



ESTUDO DE TRELIÇAS PLANAS E ESPACIAIS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON E O SOFTWARE VTK

Rafael de Assis Borges

Sebastião Simão da Silva

eng.rafaelmiro@hotmail.com

sebastiao_simao@yahoo.com.br

Universidade de Brasília

Asa Norte, 70.910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil

Alysson Aldrin Barreto Bezerra

alysson_cdf@hotmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Jardim Oásis, 58.900-000, Cajazeiras, Paraíba, Brasil

Resumo. Cada vez mais se tem construído ferramentas computacionais voltadas para o ensino/aprendizagem de análise de estruturas e, variadas são as opções de linguagens de programação e softwares para computação gráfica (inclusive tipo código aberto) utilizados com esta finalidade. Este trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de treliças 2D e 3D no âmbito linear-elástico mediante a construção de um código desenvolvido com a linguagem de programação Python e o pacote numérico NumPy. A formulação dos elementos de barra é descrita. Exemplos extraídos de literaturas conhecidas foram analisados e, na visualização gráfica das respostas obtidas se explorou as funcionalidades do programa Visualization Toolkit (VTK). Comparados os resultados fica comprovada a eficiência dos algoritmos construídos para solução dos problemas estudados.

Palavras-chave: Ensino, Aprendizagem, Treliça, MEF, Python, NumPy, VTK

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural envolve cálculos longos e de certa complexidade e, quando realizada manualmente, pode-se tornar dispendiosa e inviável, além de estar susceptível a erros (SABINO & BONO, 2010).

Várias disciplinas básicas de graduação em engenharia são ofertadas aos alunos para que os mesmos adquiram os saberes e competências necessárias na área de estruturas. Entretanto, vê-se que existem dificuldades dos discentes dos cursos regulares de engenharia, técnico e de tecnologia em geral, em apreender tais conceitos.

Segundo Gavazza & Graça (2011), o aumento na dificuldade de ensinar e compreender a disciplina de resistência dos materiais fundamenta-se nas próprias dificuldades que os alunos têm com conhecimentos básicos. Além disso, o fato de não se saber usar corretamente a máquina de calcular, somando-se à necessidade de trabalhar para se manter, reduz em muito o tempo dedicado ao estudo.

Soriano, Lima & Friedman (2001), em suas experiências em ensino na Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro tem mostrado significativa parcela dos alunos com deficiência em conceitos e métodos estudados em Isostática, identificando um efeito em cadeia, em que o estudante apresenta dificuldades crescentes ao longo do curso.

As dificuldades no ensino de estruturas em algumas universidades são trabalhadas de formas alternativas. Por exemplo, de acordo com Neto (2002), algumas iniciativas de introdução de história da engenharia de estruturas nos cursos de graduação e de pós-graduação vêm sendo tomadas na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Segundo Rovere & Schneider (2003), o avanço computacional das últimas décadas possibilitou o desenvolvimento de programas computacionais para análise estrutural de estruturas contínuas e reticuladas.

Atualmente, com o advento da internet, a questão da disponibilidade do programa, do código fonte e da documentação se torna extremamente simples e viável. O conceito de software livre coaduna-se com os próprios princípios de construção e apropriação do conhecimento por parte da sociedade, democratizando as possibilidades de gerar inovação. Inovações que muitas vezes restritas a grupos com uma determinada gama de conhecimentos. A proposição de se estimular o desenvolvimento de softwares educacionais no modelo de software livre visa permitir que as instituições de ensino, pesquisadores, professores e alunos possam adaptar os programas às suas necessidades pedagógicas e de pesquisa, estimular um ambiente de maior cooperação e integração entre projetos e disciplinas (ORMONDE & SOUZA, 2012).

Muitos programas de análise estrutural com a finalidade didática têm sido desenvolvidos recentemente. Muitos deles são bem escritos e possui a capacidade de resolver uma gama variada de problemas (análise de temperatura, movimentação de apoios, análises não lineares, etc.), no entanto, nem todos utilizam ou desenvolvem recursos que possam permitir uma interação maior com os usuários. Boa parte de programas produzidos ainda possui a abordagem clássica de entrada e saída de dados na forma de arquivo de texto. Não obstante, várias ferramentas têm sido empregadas com a finalidade de superar este empecilho, como por exemplo, o VTK e ParaView (estas de código livre, disponível).

Para que um software seja considerado educacional, ele deve ser preferencialmente livre, permitir o desenvolvimento continuado, possuir fonte disponível e ser bem documentado (ORMONDE & SOUZA, 2012).

Este trabalho tem por objetivo estudar o comportamento de treliças 2D e 3D no âmbito linear-elástico mediante a construção de um código desenvolvido com a linguagem de programação Python.

2 ESTUDO NUMÉRICO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Em análise estrutural, as estruturas reticuladas (Figura 1) podem ser modeladas como uma montagem de diversos segmentos conectados entre si por ligações contínuas ou discretas.

