar a solução manual para uma estrutura qualquer, como o Ftool (www.tecgraf.puc-rio.br/ftool), pode ser um grande facilitador na aprendizagem. Tal programa deve ser capaz de analisar estruturas segundo as hipóteses simplificadoras, contudo fazer isso de maneira genérica não é tão direto quanto à solução manual.

Uma alternativa para considerar de maneira genérica restrições nas deformações das barras, pelo Método dos Deslocamentos, é adotar um valor grande para a área da seção transversal da barra, para simular a hipótese de barra inextensível, e também adotar um valor grande para o momento de inércia da seção transversal, para simular a hipótese de barra infinitamente rígida. Entretanto, esses “truques” numéricos dependem dos valores fictícios adotados para as propriedades geométricas da seção transversal e podem ocasionar matrizes de rigidez globais mal condicionadas. Realmente, essa é a estratégia adotada até o momento pelo Ftool e não é incomum que problemas numéricos ocorram.

Desse modo, a principal motivação para este trabalho é apresentar uma metodologia para consideração de barras rígidas e inextensíveis que seja mais robusta e teoricamente consistente. Esta metodologia é baseada na adição de equações de restrição ao problema de minimização da energia potencial total, podendo, ainda, ser acoplada à Análise Matricial preservando sua generalidade.

Além de deduzir as equações adicionais necessárias para a solução, será apresentada uma maneira de resolver o problema emergente da formulação. Por fim, serão apresentados resultados de verificação da metodologia proposta e de comparação com a metodologia que faz uso de um valor grande de área da seção transversal, para barras inextensíveis, e de um valor grande de momento de inércia, para barras rígidas.

2 FORMULAÇÃO

A terminologia barra inextensível remete diretamente à ideia de uma barra cuja rigidez axial é infinita, ao passo que barra rígida seria infinitamente rígida em todos os aspectos. Dado que tal imposição é irreal e incompatível com a Análise Matricial, pode-se tentar

alcança-la dentro de uma tolerância numérica, ou seja, fazer com que uma barra seja tão rígida que ela se comporta como infinitamente rígida face às demais barras do sistema.

A implementação computacional de tal abordagem seria simplesmente criar uma rigidez muito alta para as barras designadas rígidas. Por mais simples que seja esse procedimento, ele pode levar a resultados espúrios, como será mostrado. Isso se deve ao fato da matriz de rigidez global ser mal condicionada, *i.e.* possuir termos de ordem de grandeza muito diferentes, o que pode conduzir a erros numéricos na resolução do sistema.

Neste trabalho propõem-se, alternativamente, formular o problema como minimização da energia potencial total, sujeito a restrições adicionais que impossibilitam a deformação nos elementos rígidos e inextensíveis. Desse modo, o problema a ser resolvido torna-se,

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f} , \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.1)$$

no qual, \mathbf{d} é o vetor dos deslocamentos nodais, \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{f} é o vetor das cargas nodais, \mathbf{A} é a matriz de restrições e \mathbf{q} é o vetor do lado direito da restrição de igualdade.

Na formulação da Eq. (2.1), vale ressaltar que, se não houver restrições, a solução será obtida impondo que a energia potencial total seja mínima:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f} \right)}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0} , \quad (2.2)$$

ou seja,

$$\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0} , \quad (2.3)$$

que é exatamente a equação de equilíbrio obtida na Análise Matricial de estruturas.

2.1 Restrições

Precisa-se então demonstrar como obter as equações adicionais de restrições que possibilitarão considerar barras rígidas e inextensíveis na Análise Matricial. Essas equações são formuladas para cada tipo de elemento, inextensível ou rígido, no sistema de eixos local.

2.1.1 Barras Inextensíveis

Pode-se assumir uma barra inextensível como uma barra cuja deformação axial é nula, ou seja,

$$\varepsilon_{xx}^a = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad (2.4)$$

em que, ε_{xx}^a é a deformação normal devido ao efeito axial uniforme e u é o campo de deslocamentos axiais na fibra do centroide da seção transversal.

Sabe-se, da Análise Matricial, que o campo de deslocamentos de uma barra pode ser descrito em termos dos deslocamentos e rotações das suas extremidades, chamados de deslocabilidades (Figura 1). O campo de deslocamento axiais é dado por:

$$u(x) = N_1(x)d'_1 + N_4(x)d'_4, \quad (2.5)$$

em que, $N_1(x) = 1 - x/L$ e $N_4(x) = x/L$ são as chamadas funções de forma.

