



UM SISTEMA PARA ANÁLISE DINÂMICA E NÃO LINEAR DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Larissa Bastos Martinelli

Elcio Cassimiro Alves

larissabastosm@gmail.com

elcio.calves1@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514 Cep 29097-910, Goiabeiras – Vitória – ES - Brazil

Larissa Novelli

Luiza Gagno Azolin

larissa.novelli@hotmail.com

luiza.azolin@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514 Cep 29097-910, Goiabeiras – Vitória – ES - Brazil

Resumo. Ferramentas de análise estrutural de fácil acesso vem sendo desenvolvidas ao longo das últimas décadas. De acesso gratuito para estruturas planas destaca-se o Ftool da PUC-Rio. Porém programas como o citado, embora robusto limita-se a análise estática de estruturas planas. Programas para análise dinâmica e não linear gratuitos não estão disponíveis de forma gratuita ainda mais em se tratando de estruturas espaciais. Objetiva-se neste trabalho apresentar o programa denominado Truss3D desenvolvido na plataforma Matlab para análise estática, dinâmica e não linear. Para a solução do problema dinâmica o Método de Newmark foi utilizado e para o problema de análise não linear o método de Newton Raphson. Módulos de Otimização Estrutural para esses tipos de análise serão inseridos de modo a apontar um dimensionamento inicial das estruturas de forma a atender a ABNT NBR 8800: 2008. Exemplos de validação e aplicação são apresentados.

Palavras Chaves: Programa, Análise, Dinâmica, Não Linear

1 INTRODUÇÃO

O Brasil nos últimos anos vem passando pelo processo de industrialização da construção civil e as estruturas de aço surgiram como uma ótima alternativa. Dentro do contexto das estruturas de aço, as treliças tubulares aparecem como uma excelente alternativa para problemas como elevadas cargas nas fundações e obtenção de maiores vãos livres. Assim elas passam a ser muito utilizadas em coberturas, pontes, torres de transmissão, arenas e estádios.

Algumas solicitações que atuam sobre as estruturas produzem acelerações que geram forças de inércia não desprezíveis associadas às acelerações. Exemplos desse tipo de solicitação são cargas móveis em pontes, ventos, ondas, correntes e sismos (Vaz, 2011). Existem muitos sistemas para os quais a excitação pode estar relacionada com uma pequena quantidade de fatores que a produzem. Se a função que descreve a excitação do sistema é obtida de um evento, se o evento é repetido várias vezes sob as mesmas condições e a função obtida é a mesma, essa excitação é dita determinística. Essas funções determinísticas são caracterizadas pelo fato de que os valores das funções podem ser obtidos para qualquer instante de tempo t .

Segundo (Gopalakrishnan et al., 2010) os problemas dinâmicos em engenharia estrutural dividem-se em basicamente duas categorias: uma envolvendo baixas frequências (de poucos a algumas centenas de Hz), que são classificados como problemas de dinâmica estrutural e que serão abordados neste estudo, e outra envolvendo altas frequências (na ordem de 10^3 Hz a 10^{12} Hz), que são chamadas de problemas de propagação de ondas.

Cargas harmônicas com frequência de excitação próxima às frequências próximas próprias ou naturais da estrutura produzem em efeito de ressonância que pode produzir grandes deslocamentos e esforços nas estruturas (Vaz, 2011). Muitos são os exemplos de colapso de estruturas produzidos por solicitações dinâmicas, como o desastre ocorrido na Ponte de Tacoma em Washington no qual o colapso foi devido à ação dos ventos.

A análise não linear das estruturas é fundamental para concepção de treliças mais leves e eficientes (menos barras) dentro de padrões de segurança e qualidade porque quanto mais leves e com menos barras, maiores as chances de ocorrerem problemas não lineares de estabilidade. É fundamental, também, para o estudo de estruturas próximo ao colapso, devido às grandes mudanças na geometria da estrutura e a perda de linearidade na relação deformação- tensão (Lacerda, 2014).

Existem três principais tipos de não linearidade que ocorrem na análise estrutural. O primeiro tipo é a não linearidade física, que está relacionada às propriedades do material e é caracterizada por apresentar relações não lineares entre tensão e deformação. O segundo tipo é a condição de contorno não linear, que é causado por mudanças nas condições de contorno da estrutura ao longo de seu deslocamento, como em caso de impacto e contato entre dois corpos. E o terceiro tipo é a não linearidade geométrica, que será abordada neste estudo.

Quando uma estrutura sob a ação de forças aplicadas sofre mudanças significativas em sua geometria, as equações de equilíbrio lineares elaboradas com base na configuração inicial deixam de ser válidas, devendo então ser reformuladas na sua configuração deformada. Isso causa não linearidade na relação entre deslocamento e deformação, e é denominado de não linearidade geométrica.

Programas para análise estrutural de livre acesso se limitam na grande maioria das vezes a análise estática. Um dos programas muito utilizados hoje em dia em ensino de engenharia é o

Ftool da PUC-Rio, porém apesar de robusto, este programa se limita a análise de estruturas planas.

Objetiva-se neste trabalho apresentar um programa, de fácil acesso, que possibilita a visualização deste tipo de análise para estudantes e profissionais da área de estruturas. O programa vem sendo desenvolvido na plataforma do Matlab. Novelli et al (2015) apresentou o programa para análise estática. Busca-se nesta versão apresentar a análise dinâmica e não linear. Para análise dinâmica, implementou-se o Método de Newmark e para análise não Linear o Método Posicional.

2 METODOLOGIA

A seguir será apresentada a metodologia utilizada para as análises dinâmica e não linear de treliças espaciais.

2.1 Análise dinâmica

Dado um sistema estrutural submetido a carregamento dinâmico, a equação do movimento para este sistema deve ser:

$$Kd + C\dot{d} + M\ddot{d} = F_e(t) \quad (1)$$

Onde:

K= matriz de rigidez;

C= matriz de amortecimento;

M= matriz de massa;

$F_e(t)$ = esforços externos dependentes do tempo.

A matriz de rigidez dos elementos que relaciona as forças nodais e os deslocamentos expressos em coordenadas globais é dada por:

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} Cx^2 & CxCy & CxCz & -Cx^2 & -CxCy & -CxCz & u_i \\ & Cy^2 & CyCz & -CxCy & -Cy^2 & -CyCz & v_i \\ & & Cz^2 & -CxCz & -CyCz & -Cz^2 & w_i \\ & & & Cx^2 & CxCy & CxCz & u_j \\ & & & & Cy^2 & CyCz & v_j \\ & & & & & Cz^2 & w_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

simétrico

Onde os graus de liberdade correspondentes às linhas são mostrados ao lado da matriz.