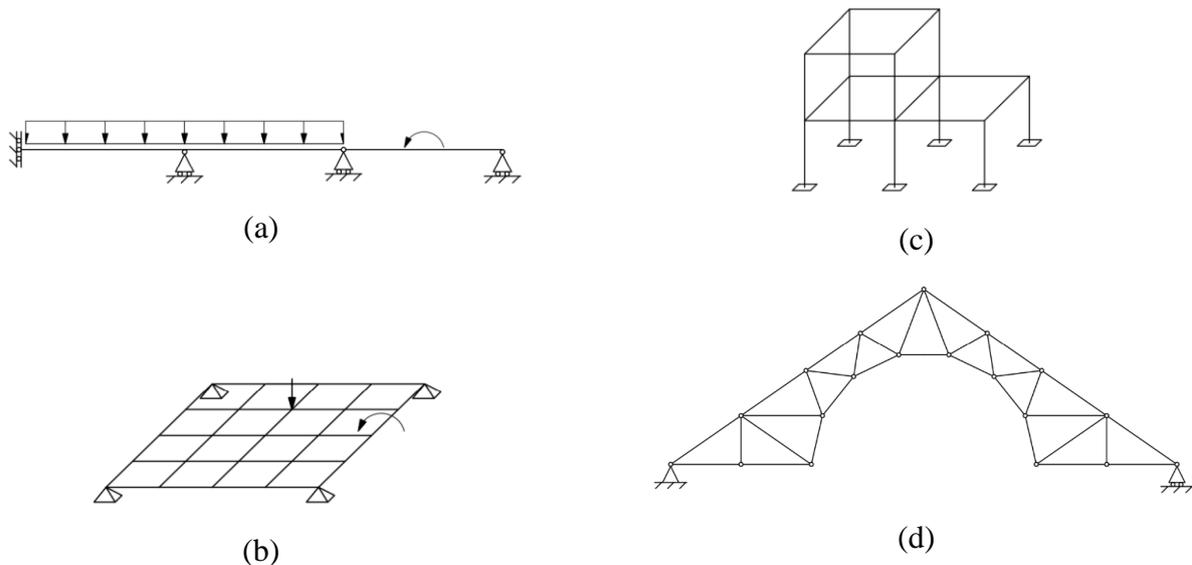


Figura 1. Estruturas reticuladas: (a) viga contínua; (b) modelo de grelha; (c) estrutura aperticada tridimensional; (d) estrutura treliçada.

As treliças são estruturas leves e, por isso, com larga aplicação na construção civil. Elas são compostas de barras delgadas cujas extremidades são supostamente conectadas por articulações sem atrito. Se estas são carregadas apenas nos nós, desenvolve-se carregamento axial em todas as barras. Embora a maioria das ligações de treliça sejam formada pela soldagem ou pelo aparafusamento das extremidades das barras, uma análise da treliça baseada na suposição de ligações articuladas produz um resultado aceitável (LEET, UANG & GILBERT, 2010).

Estruturas complexas geralmente não apresentam soluções exatas, mas sim soluções aproximadas na resolução de seus cálculos estruturais. Um dos métodos utilizados para o cálculo de estruturas é o Método dos Elementos Finitos (MEF) que se baseia no conceito de discretização. Este consiste na ideia de transformar um problema complexo na soma de diversos problemas mais simples. As estruturas divididas em elementos de dimensão finita são ligadas entre si por pontos nodais (nós). As forças e deslocamentos são discretizados nos nós e a composição destes elementos para constituir a estrutura resultará em um sistema de equações algébricas que será tratado matricialmente – Figura 2.

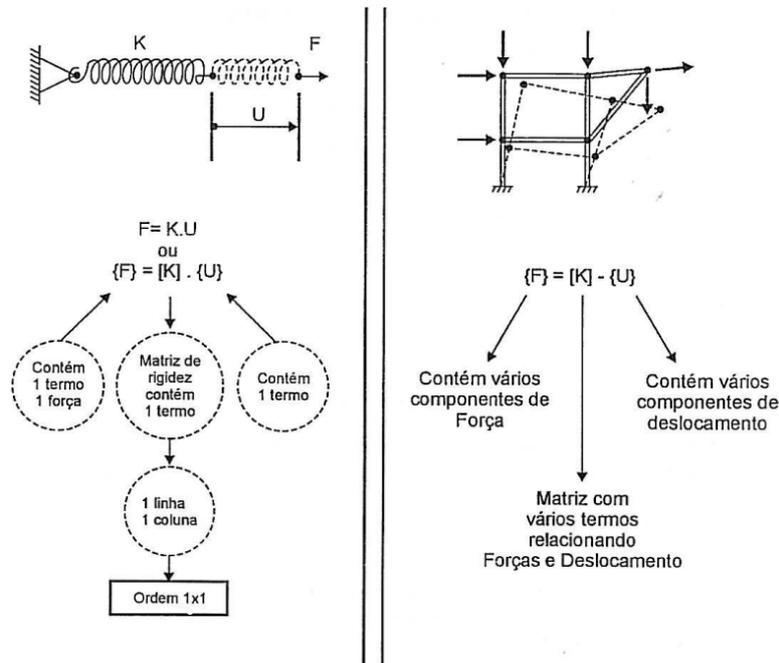


Figura 2. Discretização de uma estrutura reticulada e seu sistema de equações algébricas resultante.
Fonte: Alves Filho (2000).

3 APLICAÇÕES DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE ESTRUTURAS

Cada vez mais se tem construído ferramentas computacionais voltadas para o ensino/aprendizagem de análise de estruturas e, variadas são as opções de linguagens de programação e softwares para computação gráfica (inclusive tipo código aberto) utilizados com esta finalidade.

Em geral, problemas complexos como análise de grandes estruturas, requerem um alto poder de processamento computacional. Dessa maneira, em computação científica há uma grande ênfase no desenvolvimento utilizando a linguagem Fortran, pois permite a criação de programas que primam pela velocidade de execução. Outra linguagem bastante utilizada em computação científica, também por razões de desempenho, é a linguagem de programação C. Fortran surgiu como uma linguagem procedural e somente versões recentes suportam o paradigma de Programação Orientada a Objeto (POO). No caso da linguagem C, somente seu descendente, C++ suporta PPO (BURIOL & ARGENTA, 2009).

A POO tem como objetivos principais propiciar a reutilização de código e garantir a organização dos dados e códigos para facilitar futuras modificações ou implementações. Isso é possível através da propriedade da hereditariedade, do encapsulamento de dados, da utilização de métodos virtuais, e do polimorfismo com ponteiros que a programação orientada a objetos no fornece (LISERRE, 2003).

Um exemplo de programa educacional destinado ao ensino do comportamento de estruturas e ao cálculo estrutural de pórticos planos, treliças, vigas, entre outras estruturas da Engenharia Estrutural é o Ftool (MARTHA, 2002). Tal programa vem sendo largamente utilizado por alunos das disciplinas de Estruturas por ser de domínio público e fácil manuseio.

A linguagem Python é orientada a objetos, interpretada, e escrita para ser de fácil aprendizado, além de dispor de vários módulos bastante convenientes o que faz dela uma opção que provê alta produtividade no desenvolvimento de aplicações. De maneira geral, as linguagens interpretadas tais como Python alcançam um desempenho inferior em comparação a linguagens como C e Fortran, no entanto, permitem um desenvolvimento mais rápido. O NumPy é o pacote básico da linguagem Python que permite trabalhar com arranjos, vetores e matrizes de N dimensões, de uma forma comparável e com uma sintaxe semelhante ao software proprietário MATLAB, mas com muito mais eficiência, e com toda a expressividade da linguagem (BURIOL & ARGENTA, 2009).