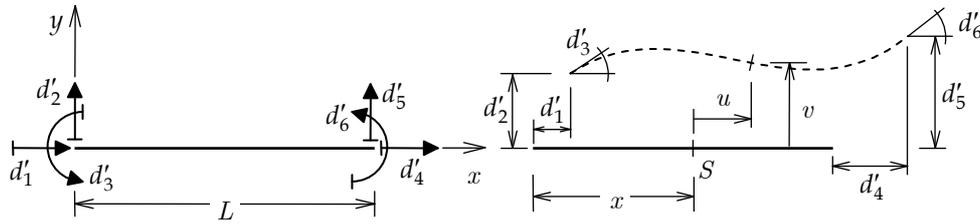


Figura 1. Eixos locais e deslocabilidades de uma barra de pórtico plano isolada

(Martha, 2010, Fig. 9.1)

Substituindo a Eq. (2.5) na Eq. (2.4) obtém-se

$$d'_4 - d'_1 = 0, \quad (2.6)$$

que é a restrição a ser adicionada para cada barra inextensível.

2.1.2 Barras Rígidas

No caso de barras rígidas, deve-se considerar a Eq. (2.4) conjuntamente com a restrição de que a curvatura, componente de deformação associada à flexão, deve ser nula, isto é,

$$\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (2.7)$$

em que, κ é a curvatura da seção – para análise linear pela teoria de viga de Bernoulli-Euler – e v é o campo de deslocamentos transversais no eixo da barra que passa pelo centroide da seção transversal.

Sabe-se que v pode ser descrito em termos das deslocabilidades (Figura 1) como

$$v(x) = N_2(x)d'_2 + N_3(x)d'_3 + N_5(x)d'_5 + N_6(x)d'_6, \quad (2.8)$$

em que, $N_2(x) = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$, $N_3(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2$, $N_5(x) = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$ e $N_6(x) = -x^2/L + x^3/L^2$ são as demais funções de forma da barra.

Substituindo a Eq. (2.8) na Eq. (2.7) obtém-se,

$$\left(12 \frac{d'_2}{L^3} + 6 \frac{d'_3}{L^2} - 12 \frac{d'_5}{L^3} + 6 \frac{d'_6}{L^2}\right)x + \left(-6 \frac{d'_2}{L^2} - 4 \frac{d'_3}{L} + 6 \frac{d'_5}{L^2} - 2 \frac{d'_6}{L}\right) = 0, \quad (2.9)$$

que deve ser válida para todo $x \in [0, L]$. O que só ocorre se ambos, termo independente e o termo em x , forem nulos.

Anulando o termo independente chega-se à

$$-3\frac{d'_2}{L} - 2d'_3 + 3\frac{d'_5}{L} - d'_6 = 0 . \quad (2.10)$$

Levando o termo em x a zero tem-se

$$2\frac{d'_2}{L} + d'_3 - 2\frac{d'_5}{L} + d'_6 = 0 . \quad (2.11)$$

Por adição da Eq. (2.10) com a Eq. (2.11) encontra-se

$$d'_5 - d'_2 = d'_3L . \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. (2.12) na Eq. (2.11), obtém-se

$$d'_5 - d'_2 = d'_6L , \quad (2.13)$$

ou seja,

$$d'_3 = d'_6 . \quad (2.14)$$

O conjunto de equações linearmente independente para as restrições de barra inextensível, Eq. (2.6), e de barra infinitamente rígida, Eq. (2.12) e Eq. (2.14), pode ser representado matricialmente como

$$\mathbf{A}'\mathbf{d}' = \mathbf{q}' , \quad (2.15)$$

onde,

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (2.16)$$

em que, $(.)'$ representa que a equação está no eixo local do elemento.

Ressalta-se que para barras inextensíveis toma-se apenas a primeira linha dessa matriz.

2.2 Matriz de Restrições Global da Estrutura

As restrições foram formuladas no sistema de eixos locais, mas devem ser válidas para qualquer eixo de referência. Logo, pode-se formular a matriz num sistema de eixos qualquer como

$$\mathbf{A}^R = \mathbf{A}'\mathbf{R} , \quad (2.17)$$

sendo \mathbf{A}^R a matriz de restrições rotacionada e \mathbf{R} a matriz de rotação do sistema de eixos do elemento para o sistema desejado. Desse modo, pode-se rotacionar a matriz de restrições para o sistema de eixos global da estrutura.