Segundo (Cook e Malkus, 1992) a matriz de massa consistente de um elemento de treliça é dada por:

$$M = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

O amortecimento de Rayleigh ou amortecimento proporcional define a matriz de amortecimento C como uma combinação linear da matriz de rigidez e de massa da estrutura, como apresentado na Eq. (4).

$$C = \alpha K + \beta M \quad (4)$$

Onde:

α = constante de amortecimento proporcional de rigidez;

β = constante de amortecimento proporcional de massa.

As constantes α e β podem ser obtidas segundo as equações (5) e (6) que seguem.

$$\alpha = \frac{2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{2\omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (6)$$

Onde:

ω_1 e ω_2 = duas diferentes frequências naturais de vibração;

ξ_1 e ξ_2 = são frações do amortecimento crítico para as duas frequências naturais de vibração.

Os valores das frequências naturais são escolhidos, segundo (Cook et al., 1989), da seguinte forma: para " ω_1 " adota-se a menor frequência natural de vibração da estrutura e para " ω_2 " adota-se a frequência subsequente à " ω_1 ".

Para a determinação dos valores de α e β o amortecimento crítico deve ser fixado. Este parâmetro depende do tipo de material e do tipo de sistema estrutural empregado. Para estruturas de aço adota-se $0,5\% < \xi < 5,0\%$. No presente estudo foi adotado o valor de 5% para o amortecimento crítico.

Para solução da equação geral para o equilíbrio dinâmico, equação (1), adotou-se o método de integração no tempo. Em vez de satisfazer a equação em todo o tempo t , divide-se o tempo em intervalos de tempos iguais Δt constantes e satisfaz a equação em instantes de tempo discretos distanciados por Δt .

Os métodos de integração no tempo estão divididos em métodos explícitos e implícitos. Nos métodos implícitos o deslocamento no instante t é calculado através dos deslocamentos anteriores e das velocidades e acelerações no próprio instante t e possuem elevada exatidão e estabilidade numérica melhorada, comparados aos métodos explícitos.

Entre os métodos implícitos destaca-se o método de Newmark, que será o método utilizado neste estudo. O método de Newmark parte da hipótese de variação linear da aceleração entre s intervalos de tempo t e Δt . Dessa forma, Newmark desenvolveu equações para solução do problema dinâmico.

2.2 Análise não linear

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob a ação de forças aplicadas. As condições de equilíbrio dos elementos finitos que representam a estrutura podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações não lineares (Bathe, 2006):

$$\mathbf{g} = \mathbf{q}(\mathbf{u}) - \mathbf{F} = 0 \quad (7)$$

Onde \mathbf{g} é o vetor de forças residuais, \mathbf{F} é o vetor de forças externas nodais e $\mathbf{q}(\mathbf{u})$ é o vetor de forças internas nodais dependente dos deslocamentos nodais.

Para resolver essas equações não lineares, o método numérico escolhido foi o método iterativo de Newton-Raphson combinado com um procedimento incremental. Com isso, ao invés de resolver a equação (7) para a força externa total, o carregamento é dividido em incrementos de carga iguais Δf e as iterações de Newton-Raphson são aplicadas para vários ciclos de nível de carga. Ou seja, inicialmente é obtido uma solução para o nível de carga Δf , em seguida para o nível de carga $2\Delta f$ e assim em diante. O algoritmo do procedimento é apresentado na Fig. 1.

```

f = Δf, u = 0;
for n = 1 to nmax do
  g = q(u) - f;
  for i = 1 to imax do
    Kt = ∂q(u) / ∂u;
    Δu = -Kt-1g;
    u = u + Δu;
    g = q(u) - f;
    if ||g|| ≤ tol · ||Δf|| then break;
  end
  output u, f;
  f = f + Δf
end
    
```

Figura 1. Procedimento incremental-iterativo

Neste estudo foi utilizada a formulação posicional do MEF proposta por (Coda, 2003). Essa formulação difere da formulação clássica (Bathe, 2006) por ter como incógnitas as posições nodais do elemento finito ao invés de seus deslocamentos. Consiste em uma formulação Lagrangeana total, baseada no princípio da mínima energia potencial.

A seguir é descrito resumidamente a formulação obtida para treliças espaciais. Mais detalhes do desenvolvimento desta formulação podem ser encontrados em (Lacerda, 2014).

Sejam as coordenadas (X_a, Y_a, Z_a) e (X_b, Y_b, Z_b) representando a posição inicial (de referência) e (x_a, y_a, z_a) e (x_b, y_b, z_b) a posição final de um elemento de treliça espacial, conforme Fig. 2. O comprimento de referência (L), e o comprimento atualizado (l) são dados por:

$$L = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + (Z_b - Z_a)^2} \tag{8}$$

$$l = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \tag{9}$$

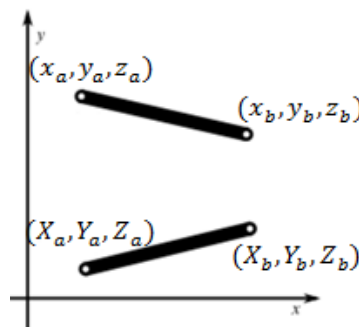


Figura 2. Elemento de treliça

Adotando a deformação de engenharia (ε_E), o vetor de forças internas (\mathbf{q}) e a matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_t), são dados por:

$$\varepsilon_E = \frac{l-L}{L} \quad (10)$$

$$\mathbf{q} = \frac{EA}{l} \mathbf{d} \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{l^3} \mathbf{B} + \frac{AE\varepsilon_E}{l} \mathbf{C} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (12)$$

Onde:

$$\mathbf{d} = [xa - xb, ya - yb, za - zb, xb - xa, yb - ya, zb - za]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (14)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sendo A a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade, \mathbf{K}_e e \mathbf{K}_g as parcelas elástica e geométrica da matriz de rigidez tangente, respectivamente, e \otimes o produto tensorial.

3 PROGRAMA TRUSS3D

Para o desenvolvimento do programa utilizou-se o Software MatLab, por este ser de fácil implementação de rotinas e por possuir uma interface gráfica que facilita a utilização pelo usuário. O programa Truss3D vem sendo implementado na Universidade Federal do Espírito Santo por alunos de projetos de graduação e iniciação científica e seu funcionamento foi explicado em (Novelli et al., 2015).