A linguagem de programação Visual Basic possibilita a construção de uma interface gráfica de forma que o programa se torne mais acessível ao usuário e, portanto, pode ser utilizada tanto para fins de aprendizagem quanto de projeto. Jaeger (2012) utilizou esta linguagem para estudo de estrutura de concreto armado sob estado plano de tensão. Este autor implementou um modelo numérico e a interface de entrada e visualização de dados com Visual Basic.

A linguagem de alto nível Delphi também tem sido utilizada em computação científica pois além de oferecer um bom desempenho numérico, essa linguagem permite a implementação de uma interface para plataforma Windows, tornando o programa uma ferramenta prática e de fácil manuseio. Lisserre & Ramalho (2008) fez uso do Object Pascal do Delphi para análise de estruturas de edifícios, controlando através de uma interface uma série de outros programas desenvolvidos no FORTRAN.

Um outro exemplo de trabalho implementado em Delphi é o apresentado por Silva (2003). Este tinha por objetivo analisar problemas geotécnicos empregando elementos finitos mistos e híbridos. O código desenvolvido no trabalho antes citado mostra a versatilidade dessa linguagem já que o ambiente obtido contava com diversos recursos – edição, geração de malhas, estabelecimento das condições de contorno, aplicação dos carregamentos, além da visualização dos resultados.

A linguagem de programação MATLAB é uma linguagem interpretada, assim como muitas versões de Basic, e, como esta, é acessível. O programa pode ser usado como uma simples calculadora ou para executar programas grandes previamente escritos. O MATLAB é ideal para uso educacional e para desenvolver rapidamente protótipos de novos programas - Chapman (2012). Para o citado autor, uma grande vantagem do MATLAB é este possuir uma grande biblioteca de funções predefinidas que proporcionam soluções testadas e empacotadas para muitas tarefas técnicas básicas. Adicionalmente, esta linguagem possui ferramentas que permitem construir interativamente interfaces gráficas. Por todas estas características o MATLAB tem sido um dos programas mais empregados no meio científico para a construção de códigos para análises com MEF.

O Scilab é um programa científico para computação numérica similar ao MATLAB mas com a vantagem de ser distribuído gratuitamente. Com estas funções é atualmente usado em diversas aplicações, inclusive educacionais. Um exemplo disso foi o trabalho desenvolvido por Souza (2015), que analisou treliças planas no âmbito não linear.

Julia é uma linguagem de programação dinâmica de alto nível projetado para atender aos requisitos de alto desempenho da computação numérica e científica, enquanto também é eficaz para a programação de propósito geral (BEZANSON *et al.*, 2012). Segundo Del Río (2015) recentemente seu uso em pesquisas de métodos numéricos vem crescendo tornando-se popular no meio científico. Por sua vez, a biblioteca FemLab permite realizar análises estáticas lineares e não lineares em duas e três dimensões utilizando elementos

isoparamétricos. Esta biblioteca permite também realizar análises com o método semi-embutido e conta com um gerador de malhas apropriado para determinar as interseções dos reforços com os elementos sólidos.

Nesta pesquisa de Del Ríó (2015), o pós-processamento dos resultados de elementos finitos foi feito por meio do programa ParaView desenvolvido pela companhia Kitware, Inc. O ParaView é um programa open-49 source, multi-plataforma para análise de dados, visualização e exploração de dados de forma interativa em 2D e 3D.

A visualização científica é uma forma de comunicação que consiste na transformação de dados em representações que refletem a informação contida nesses dados. Souza (2003) define visualização como a transformação de dados ou informações com eficiência em imagens gráficas, de forma a facilitar o seu entendimento.

Há vários programas de visualização científica como o ParaView, *Visualization ToolKit* (VTK), etc. O ParaView é uma aplicação para visualização de dados científicos, com interface gráfica simples e parametrizável, e que incorpora métodos para processamento de imagens, como filtros para segmentação, além de suporte à computação distribuída e a vários sistemas operacionais.

O VTK é um sistema de software de código aberto para computação gráfica 3D, processamento de imagens e visualização. Consiste numa biblioteca de classes em C++ e várias camadas de interfaces interpretadas, incluindo Tcl/Tk, Java, e Python, suportando uma ampla variedade de algoritmos de visualização para diferentes tipos de dados (BURIOL *et al.*, 2007).

4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE BARRA

A formulação relativa ao elemento de barra 2D apresentada a seguir foi obtida de Alves Filho (2000). Seja a estrutura da Figura 3 composta por elementos de barra articulados na sua extremidade.

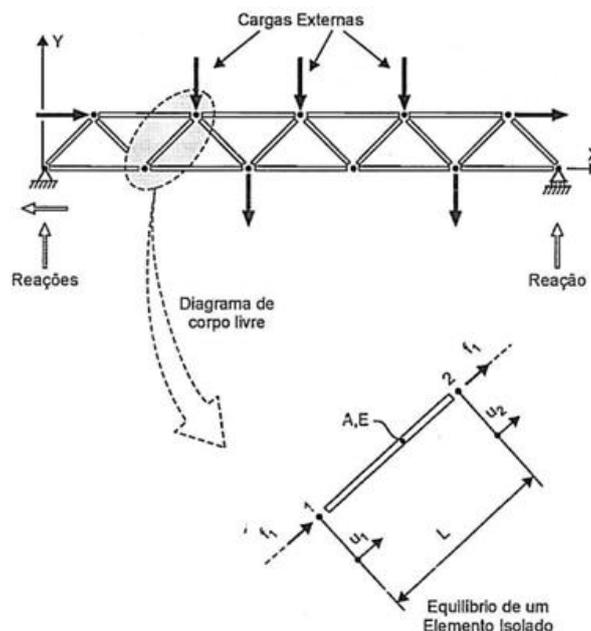


Figura 3. Elemento de barra e seus componentes de deslocamento e de força. Fonte: Alves Filho (2000).