De posse da matriz de restrições no sistema de eixos global pode-se montar a matriz de restrições globais da estrutura. Para tal, deve-se apenas empilhar as restrições de cada elemento, não havendo soma como se dá para a matriz de rigidez global.

2.3 Condições de Contorno

Em todas as restrições encontradas até esse ponto \mathbf{q} era um vetor nulo. Contudo, na presença de deslocamentos prescritos as componentes desse vetor são alteradas. Sempre que um deslocamento é prescrito, seu grau de liberdade correspondente pode ser eliminado do sistema. Faz-se isso multiplicando o valor prescrito pela coluna da matriz de restrições e adicionado sua contribuição ao lado direito da equação.

Ou seja, pode-se separar o vetor de deslocamentos nodais em livres e prescritos,

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^L \\ \mathbf{d}^P \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

em que, \mathbf{d}^L são os deslocamentos dos graus de liberdade livres e \mathbf{d}^P são os deslocamentos prescritos. Desse modo, as restrições podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^L & \mathbf{A}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^L \\ \mathbf{d}^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.19)$$

Isolando os deslocamentos livres (incógnitas do problema) tem-se

$$\mathbf{A}^L \mathbf{d}^L = -\mathbf{A}^P \mathbf{d}^P. \quad (2.20)$$

Como procedimento análogo também é realizado para a matriz de rigidez global, a Eq. (2.1) pode ser formulada apenas em termos dos deslocamentos livres. Sendo, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^L$ e

$$\mathbf{q} = -\mathbf{A}^P \mathbf{d}^P. \quad (2.21)$$

3 PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Como supracitado, a consideração de barras rígidas e inextensíveis na Análise Matricial pode ser resolvida como uma minimização de uma função quadrática – energia potencial total – sujeito a restrições lineares adicionais, Eq. (2.1). Todavia, nenhum *solver* especial é necessário se a teoria dos multiplicadores de Lagrange (1811) for empregada. A Lagrangiana do problema em questão é dada por

$$L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{f} + (\mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.1)$$

Consequentemente, a condição de ótimo, ou condição de KKT (Kuhn & Tucker, 1951), desse problema será dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{d}} &= \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \mathbf{d} - \mathbf{q} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uma formulação semelhante, bem como métodos para determinação das variáveis do problema, pode ser encontrada em (Cook et al., 2002, Cap. 13). Entretanto, esses autores não abordam explicitamente as restrições de barras inextensíveis e infinitamente rígidas, incluindo deslocamentos prescritos. Além disso, na sequência, é demonstrado que os multiplicadores de Lagrange estão associados aos esforços internos das barras correspondentes às deformações restritas. Essa correspondência apenas é mencionada por Cook et al. (2002) sem uma demonstração.

3.1 Resolução do Sistema de Equações

A Eq. (3.2) pode ser vista como um sistema “de duas equações a duas incógnitas”. Isolando \mathbf{d} na primeira equação tem-se

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}), \quad (3.3)$$

que pode ser reescrito como

$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.4)$$

em que,

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}, \quad (3.5)$$

são os deslocamentos do problema sem restrições, e

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T. \quad (3.6)$$

Essa matriz pode ser obtida sem a inversão explícita da matriz \mathbf{K} , resolvendo um sistema de equações para cada coluna de \mathbf{A}^T , ou seja, resolvendo m sistemas, sendo m o número de restrições. Pode-se decompor a matriz \mathbf{K} a priori – durante a solução da Eq. (3.5) – para tornar essa operação mais eficiente.

Substituindo na segunda equação tem-se

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{A}\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}, \quad (3.7)$$

ou ainda,

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}, \quad (3.8)$$

em que, $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T$.

Desse modo, pode-se determinar $\boldsymbol{\lambda}$ por,

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{q}). \quad (3.9)$$

Por fim, de posse dos multiplicadores de Lagrange, pode-se encontrar os deslocamentos do problema com restrições através da Eq. (3.2)₁. Entretanto, não é preciso resolver mais um sistema uma vez que a equação

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.10)$$

pode ser reescrita como,

$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.11)$$

4 ESFORÇOS INTERNOS

Trazendo a Eq. (3.2)₁ para o nível do elemento tem-se

$$\mathbf{K}'\mathbf{d}' - \mathbf{f}' + (\mathbf{A}')^T \boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{0} , \quad (4.1)$$

em que \mathbf{K}' é a matriz de rigidez local do elemento, \mathbf{d}' são os deslocamento dos nós do elemento em seu sistema local, \mathbf{f}' são as forças internas atuantes nas extremidades do elemento e $\boldsymbol{\lambda}'$ são componentes do vetor global $\boldsymbol{\lambda}$ correspondentes às restrições daquele elemento. Ou seja, $\boldsymbol{\lambda}'$ é escalar para barras inextensíveis e possui três componentes para barras rígidas, o mesmo número de restrições do elemento. Logo, $\boldsymbol{\lambda}'$ é inexistente para barras sem restrições.