3.1 Análise dinâmica

Para análise do comportamento de uma estrutura submetida a carregamento dinâmico primeiramente são passados a função de carga, tempo inicial, tempo final e intervalo de tempo de atuação do carregamento. A Fig. 3 a seguir apresenta a tela de seleção da carga dinâmica.

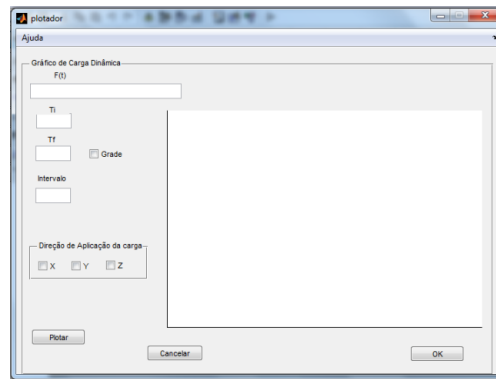


Figura 3. Tela de seleção de carga dinâmica

O fluxograma, apresentado na Fig.4, mostra a sequência de passos para realização da análise dinâmica.

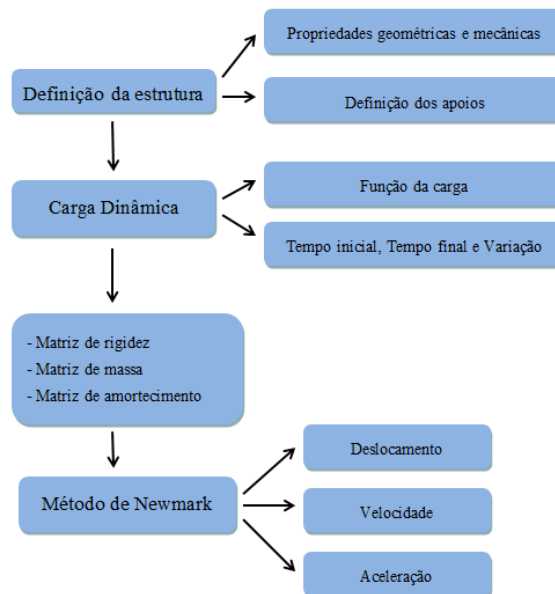


Figura 4. Fluxograma do funcionamento da análise dinâmica.

Os resultados da análise são apresentados em forma de gráficos. O usuário seleciona qual nó deseja e os gráficos que se quer visualizar, conforme a Fig. 5. Entre as opções de gráficos estão: Deslocamento, velocidade e aceleração.

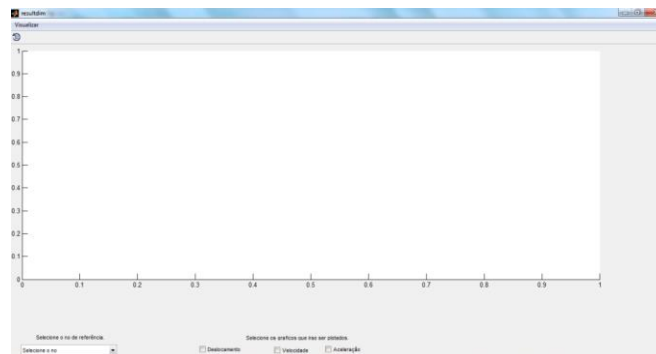


Figura 5. Tela de apresentação dos gráficos gerados

3.2 Análise não linear

Para análise do não linear geométrica de uma estrutura submetida a carregamento estático, primeiramente é solicitado que usuário indique em quantos incrementos deseja dividir o carregamento aplicado na estrutura, como mostra a Fig. 6.

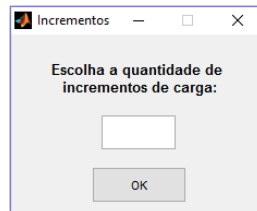


Figura 6. Escolha de quantidade de incrementos de carga

O fluxograma da Fig. 7 apresenta a sequência de passos para a realização da análise não linear.

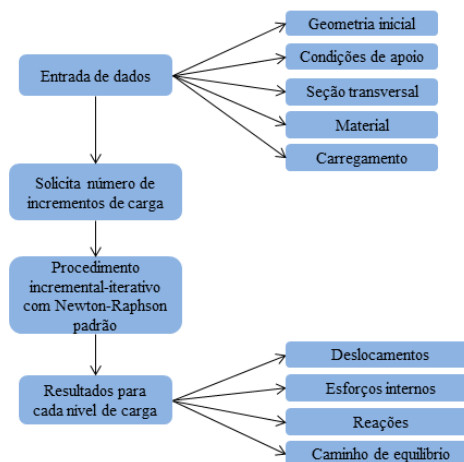


Figura 7. Fluxograma da análise não linear

Em seguida, abre a tela inicial de saída de resultados, conforme Fig. 8, onde a estrutura é plotada na última configuração de equilíbrio encontrada pela análise. Esta tela possui três menus para apresentar os resultados obtidos e facilitar sua interpretação.

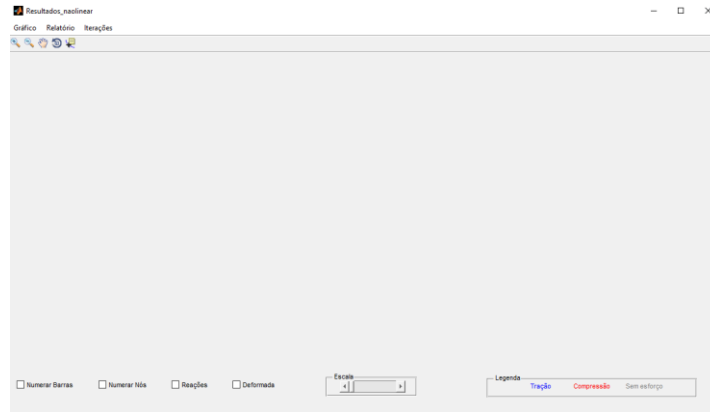


Figura 8. Tela de resultados

O menu “Gráfico” permite que o usuário escolha um nó da estrutura para traçar o caminho de equilíbrio nas direções x , y e z , assim como o gráfico obtido com a análise linear estática. Com isso, é possível comparar os dois tipos de análise e observar os efeitos da não linearidade geométrica. A janela aberta por este menu é apresentada na Fig.9.