A relação entre as forças e os deslocamentos do elemento no sistema local apresentado em detalhe na Figura 3 é dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

ou matricialmente por,

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}^{(e)} \boldsymbol{\delta}. \quad (2)$$

A rigidez do elemento é então dada pela matriz:

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A rigidez local do elemento dada por (3) pode ser transformada para o sistema global mediante o emprego de uma matriz denominada matriz de transformação \mathbf{T} . Com este intuito, considere a relação entre esforços nos dois sistemas de coordenadas dada pela expressão:

$$\mathbf{f} = \mathbf{TF}. \quad (4)$$

A relação entre as componentes de deslocamentos nos dois sistemas é semelhante à relação entre os esforços – Figura 4. Assim:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{T} \boldsymbol{\Delta}. \quad (5)$$

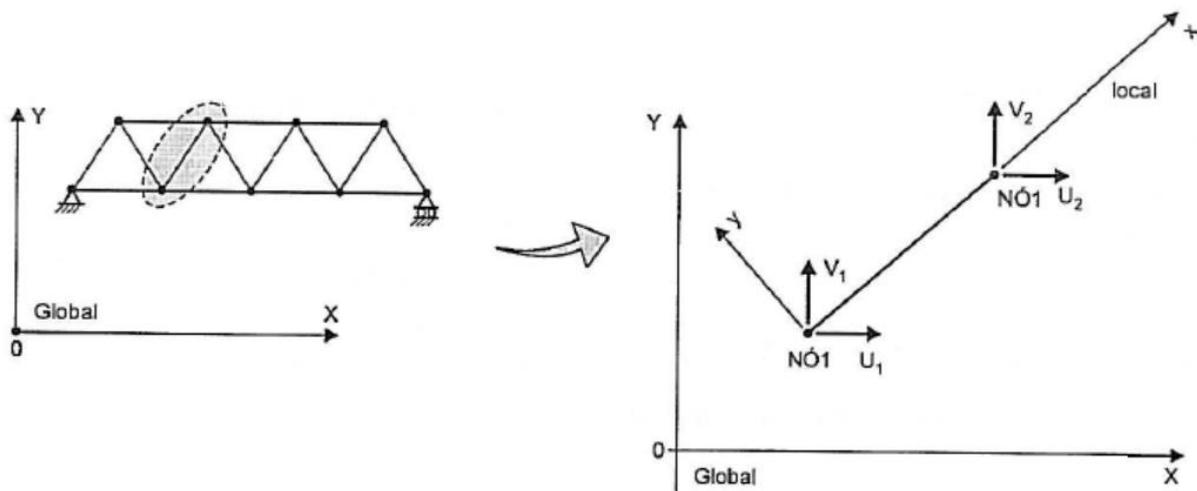


Figura 4. Elementos de barra de treliça e seus componentes de deslocamento no sistema global. Fonte: Alves Filho (2000) - Adaptado.

Substituindo a Equação (4) e (5) na Equação (2), tem-se:

$$f = k^{(e)} \delta \tag{6}$$

$$TF = k^{(e)} T \Delta$$

Operando em ambos os lados da igualdade com a matriz T^{-1} , tem-se:

$$T^{-1}TF = T^{-1}k^{(e)}T\Delta. \tag{7}$$

Como $T^{-1}T = I$ (matriz identidade), obtém-se:

$$F = T^{-1}k^{(e)}T\Delta. \tag{8}$$

Tendo em conta que $T^{-1} = T^T$, a matriz de rigidez do elemento no sistema global é então dada por:

$$K^{(e)} = T^T k^{(e)} T. \tag{9}$$

A matriz de transformação (ou bi-rotação) do elemento é obtida fazendo-se o equilíbrio dos esforços globais sobre os nós do elemento segundo a direção dos eixos do sistema local – Figura 5.

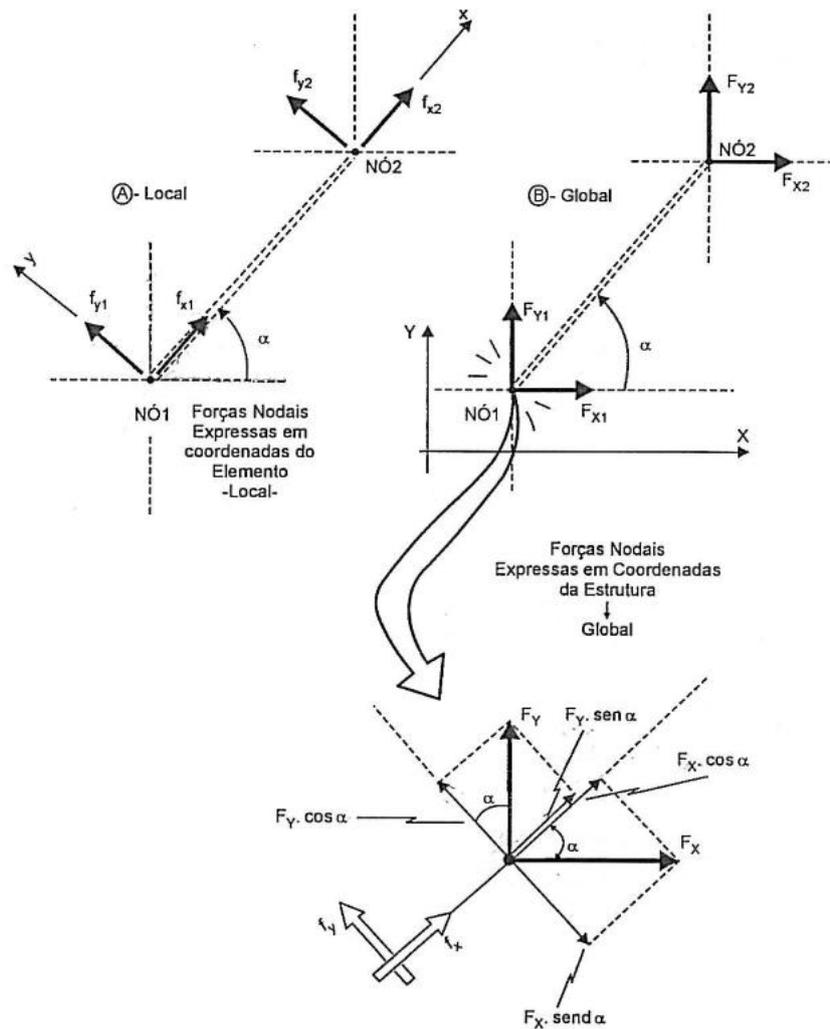


Figura 5. Equilíbrio sobre os nós do elemento para a determinação da matriz que transforma forças do sistema local para o sistema global. Fonte: Alves Filho (2000).