Isolando \mathbf{f}' na Eq. (4.1), encontra-se a equação geral para as forças internas,

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\mathbf{d}' + (\mathbf{A}')^T \boldsymbol{\lambda}' . \quad (4.2)$$

Assim, para barras sem restrições as forças internas são dadas por $\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\mathbf{d}'$, exatamente como na Análise Matricial. Observa-se que para barras com restrições os termos do produto $\mathbf{K}'\mathbf{d}'$ correspondentes às restrições são nulos, ou seja, os esforços são dados apenas pelos multiplicadores de Lagrange. Na próxima seção serão mostrados exemplos em que os esforços internos associados às deformações restritas são calculados diretamente através da Eq. (4.2).

5 RESULTADOS

5.1 Barra de treliça inextensível

Propõe-se o exemplo da Figura 2 para elucidar a metodologia proposta. Trata-se de uma barra inextensível de comprimento L , cujo módulo de elasticidade é E e a área da seção transversal é A , sujeita a ação de uma carga axial P .

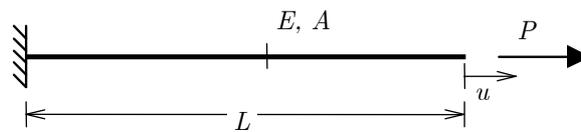


Figura 2. Barra de treliça inextensível

Para análise de tal estrutura pode-se tomar apenas um grau de liberdade, no qual se dá a aplicação da carga. Desse modo, o conjunto de equações a ser solucionado é

$$\begin{aligned} \left(\frac{EA}{L} \right) u - P + \lambda &= 0 , \\ u &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que, a matriz de restrição $\mathbf{A} = \{1\}$, a matriz de rigidez $\mathbf{K} = \{EA/L\}$, o vetor de cargas $\mathbf{f} = \{P\}$ e o vetor da restrição $\mathbf{q} = \{0\}$.

Obtém-se então a solução

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ \lambda &= P \end{aligned} \quad (5.2)$$

Como o deslocamento obtido é nulo, a condição de a barra ser inextensível é satisfeita. Além disso, observa-se que o esforço normal na barra, obtido através dos multiplicadores de Lagrange é $N = \lambda = P$, o que condiz com o esperado.

5.2 Viga Parcialmente Rígida

Este exemplo consiste de uma viga de rigidez EI e comprimento $2L$ com uma carga concentrada aplicada no meio do vão. Ademais, metade de sua extensão é considerada rígida, como mostrado na Figura 3. Sua finalidade é verificar a metodologia proposta numa estrutura um pouco mais complexa do que a da Figura 2. São considerados neste exemplo apenas os graus de liberdade transversal e de rotação, como ilustrado na Figura 4.

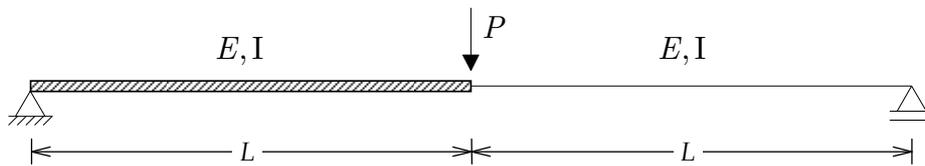


Figura 3. Viga parcialmente rígida

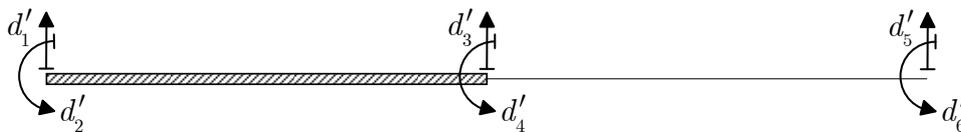


Figura 4. Graus de liberdade do modelo

A matriz de rigidez da estrutura, com as condições de contorno impostas, é dada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 \frac{EI}{L} & -6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & 0 \\ -6 \frac{EI}{L^2} & 24 \frac{EI}{L^3} & 0 & 6 \frac{EI}{L^2} \\ 2 \frac{EI}{L} & 0 & 8 \frac{EI}{L} & 2 \frac{EI}{L} \\ 0 & 6 \frac{EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (5.3)$$