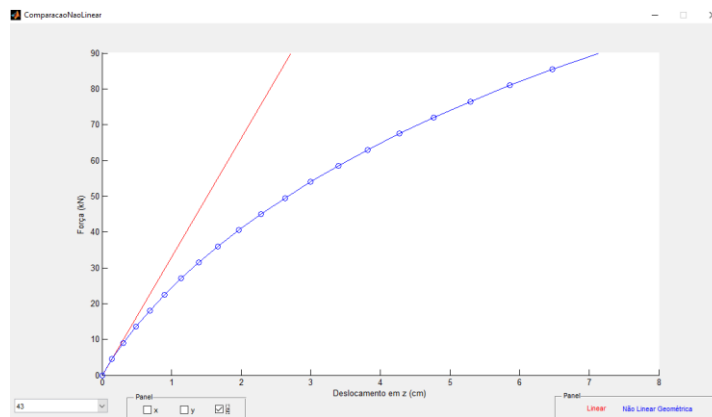


Figura 9. Comparação entre análise não linear geométrica e análise linear

O menu “Relatório” abre a janela mostrada na Fig.10, onde são listados os deslocamentos nodais, esforços internos e reações de apoio obtidos em cada incremento de carga.

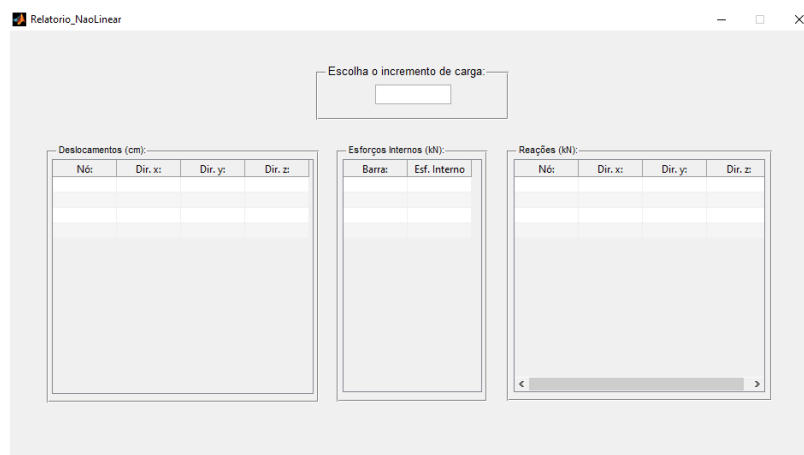


Figura 10. Menu Relatório

E por fim, o menu “Iterações” relaciona a quantidade de iterações que foram necessárias para a convergência de cada incremento de carga Fig.11, possibilitando uma análise da eficiência do processo.

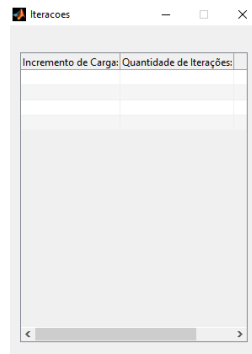


Figura 11. Menu Iterações

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Treliça plana

O exemplo escolhido de treliça plana é composto por 41 barras e 22 nós, como mostra a Fig. 12 e sua geometria na Fig. 13. Seus elementos possuem módulo de elasticidade $E = 205000\text{MPa}$ e a área da seção transversal $A = 12,51\text{cm}^2$ para os banzos superiores e inferiores e $A = 3,42\text{ cm}^2$ para as diagonais e montantes.

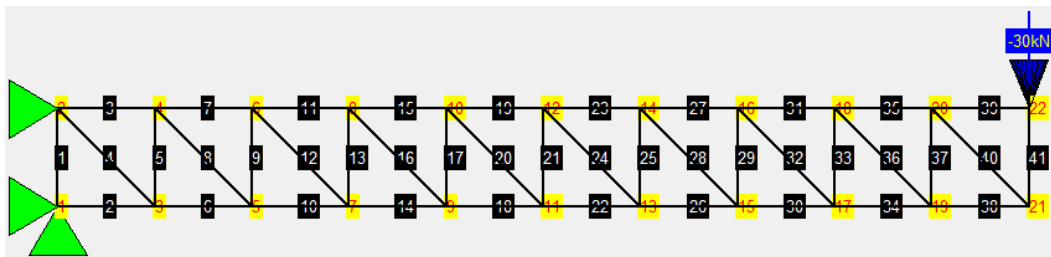


Figura 12. Treliça plana

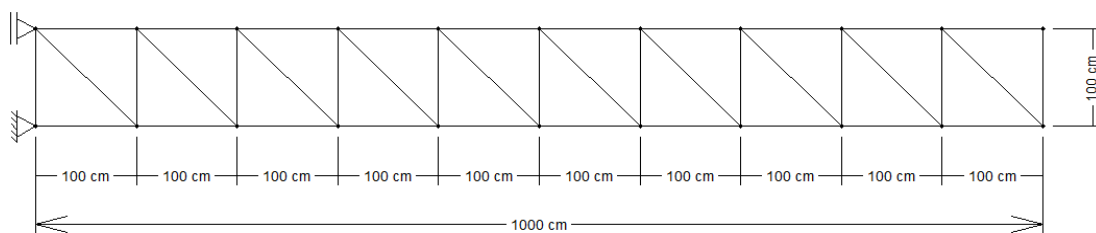


Figura 13. Dimensões da treliça em cm

Análise dinâmica. Para a análise dinâmica utilizou-se um carregamento como apresentado na Fig. 14.

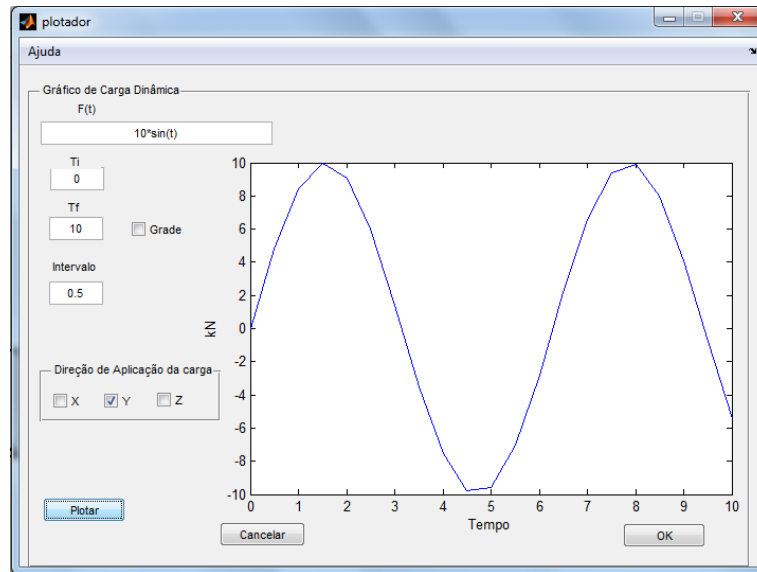


Figura 14. Carregamento para treliça plana

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para as frequências naturais da estrutura e comparou-se com os valores obtidos pela análise no Software Ansys. O erro máximo encontrado foi de 0,48%.