Assim, o equilíbrio sobre o nó 1 do elemento no sistema local produz:

$$\begin{aligned} f_{x1} &= F_{x1} \cos\alpha + F_{y1} \text{sen}\alpha \\ f_{y1} &= -F_{x1} \text{sen}\alpha + F_{y1} \cos\alpha \end{aligned} \quad (10)$$

e, sobre o nó 2:

$$\begin{aligned} f_{x2} &= F_{x2} \cos\alpha + F_{y2} \text{sen}\alpha \\ f_{y2} &= -F_{x2} \text{sen}\alpha + F_{y2} \cos\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

De onde se depreende que a matriz de transformação é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

A matriz de rigidez no sistema global (dada por (9)) do elemento de barra 2D é finalmente expressa como:

$$K^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\alpha & \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha & -\cos\alpha \cdot \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \\ & \cos\alpha \cdot \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha \\ & & \cos\alpha \cdot \cos\alpha & \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \\ \text{Simétr.} & & & \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

A dedução da matriz de rigidez global do elemento de barra no espaço pode ser vista por exemplo em Logan (2007) e, tem como forma final:

$$K^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha_x^2 & \cos\alpha_x \cos\alpha_y & \cos\alpha_x \cos\alpha_z & -\cos\alpha_x^2 & -\cos\alpha_x \cos\alpha_y & -\cos\alpha_x \cos\alpha_z \\ & \cos\alpha_y^2 & \cos\alpha_y \cos\alpha_z & -\cos\alpha_x \cos\alpha_y & -\cos\alpha_y^2 & -\cos\alpha_y \cos\alpha_z \\ & & \cos\alpha_z^2 & -\cos\alpha_x \cos\alpha_z & -\cos\alpha_y \cos\alpha_z & -\cos\alpha_z^2 \\ & & & \cos\alpha_x^2 & \cos\alpha_x \cos\alpha_y & \cos\alpha_x \cos\alpha_z \\ & & & & \cos\alpha_y^2 & \cos\alpha_y \cos\alpha_z \\ \text{Simétr.} & & & & & \cos\alpha_z^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

5 METODOLOGIA

Utilizando a linguagem Python realizou-se a implementação de elementos de barra 2D e 3D para análise estrutural de treliças.

Inicialmente, o programa realiza uma leitura dos dados de entrada. Assim, o usuário deve fornecer ao software todas as informações necessárias sobre o problema a ser analisado. Estas (sequencialmente) são:

- Quantidades de nós, barras, forças e reações de apoio;
- Posição dos nós (coordenadas em x, y e z respectivamente);
- Conectividades dos nós com as barras;
- Cargas atuantes, indicando o nó e grau de liberdade;
- Área da secção transversal e módulo de elasticidade de cada barra.

Em seguida, fazendo-se uso dos dados de entrada, o programa processa-os e calcula as matrizes de rigidez do elemento. Estas são então usadas para montar a matriz de rigidez da estrutura.

O próximo passo é a aplicação das condições de contorno do problema. Estas são pré-estabelecidas nos dados de entrada. Dessa forma tem-se um sistema de equações com uma matriz de rigidez não singular. Com a solução deste sistema, obtém-se os valores de deslocamentos e forças nodais desconhecidas. Posteriormente, o programa calcula as deformações nos elementos. Estas são constantes ao longo da seção transversal para um elemento de barra.

Por fim, o código calcula as tensões atuantes em cada membro estrutural, que dado o carácter dos esforços, também são constantes. A seguir, na Figura 6, apresenta-se o fluxograma de montagem do código.

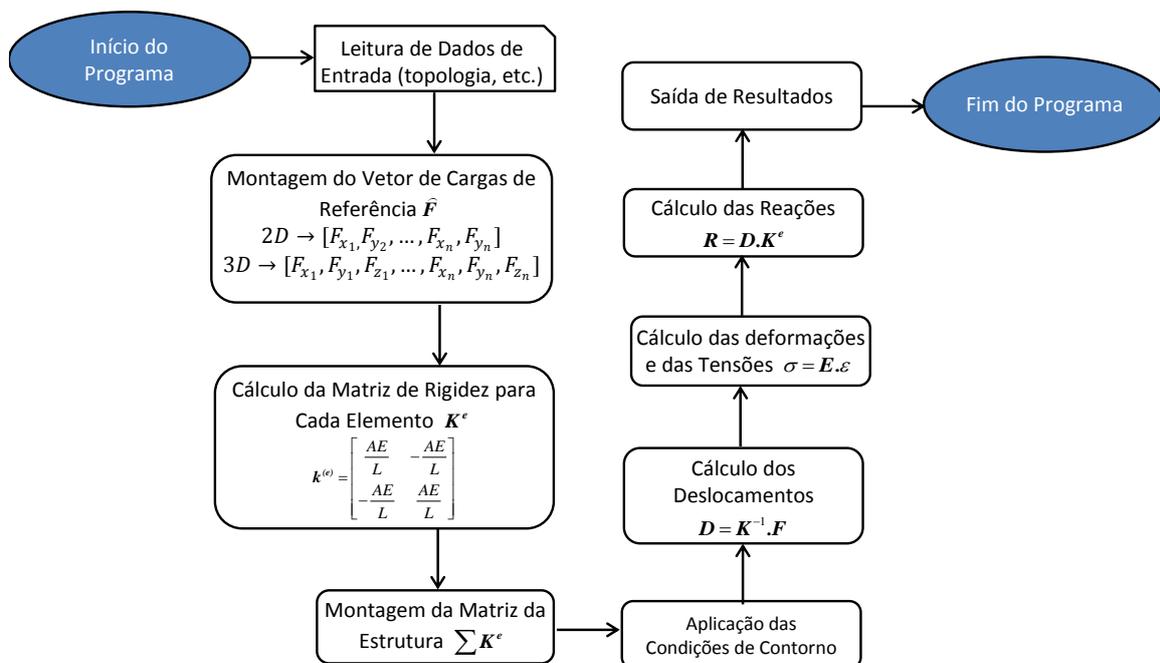


Figura 6. Fluxograma (as variáveis em negrito se referem aos entes matriciais).