o vetor de forças é dado por

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

A matriz de restrições é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -L & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

impondo as condições de contorno, tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -L & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Aplicando a Eq. (3.5) encontram-se os deslocamentos da estrutura sem restrições,

$$\tilde{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -L^2 P / 4EI \\ -L^3 P / 6EI \\ 0 \\ L^2 P / 4EI \end{Bmatrix}. \quad (5.7)$$

Analisando esse vetor verifica-se a simetria da estrutura, pois $d_2 = -d_6$ e $d_4 = 0$.

Prosseguindo da Eq. (3.6) até a Eq. (3.11) encontra-se

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ LP/2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -L^2 P / 12EI \\ -L^3 P / 12EI \\ -L^2 P / 12EI \\ L^2 P / 6EI \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

Pode-se verificar que a simetria é perdida, que as restrições são atendidas e que o deslocamento do ponto de aplicação da carga torna-se menor, todos resultados esperados.

Os esforços no trecho rígido são obtidos empregando a Eq. (4.2). Desse modo,

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}' + \mathbf{A}'^T \boldsymbol{\lambda}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P/2 \\ 0 \\ -P/2 \\ PL/2 \end{Bmatrix}. \quad (5.9)$$

Observa-se que as forças internas devido ao produto $\mathbf{K}' \mathbf{d}'$ são nulas, o que confirma que a restrição de barra rígida foi atendida.

Para o trecho flexível, tem-se

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}' = \begin{Bmatrix} -P/2 \\ -PL/2 \\ P/2 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Assumindo $E = 25 \text{ GPa}$, $I = 1.067 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $L = 5 \text{ m}$ e $P = 10 \text{ kN}$, pode-se representar graficamente os resultados obtidos.