Tabela 1. Comparativo das frequências naturais

Truss3D	Ansys	Diferença (%)	Truss3D	Ansys	Diferença (%)
10,50423	10,555	0,48%	741,1846	741,16	0,00%
42,17606	42,143	-0,08%	748,824	748,83	0,00%
89,12677	89,061	-0,07%	769,0367	769,05	0,00%
111,0902	111,08	-0,01%	784,3156	784,29	0,00%
136,7141	136,78	0,05%	793,3874	793,43	0,01%
188,4395	188,43	-0,01%	841,4522	841,48	0,00%
241,5972	241,6	0,00%	926,6001	926,67	0,01%
290,7761	290,75	-0,01%	982,3043	982,32	0,00%
315,4451	315,43	0,00%	1086,392	1086,4	0,00%
343,2972	343,35	0,02%	1161,035	1161,1	0,01%
370,9902	370,97	-0,01%	1351,544	1351,6	0,00%
419,6916	419,73	0,01%	1408,521	1408,5	0,00%
449,1352	449,09	-0,01%	1622,744	1622,8	0,00%
467,7564	467,73	-0,01%	1655,53	1655,5	0,00%
564,3634	564,37	0,00%	1879,779	1879,8	0,00%
606,6986	606,67	0,00%	1883,28	1883,2	0,00%
680,2282	680,29	0,01%	2063,285	2063,4	0,01%
694,393	694,42	0,00%	2086,521	2086,5	0,00%
704,1015	704,08	0,00%	2174,534	2174,5	0,00%
715,5606	715,59	0,00%	2246,949	2247	0,00%
722,4043	722,45	0,01%			

A Fig. 15 mostra o resultado obtido para os deslocamentos, velocidades e acelerações no nó 22 (ponta da treliça) para todo o intervalo de aplicação da carga.

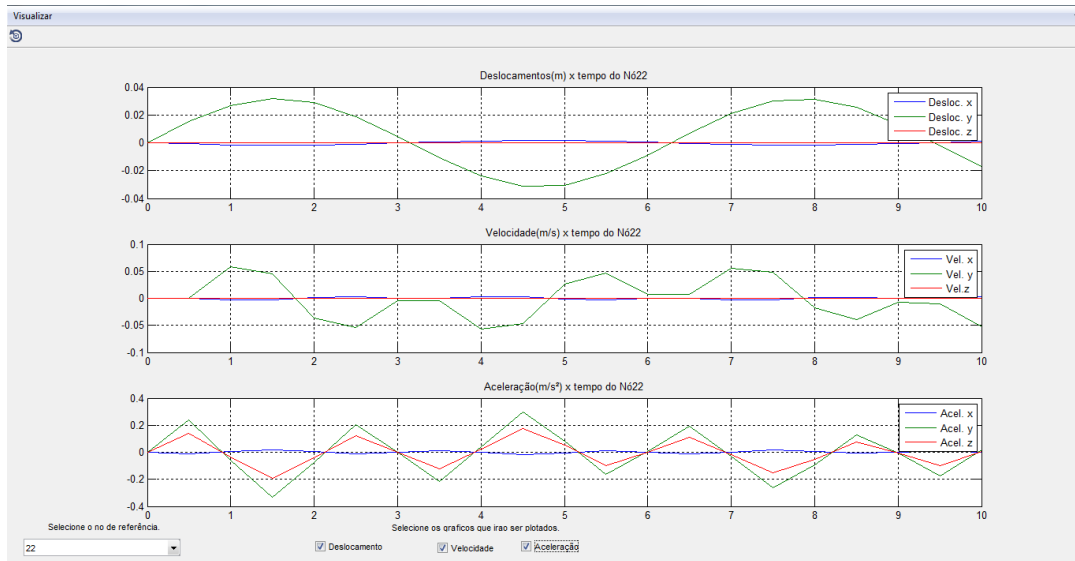


Figura 15. Deslocamentos, velocidades e aceleração no nó 22

Análise não linear. A análise foi realizada com 15 incrementos de carga e os resultados foram comparados com os obtidos por Leite (2000). A Tabela 2 apresenta a comparação dos esforços internos nas barras 2 (banzo superior), 3 (banzo inferior) e 4 (diagonal). A Tabela 3 compara os deslocamentos verticais do nó de aplicação da carga.

Tabela 2. Esforços internos (kN)

Incremento de carga	F (kN)	Barra 2			Barra 3			Barra 4		
		Truss3d	Leite (2000)	Erro (%)	Truss3d	Leite (2000)	Erro (%)	Truss3d	Leite (2000)	Erro (%)
1	2	-20,00	-20,00	0,01	18,00	18,00	0,01	2,83	2,83	-0,05
2	4	-40,01	-40,00	0,01	36,01	36,01	-0,01	5,66	5,66	-0,04
3	6	-60,01	-60,00	0,02	54,01	54,01	0,00	8,49	8,49	-0,03
4	8	-80,02	-80,01	0,01	72,02	72,02	0,00	11,32	11,32	-0,03
5	10	-100,03	-100,02	0,01	90,03	90,04	-0,01	14,15	14,15	-0,02
6	12	-120,05	-120,04	0,00	108,05	108,05	0,00	16,98	16,98	-0,01
7	14	-140,06	-140,05	0,01	126,07	126,07	0,00	19,81	19,81	-0,01
8	16	-160,08	-160,07	0,01	144,09	144,09	0,00	22,64	22,64	0,00
9	18	-180,10	-180,09	0,01	162,11	162,11	0,00	25,47	25,47	0,01
10	20	-200,12	-200,12	0,00	180,13	180,14	0,00	28,30	28,31	-0,02
11	22	-220,15	-220,14	0,00	198,16	198,16	0,00	31,14	31,14	-0,01
12	24	-240,18	-240,17	0,00	216,19	216,19	0,00	33,97	33,97	0,00
13	26	-260,21	-260,20	0,00	234,22	234,23	0,00	36,80	36,81	-0,01