Com os resultados obtidos no programa (deslocamentos e tensões), foi feito a visualização através do VTK. O programa foi montado composto por: entrada de dados, filtro, mapper, render e visualização da imagem criada. Onde filtro é o passo onde os dados de interesse são extraídos, o “mapeador” (mapper) é o passo onde são construídas as geometrias para representar os dados extraídos, e o último passo, o “render” (ou renderizador) é onde a geometria é convertida em uma imagem para a visualização.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Visando a aplicação de ferramentas computacionais no cálculo de treliças 2D e 3D selecionou-se da literatura três exemplos, um 2D e dois 3D. A resolução destes exemplos teve como objetivo mostrar a eficiência dessas ferramentas. Usando o código implementado procedeu-se com a análise dos problemas antes mencionados e, dessas fórmulas, se obteve os resultados de deslocamento, tensões nas barras e reações de apoio. Posteriormente, foi realizada a visualização da estrutura deformada (Exemplo 1) e das tensões (Exemplo 2 e Exemplo 3) por meio do VTK.

6.1 Exemplo 1

Este exemplo foi extraído do livro de Leet, Uang & Gilbert (2010), página 162, problema 4.46. Tal exemplo trata-se de uma ponte de uma estrada de pista dupla (Figura 7), apoiada em duas treliças sob a pista de rolamento, com comprimento de 64 pés, e cujo tabuleiro consiste em uma laje de concreto armado de 8 pol apoiada em quatro longarinas de aço. A laje é protegida por uma superfície de revestimento de 2 pol de asfalto. As longarinas de 16 pés de comprimento são suportadas pelas transversinas, as quais, por sua vez, transferem as sobrecargas e as cargas permanentes para os nós de cada treliça. A treliça, aparafusada no apoio da esquerda no ponto A, pode ser tratada como apoiada em articulação fixa. A extremidade direita da treliça repousa em uma almofada de elastômero em G. A almofada de elastômero, que permite somente deslocamento horizontal do nó, pode ser tratada como articulação móvel. As cargas mostradas representam as sobrecargas e as cargas permanentes totais. A carga de 18 kips é uma sobrecarga adicional que representa uma carga de roda pesada.

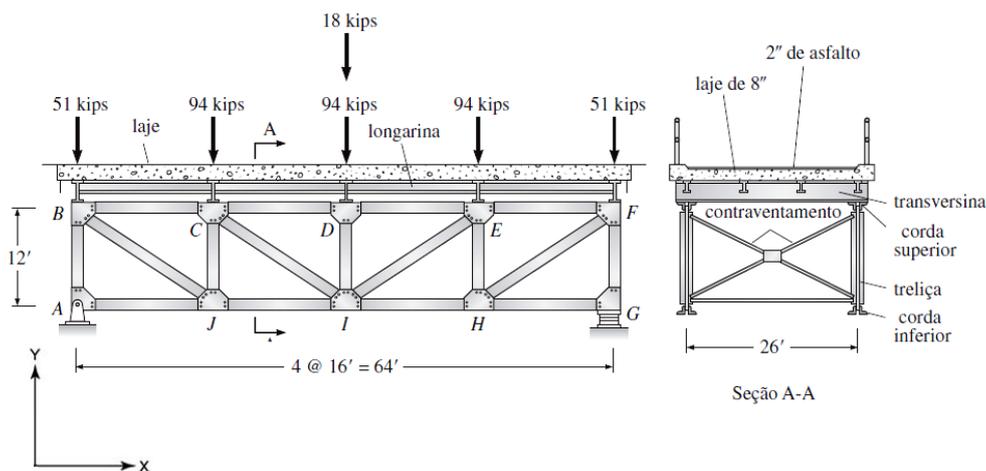


Figura 7. Exemplo de treliça 2D. Fonte Leet, Uang & Gilbert (2010)

Após a entrada de dados no programa e seu processamento, obteve-se os resultados dos deslocamentos nos nós constantes na Tabela 1.

Tabela 1. Deslocamento nos nós do Exemplo 1

Nó	δx (pol)	δy (pol)
1	0,0000	0,0000
2	2,2334	-0,4990
3	1,5713	-5,5734
4	0,6621	-7,7075
5	-0,2472	-5,5734
6	-0,9092	-0,4990
7	1,3241	0,0000
8	1,3241	-5,2010
9	0,6621	-7,4294
10	$7,8124 \times 10^{-16}$	-5,2010

A Tabela 2 mostra os resultados das tensões em cada barra da estrutura.

Tabela 2. Tensões nas Barras do Exemplo 1

Barra	Tensão (kip/pol²)
1	-100,50
2	$1,18 \times 10^{-13}$
3	-100,00
4	125,00
5	-137,33
6	46,67
7	-75,00
8	-137,33
9	-56,00
10	-100,00
11	-75,00
12	46,67
13	-100,50
14	125,00
15	0,00
16	100,00
17	100,00

E, por sua vez, são apresentados na Tabela 3 os resultados para as reações de apoio. O apoio do nó 1 é capaz de gerar reação nas duas direções, mas, devido a inexistência de carga horizontal no problema, a reação na direção no eixo x é praticamente nula. No nó 7 há reação em uma direção por se tratar de apoio do primeiro gênero.

Tabela 3. Resultado das reações nos apoios do Exemplo 1

Apoio	Reação (kip)
1x	$-1,18 \times 10^{-13}$
1y	100,5
7y	100,5

Os resultados encontrados pelo programa desenvolvido neste exemplo são os mesmos calculados analiticamente e usando o FTOOL.

A Figura 8 apresenta a estrutura deformada, com o resultado de deslocamentos nodais. Os valores de deslocamentos para melhor visualização foram multiplicados por 2. A visualização foi feita através do software VTK.

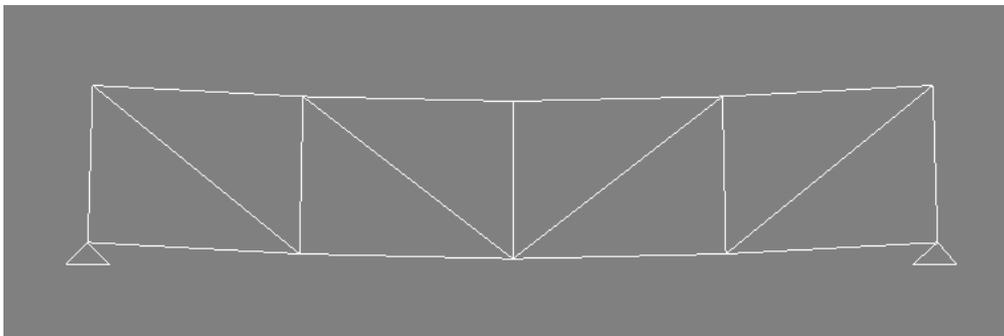


Figura 8. Estrutura deformada do Exemplo 1

É interessante o uso da visualização científica dos dados pois pode-se ter uma ideia melhor da condição final da estrutura mediante aos esforços, mostrando assim as regiões de maior e menor deslocamento.