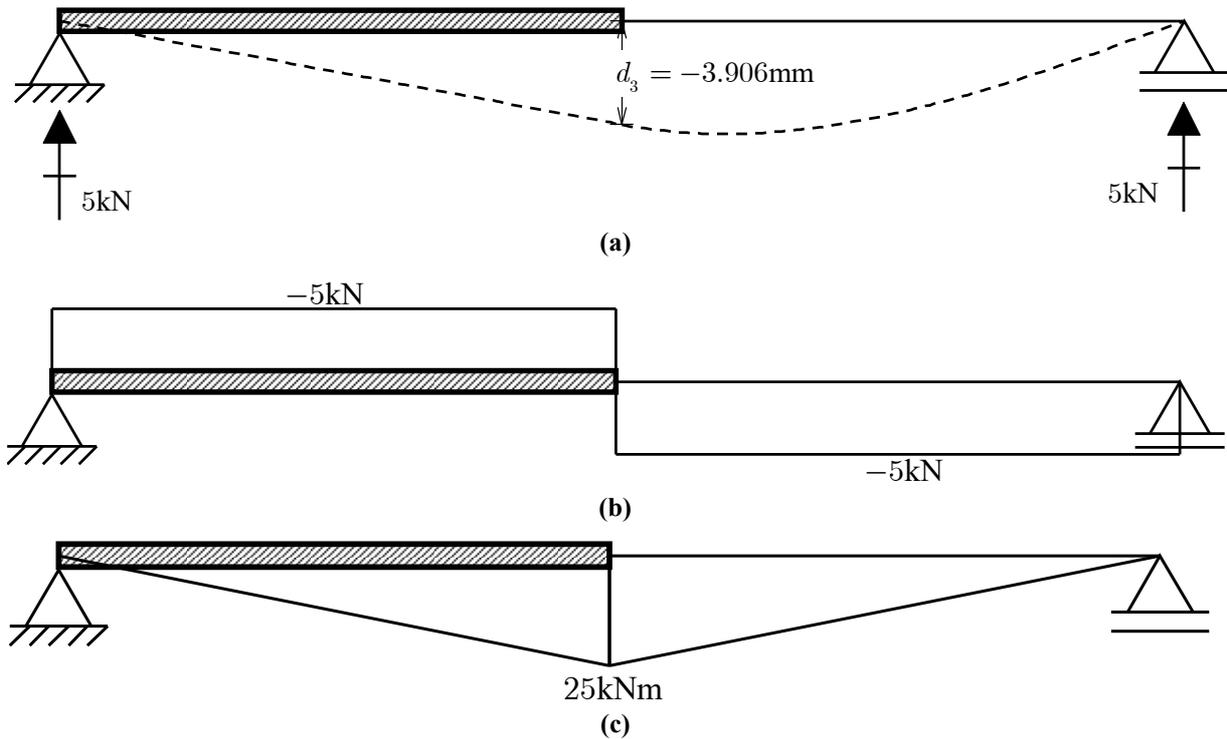


Figura 5. Resultados numéricos de viga parcialmente rígida: (a) deslocamentos, (b) esforço cortante e (c) momento fletor

5.3 Pórtico Isostático

O exemplo da Figura 6 é proposto para comparação da metodologia proposta com a consideração de barra inextensível através de uma área de seção transversal infinitamente grande. Todas as barras possuem $E = 200 \text{ GPa}$, seção transversal retangular com $b = 25 \text{ mm}$ e $h = 50 \text{ mm}$ e são consideradas inextensíveis. O valor adotado como área “infinita” é $A = 10^7 \text{ m}^2$.

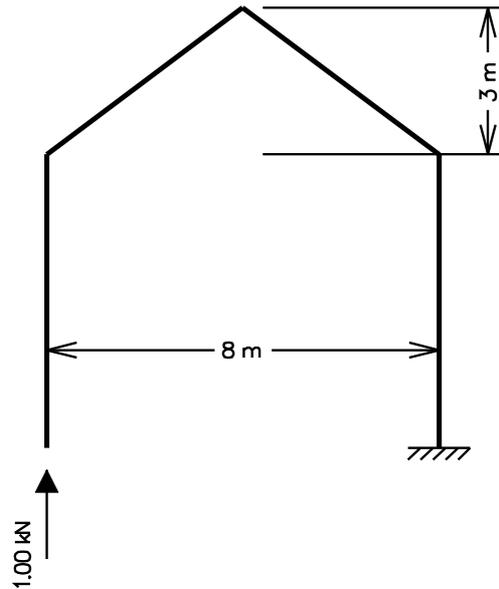


Figura 6. Pórtico Isostático

A comparação entre os resultados obtidos através das duas metodologias é mostrada na Figura 7. Pode-se observar que a solução pela área grande, devido a erros numéricos, não atende ao equilíbrio global nem ao local.

A escolha do valor da área “infinita” influencia diretamente nos resultados, um valor mais próximo da rigidez da estrutura implicará em resultados com menos erros numéricos. Todavia, se afastará da hipótese almejada: barras inextensíveis. Além disso, o valor ideal, para o qual a solução não apresenta inconsistências e as hipóteses são satisfatoriamente atendidas, caso exista, será diferente para cada estrutura analisada.