14	28	-280,24	-280,23	0,00	252,26	252,26	0,00	39,64	39,64	0,00
15	30	-300,28	-300,27	0,00	270,30	270,3	0,00	42,47	42,47	0,01

Tabela 3. Deslocamento vertical do nó 22 (cm)

Incremento de carga	F (kN)	Truss3D	Leite (2000)	Erro (%)
1	-2	-0,635	-0,635	-0,05
2	-4	-1,270	-1,269	0,04
3	-6	-1,905	-1,904	0,03
4	-8	-2,540	-2,540	0,00
5	-10	-3,175	-3,175	0,01
6	-12	-3,811	-3,811	0,00
7	-14	-4,447	-4,447	0,00
8	-16	-5,083	-5,083	0,00
9	-18	-5,719	-5,719	0,00
10	-20	-6,356	-6,355	0,01
11	-22	-6,992	-6,992	0,00
12	-24	-7,629	-7,629	0,00
13	-26	-8,266	-8,266	0,00
14	-28	-8,903	-8,903	0,00
15	-30	-9,541	-9,541	0,00

Os resultados também foram comparados com os gerados pela análise no software *Ansys* erro máximo foi de 0,01%. A Fig. 16 apresenta os caminhos de equilíbrio do nó 22 nas direções x e y.

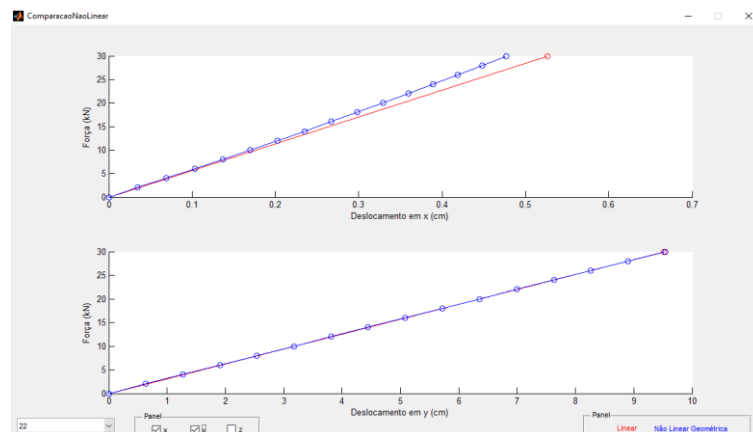


Figura 16. Caminhos de equilíbrio do nó 22

4.2 Treliça espacial 1

O primeiro exemplo de treliça espacial escolhido refere-se a um domo treliçado com 24 elementos, conforme Fig.17 e Fig.18.

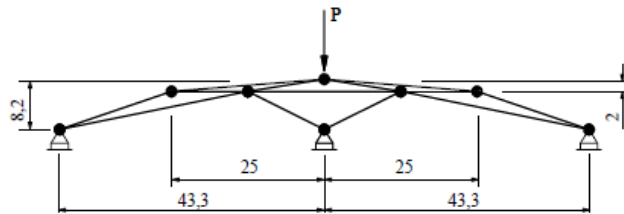


Figura 17. Dimensões da treliça em metro

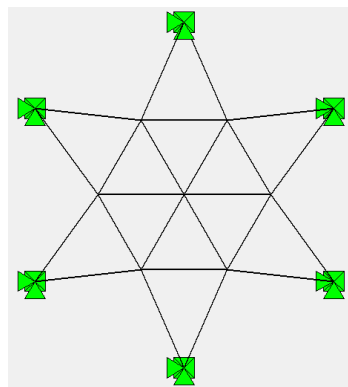


Figura 18. Projeção plana da treliça

Análise dinâmica. Para a análise dinâmica foi considerado módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, a área da seção transversal $A = 10$ cm² e massa específica de 7850 kg/m³. Utilizou-se um carregamento como apresentado na Fig. 19.

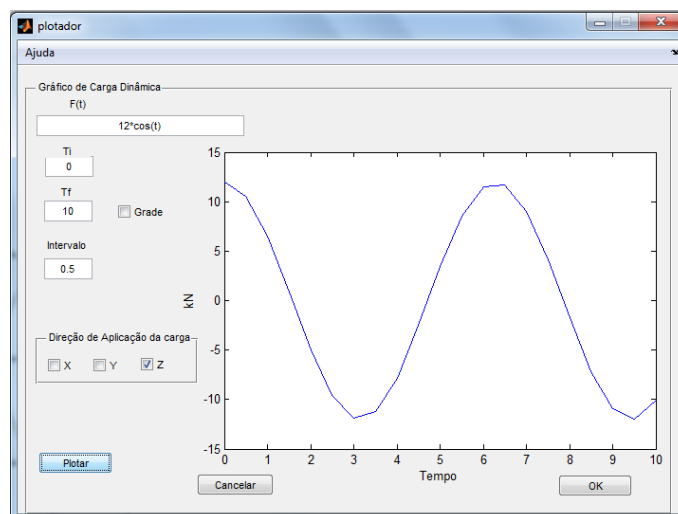


Figura 19. Carregamento aplicado no nó central do domo

A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos para as frequências naturais da estrutura e comparou-se com os valores obtidos pela análise no Software Ansys. O erro máximo encontrado foi de 0,002%.

Tabela 4. Comparativo das frequências naturais

Truss3D	Ansys	Diferença (%)	Truss3D	Ansys	Diferença (%)
3,437046	3,4371	0,002%	28,19304	28,193	0,000%
3,643789	3,6438	0,000%	28,19328	28,193	-0,001%
3,643789	3,6438	0,000%	31,10274	31,103	0,001%
3,894872	3,8949	0,001%	34,70625	34,706	-0,001%
3,894872	3,8949	0,001%	36,33824	36,338	-0,001%
3,9271	3,9271	0,000%	48,57165	48,572	0,001%
4,411871	4,4119	0,001%	48,57169	48,572	0,001%
15,7977	15,798	0,002%	49,56728	49,567	-0,001%
15,79785	15,798	0,001%	52,13504	52,135	0,000%
22,55389	22,554	0,000%	52,13512	52,135	0,000%

A Fig. 20 mostra o resultado obtido para os deslocamentos, velocidades e acelerações no nó 7 (nó central do domo) para todo o intervalo de aplicação da carga.