6.2 Exemplo 2

Trata-se de uma treliça espacial que foi proposta por Suzuki (2014). A Figura 9 ilustra suas barras e nós. O engastamento acontece nos nós 1, 2, 3 e 4.

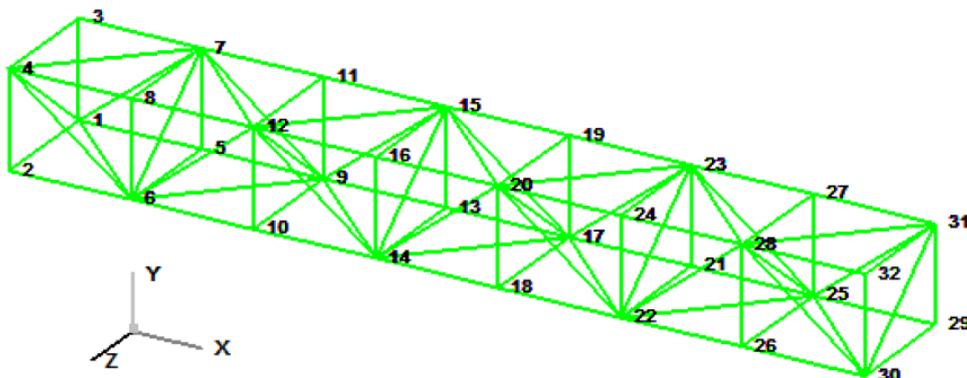


Figura 9. Exemplo de treliça 3D

Para o exemplo, considerou-se módulo de elasticidade da estrutura de 70 GPa e a área da seção transversal de 0,0008 m². Os carregamentos são de -250 N na direção Y nos nós 7, 8, 11,

12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27 e 28. A Tabela 4 apresenta os resultados de deslocamentos nodais da estrutura.

Tabela 4. Resultado das reações nos apoios do Exemplo 2

Nó	δx (m)	δy (m)	δz (m)
1	0,00000000	0,00000000	0,00000000
2	0,00000000	0,00000000	0,00000000
3	0,00000000	0,00000000	0,00000000
4	0,00000000	0,00000000	0,00000000
5	-0,00482143	-0,01220482	0,00675000
6	-0,06750000	-0,01220482	0,00675000
7	0,00482143	-0,01252625	0,00675000
8	0,00675000	-0,01220482	0,00675000
9	-0,00964286	-0,03314337	0,00385714
10	-0,00996429	-0,03314337	0,00385714
11	0,00964286	-0,03314337	0,00385714
12	0,00996429	-0,03346480	0,00385714
13	-0,01157143	-0,05960135	0,00739286
14	-0,01317857	-0,05960135	0,00739286
15	0,01157143	-0,05992277	0,00739286
16	0,01317857	-0,05960135	0,00739286
17	-0,01350000	-0,08900733	0,00707143
18	-0,01414286	-0,08900733	0,00707143
19	0,01350000	-0,08900733	0,00707143
20	0,01414286	-0,08932876	0,00707143
21	-0,01382143	-0,11943275	0,00867857
22	-0,01510714	-0,11943275	0,00867857
23	0,01382143	-0,11975417	0,00867857
24	0,01510714	-0,11943275	0,00867857
25	-0,01414286	-0,14959188	0,00964286
26	-0,01510714	-0,14959188	0,00964286
27	0,01414286	-0,14959188	0,00964286
28	0,01510714	-0,14991331	0,00964286
29	-0,01414429	-0,17884188	0,01060714
30	-0,01510714	-0,17884188	0,01060714
31	0,01414286	-0,17884188	0,01060714
32	0,01510714	-0,17884188	0,01060714

Na Tabela 5 pode-se observar os resultados das tensões nas barras. Os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho são os mesmos publicados por Suzuki (2014).

Tabela 5. Resultado das tensões nas barras do Exemplo 2

Barra	Tensão (Pa)	Barra	Tensão (Pa)	Barra	Tensão (Pa)
1	0,00	33	-4687500,00	65	-883883,48
2	0,00	34	-4687500,00	66	441941,74
3	0,00	35	-1875000,00	67	-1,91 x 10 ⁻⁸
4	0,00	36	-1875000,00	68	2651650,43
5	0,00	37	-312500,00	69	-2209708,69
6	-312500,00	38	-312500,00	70	1767766,95
7	0,00	39	3,37 x 10 ⁻⁹	71	-1325825,21
8	0,00	40	-6562500,00	72	883883,48
9	2,11 x 10 ⁻⁹	41	-3125000,00	73	-441941,74
10	0,00	42	-3125000,00	74	7,63 x 10 ⁻⁸
11	-4,22 x 10 ⁻¹⁰	43	-937500,00	75	-7,75 x 10 ⁻⁹
12	-312500,00	44	-937500,00	76	8,94 x 10 ⁻⁹
13	8,43 x 10 ⁻¹⁰	45	-3,37 x 10 ⁻⁸	77	-1,01 x 10 ⁻⁸
14	-312500,00	46	-3,71 x 10 ⁻⁸	78	3,58 x 10 ⁻⁹
15	0,00	47	6562500,00	79	-1,31 x 10 ⁻⁸
16	-6,75 x 10 ⁻⁹	48	3125000,00	80	2,68 x 10 ⁻⁸
17	8,43 x 10 ⁻¹⁰	49	3125000,00	81	-4,00 x 10 ⁻⁸
18	1,34 x 10 ⁻⁸	50	937500,00	82	-3,70 x 10 ⁻⁸
19	1,69 x 10 ⁻⁹	51	932500,00	83	3,64 x 10 ⁻⁸
20	-312500,00	52	6,75 x 10 ⁻⁹	84	-3,58 x 10 ⁻⁸
21	0,00	53	8,43 x 10 ⁻⁹	85	2,50 x 10 ⁻⁸
22	-312500,00	54	4687500,00	86	-1,79 x 10 ⁻⁸
23	0,00	55	4687500,00	87	3,28 x 10 ⁻⁸
24	-1,35 x 10 ⁻⁸	56	1875000,00	88	-1,73 x 10 ⁻⁸
25	-5,06 x 10 ⁻⁹	57	1875000,00	89	0,00
26	0,00	58	312500,00	90	1,19 x 10 ⁻⁹
27	0,00	59	312500,00	91	1,79 x 10 ⁻⁹
28	-312500,00	60	1,69 x 10 ⁻⁹	92	1,49 x 10 ⁻⁸
29	0,00	61	-2651650,43	93	3,58 x 10 ⁻⁹
30	2,70 x 10 ⁻⁸	62	2209708,69	94	-1,07 x 10 ⁻⁸
31	0,00	63	-1767766,95	95	-1,01 x 10 ⁻⁸
32	0,00	64	1325825,21	96	6,80 x 10 ⁻⁸

As reações de apoio são mostradas na Tabela 6 para cada componente (x, y, z).