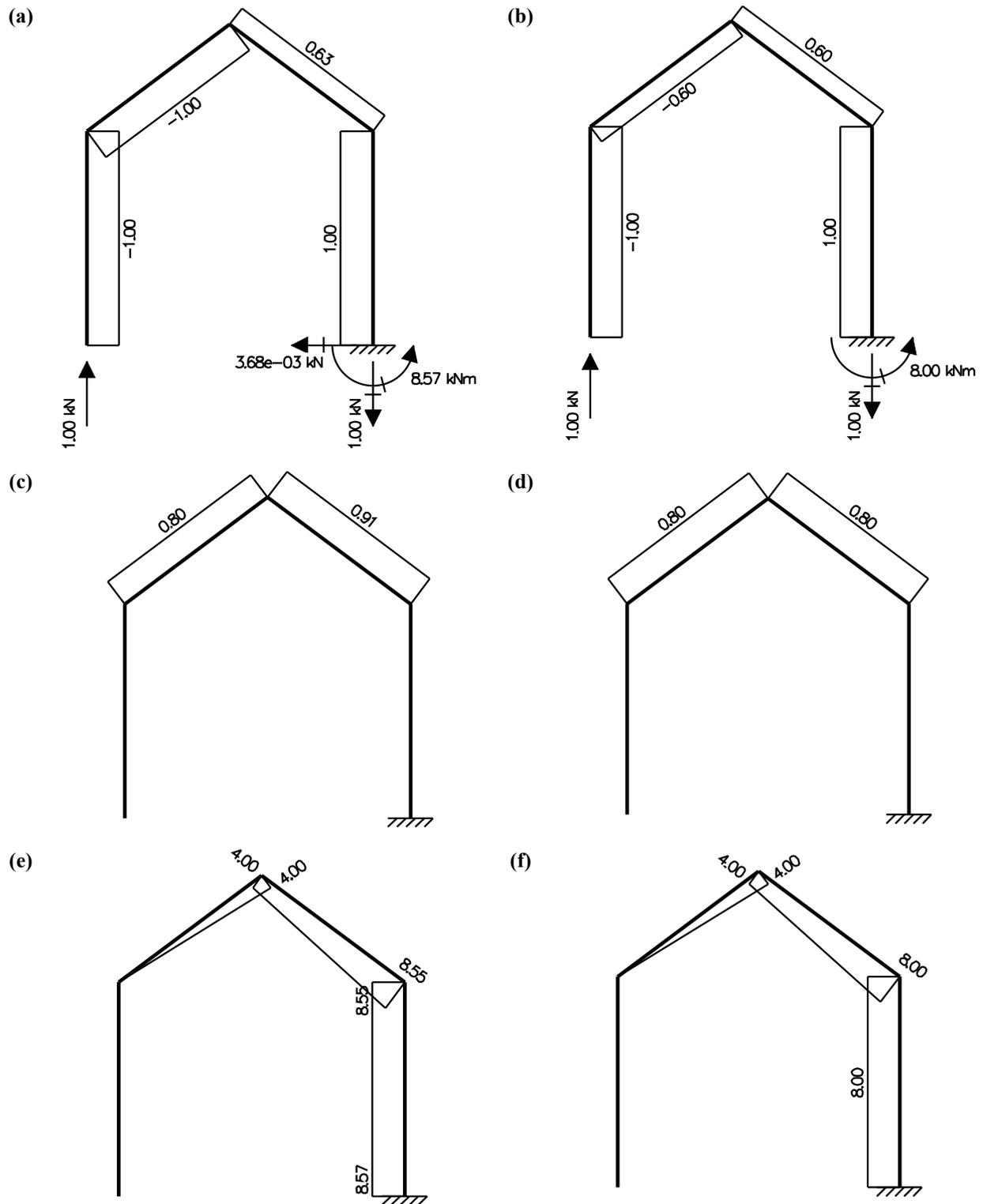


Figura 7. Comparação dos resultados do pórtico isostático: (a) esforço normal por área grande, (b) esforço normal por multiplicadores de Lagrange, (c) esforço cortante por área grande, (d) esforço cortante por multiplicadores de Lagrange, (e) momento fletor por área grande e (f) momento fletor por multiplicadores de Lagrange

5.4 Pórtico Hiperestático

Para demonstrar a aplicação da metodologia apresentada em estruturas hiperestáticas mais complexas, analisar-se-á a estrutura mostrada na Figura 8. Adota-se que todas as barras são feitas do mesmo material, com $E = 205\text{GPa}$, e possuem a mesma seção transversal circular de diâmetro $\phi = 100\text{mm}$. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 9.

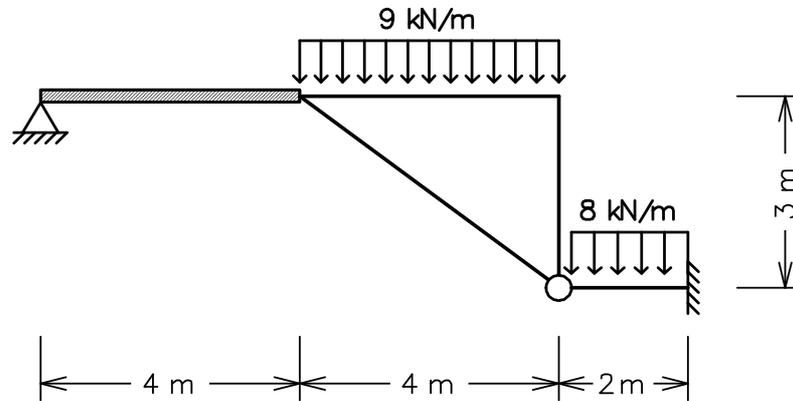


Figura 8. Pórtico hiperestático

(Martha, 2010, Fig. 11.95)