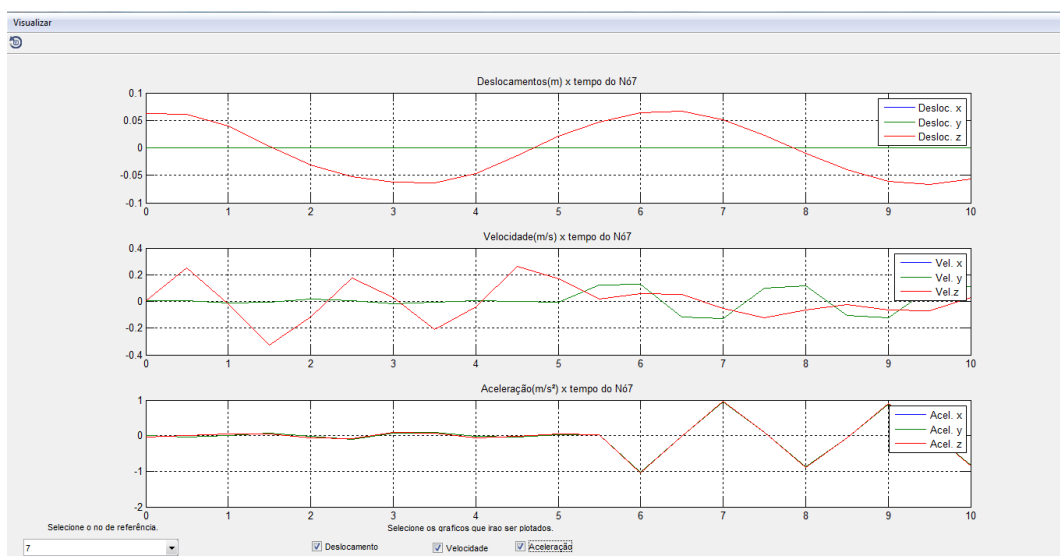


Figura 20. Deslocamentos, velocidades e aceleração no nó 7

Análise não linear. Para a análise não linear foi considerado que todos os elementos dessa treliça possuem rigidez hipotética $EA = 10^4$. Este exemplo surgiu em Crisfield (1997) e tem sido estudado com frequência para validar formulações, implementações computacionais e demonstrar caminhos de equilíbrio complexos.

Pinheiro (2003) encontrou para o primeiro ponto crítico de carga e respectivo deslocamento vertical do ápice do domo os valores 3,1565 kN e 0,763 m. Analisando a estrutura no Truss3D, foram obtidos 3,1565 kN para a carga crítica e 0,765 m para o deslocamento, correspondendo a um erro de 0,0% e 0,26%, respectivamente. O caminho de equilíbrio é apresentado na Fig. 21.

Os resultados obtidos também foram comparados com os gerados pela análise no software *Ansys* e erro máximo foi de 1,6%.

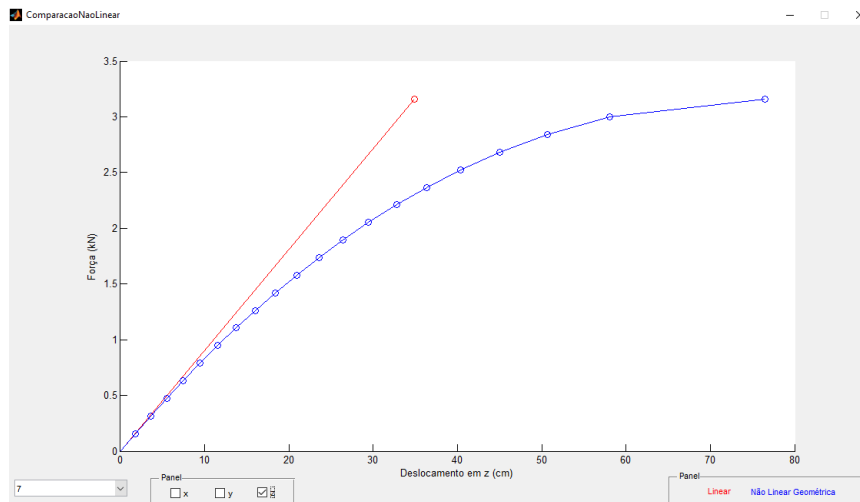


Figura 21. Caminho de equilíbrio

4.3 Treliça espacial 2

O segundo exemplo de treliça espacial trata-se de um domo treliçado com 52 barras, conforme Fig. 22 e Fig. 23, e suas dimensões na Fig. 24. Os elementos possuem módulo de elasticidade $E = 200000\text{MPa}$ e consistem em perfis de seção transversal tubular circular de 38,1x3,2mm ($A=3,51\text{ cm}^2$).

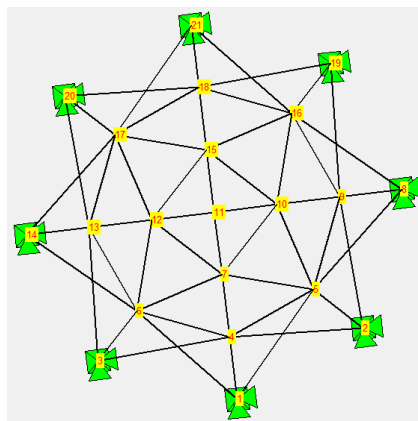


Figura 22. Projeção plana do domo

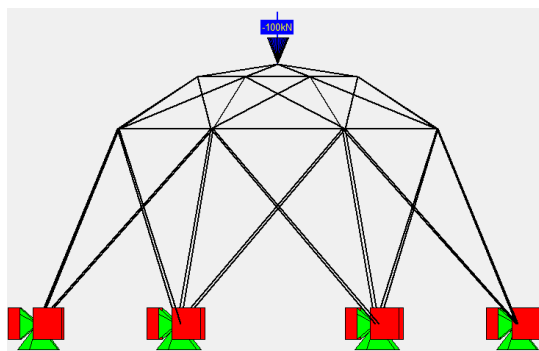


Figura 23. Vista frontal do domo

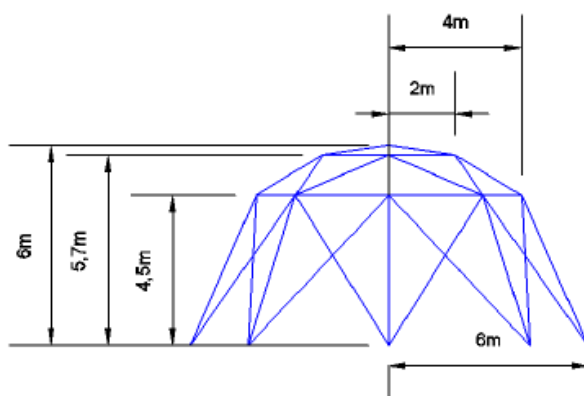


Figura 24. Dimensões do domo em m

Análise dinâmica. Para a análise dinâmica optou-se por apenas realizar a análise das frequências naturais e seu comparativo com a análise realizada no Software Ansys, os resultados estão apresentados na Tabela 5. O erro máximo encontrado foi de -0,007%.

Tabela 5. Comparativo das frequências naturais

Truss3D	Ansys	Diferença (%)	Truss3D	Ansys	Diferença (%)
52,12324	52,124	0,001%	211,9466	211,95	0,002%
52,12324	52,124	0,001%	211,9466	211,95	0,002%
66,79733	66,797	0,000%	221,6233	221,63	0,003%
85,11606	85,111	-0,006%	234,9286	234,93	0,001%
85,11606	85,111	-0,006%	245,4488	245,45	0,001%
87,21691	87,218	0,001%	248,9502	248,94	-0,004%
89,33367	89,331	-0,003%	251,6558	251,65	-0,002%
90,98888	90,995	0,007%	293,3862	293,38	-0,002%
92,27804	92,28	0,002%	293,3862	293,38	-0,002%
94,49029	94,491	0,001%	303,4448	303,45	0,002%
99,42409	99,417	-0,007%	303,4448	303,45	0,002%
99,42409	99,417	-0,007%	331,0423	331,04	-0,001%
104,533	104,53	-0,003%	382,8154	382,81	-0,001%
120,8304	120,83	0,000%	398,3967	398,4	0,001%
133,1172	133,11	-0,005%	398,3967	398,4	0,001%
133,1172	133,11	-0,005%	413,9143	413,92	0,001%

170,1844	170,19	0,003%	466,9447	466,94	-0,001%
170,1844	170,19	0,003%	605,0116	605,01	0,000%
171,6327	171,64	0,004%	605,0116	605,01	0,000%
185,0972	185,1	0,002%			

Análise não linear. A força no ápice do domo (nó 11) é incrementada de zero até 100kN utilizando um incremento constante de 5kN. A Tabela 6 compara os resultados obtidos para o deslocamento vertical do nó 11 com os gerados pela análise no Software Ansys. A Fig.25 apresenta a comparação das curvas força x deslocamento produzidas pelas análises não linear e linear estática.

Tabela 6. Deslocamento vertical do nó 11

Incremento de carga	F (kN)	Truss3d	ANSYS	Erro (%)
1	-5	-0,264	-0,264	0,00
2	-10	-0,534	-0,534	0,01
3	-15	-0,812	-0,812	0,02
4	-20	-1,098	-1,097	0,03
5	-25	-1,392	-1,392	0,04
6	-30	-1,697	-1,696	0,05
7	-35	-2,012	-2,010	0,06
8	-40	-2,338	-2,336	0,07
9	-45	-2,677	-2,675	0,09
10	-50	-3,031	-3,028	0,10
11	-55	-3,402	-3,398	0,12
12	-60	-3,791	-3,786	0,13
13	-65	-4,201	-4,195	0,15
14	-70	-4,638	-4,630	0,17
15	-75	-5,105	-5,094	0,20
16	-80	-5,609	-5,596	0,22
17	-85	-6,161	-6,145	0,26
18	-90	-6,776	-6,756	0,30
19	-95	-7,481	-7,453	0,36
20	-100	-8,325	-8,287	0,46

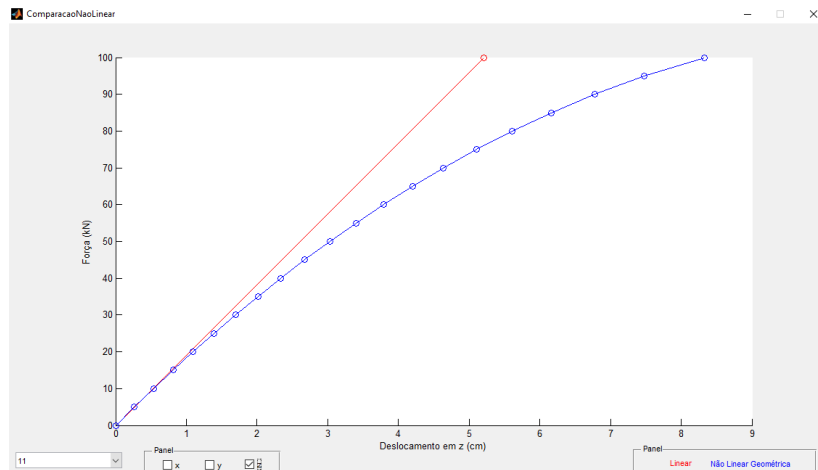


Figura 25. Comparação entre as análises não linear e linear estática

5. CONCLUSÕES

Conforme pode ser observado, o programa proposto é validado através de análise comparativo de exemplos com o Ansys. Observa-se que a menos de possíveis erros de arredondamento tanto para a análise dinâmica quanto para a análise não linear os resultados são os mesmos.

Na análise dinâmica, além da comparação das frequências de vibração, o programa fornece o gráfico com histórico dos deslocamentos, velocidade e aceleração versus o tempo de cada nó da estrutura.

O método implementado para análise não linear foi o método posicional, que atende ao proposto, porém normalmente os resultados são limitados ao primeiro ponto crítico da análise.

Pretende-se em versões futuras implementar o método de comprimento de arco, de modo a obter se necessário for uma análise mais detalhada do caminho crítico da estrutura.

AGRADECIMENTOS

Os Autores agradecem a Universidade Federal do Espírito Santo pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho que iniciou-se como um projeto de graduação do curso de Engenharia Civil.

REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*. Cambridge, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2006.
- Crisfield, M. A. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Volume 2, Advanced Topics, John Wiley & Sons 1997.
- Coda, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M.E. *Concepts and applications of finite element Analysis*, 3ª edição, John Wiley & Sons, 1989.

Gopalakrishnan S., Mitra, M. *Wavelet Methods for Dynamical Problems with Application to Metallic, Composite, and Nano-Composite Structures*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2010.

Lacerda, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

Leite, F. N. *Uma formulação teórica consistente para análise não linear de estruturas treliçadas espaciais*. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000.

Novelli, L. *Ferramenta computacional para o dimensionamento de estruturas tubulares treliçadas*. XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015.

Pinheiro, L. *Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos*. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2003.

Queiroz, P. C. *Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: Ambiente de simulação em Java*. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2010.

Vaz, L. E. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.