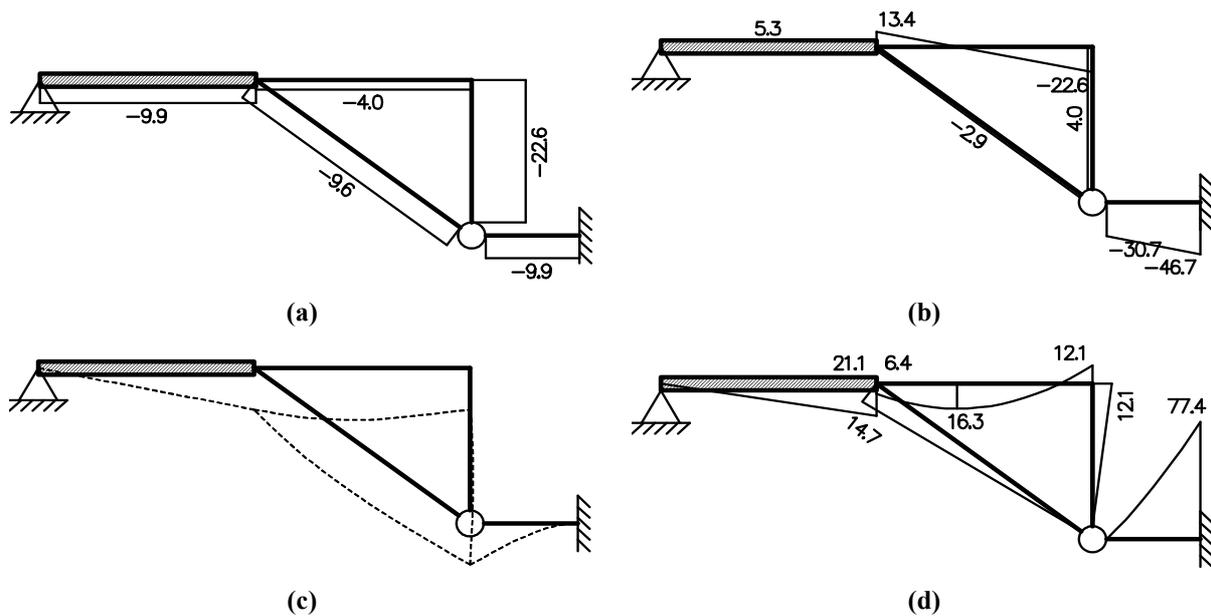


Figura 9. Resultados de análise do pórtico hiperestático: (a) esforço normal, (b) esforço cortante, (c) deformada e (d) momento fletor

6 CONCLUSÃO

A metodologia proposta mostrou ser genérica e robusta o suficiente para analisar todos os exemplos apresentados. Além disso, é notável sua capacidade de tratar melhor o problema em relação à alternativa com propriedades de área muito grandes. Desse modo, esta metodologia

deve ser empregada em programas de análise, educacionais ou não, que provém essa possibilidade no modelo.

Essa metodologia está sendo implementada no programa Ftool e estará disponível na sua próxima versão. Para complementar essa implementação, ainda resta definir as equações de restrição para barras infinitamente rígidas com articulação em uma extremidade e as equações de restrição para as soluções fundamentais (barras isoladas biengastadas) de linhas de influência, que correspondem a descontinuidades unitárias de deslocamentos transversais e de rotações.

AGRADECIMENTOS

FAPERJ

Pelo suporte financeiro fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

CNPq

Pelo suporte financeiro provido nos estágios iniciais desta pesquisa.

Instituto Tecgraf

Pela infraestrutura vital para este estudo.

Os autores agradecem a fundamental contribuição do Prof. Evandro Parente, da Universidade Federal do Ceará, que implementou uma versão inicial da metodologia utilizada neste trabalho no programa FEMOOP (Martha & Parente, 2002), desenvolvido em parceria pela PUC-Rio, EPUSP, UFMG, UFC e UFAL.

REFERÊNCIAS

- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. W. , 2002. *Concept and Applications of Finite Element Analysis*.
- Kuhn, H. W., & Tucker, A. . , 1951. Nonlinear Programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pp. 481–492.
- Lagrange, J. L. , 1811. *Mécanique Analytique*.
- Martha, L. F. , 2010. *Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos*. Editora Campus/Elsevier, ISBN 978-85-352-3455-8.
- Martha, L. F., & Parente, E. , 2002. An object-oriented framework for finite element programming. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics*, IACM, Vienna, Austria, Jul. 2002, on-line publication (ISBN 3-9501554-0-6), <http://wccm.tuwien.ac.at>, Paper-ID: 80480, p. 10, 2002.