Tabela 6. Resultado das reações nos apoios do Exemplo 2

Nó	R _x (N)	R _y (N)	R _z (N)
1	5250,00	1500,00	4,32 x 10 ⁻¹²
2	5250,00	0,00	0,00
3	-5250,00	1500,00	-2,09 x 10 ⁻¹¹
4	-5250,00	0,00	0,00

A Figura 10 mostra em escala de cores os resultados das tensões nas barras da estrutura através do VTK.

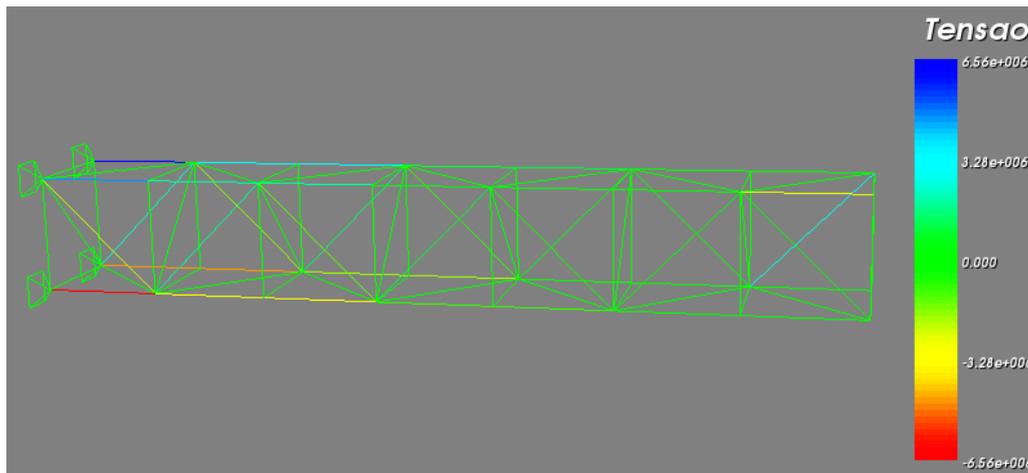


Figura 10. Resultado de tensão do Exemplo 2

6.3 Exemplo 3

Simulou-se uma Torre de Transmissão, proposta por Pappalardo Jr & Agnelo (2014) ilustrada na Figura 11. Na Figura 12 mostra a discretização da estrutura.



Figura 11. Imagem real da Torre de Transmissão

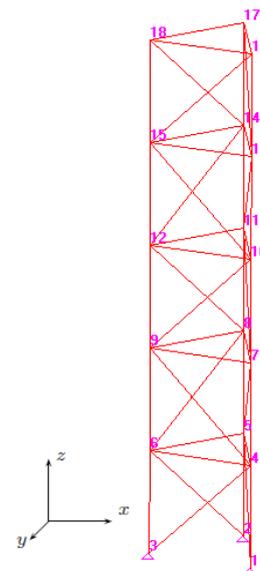


Figura 12. Discretização da Torre de Transmissão

Como foi academicamente proposto por Pappalardo Jr & Agnelo (2014), no nó 13 é aplicado uma carga de -4 kN na direção z, no nó 18 na direção z uma carga de -3 kN e nos nós 14, 15, 17 e 18 cargas de 2 kN na direção x. Os nós 1, 2 e 3 encontram-se engastados.

A Tabela 7 apresenta os resultados referente aos deslocamentos nodais.

Tabela 7. Resultado das reações nos apoios do Exemplo 3

Nó	δx (m)	δy (m)	δz (m)
1	0,00000000	0,00000000	0,00000000
2	0,00000000	0,00000000	0,00000000
3	0,00000000	0,00000000	0,00000000
4	0,61340461	-1,01092424	$-5,9481 \times 10^{-15}$
5	1,03799856	-0,27548438	0,70415704
6	0,18881066	-0,27548438	-0,15638953
7	1,35545519	-2,67996116	-0,45773672
8	1,94042274	-1,66673791	1,15950731
9	0,77048763	-1,66673791	-0,22617398
10	2,92570694	-4,50048846	-0,66666667
11	3,67104811	-3,20948182	1,52825250
12	2,18036578	-3,20948182	-0,31381832
13	4,63291199	-6,85362167	-0,85773672
14	5,61619533	-5,22247554	1,64819092
15	3,77358887	-5,24047448	-0,31485758
16	6,51083396	-8,68026527	-0,89107005
17	7,33071991	-7,26013948	1,68152425
18	5,74290770	-7,27813843	-0,35816012

Na Tabela 8 têm-se os resultados das tensões nas barras da estrutura.

Tabela 8. Resultado das tensões nas barras do Exemplo 3

Barra	Tensão (Pa)	Barra	Tensão (Pa)	Barra	Tensão (Pa)
1	$-1,5862 \times 10^{-7}$	16	$-1,8609 \times 10^6$	31	$3,1984 \times 10^6$
2	$-4,7844 \times 10^6$	17	$-1,6654 \times 10^6$	32	$4,7844 \times 10^6$
3	$2,1366 \times 10^{-9}$	18	$-1,1395 \times 10^{-8}$	33	$4,6187 \times 10^5$
4	$1,8778 \times 10^7$	19	$-5,5715 \times 10^6$	34	$-2,7714 \times 10^4$
5	$1,6654 \times 10^6$	20	$-4,7844 \times 10^6$	35	$-1,6654 \times 10^6$
6	$-7,1223 \times 10^{-9}$	21	$-2,8489 \times 10^{-8}$	36	$-1,6000 \times 10^6$
7	$-4,1704 \times 10^6$	22	$9,8332 \times 10^6$	37	$-8,8889 \times 10^5$
8	$3,4344 \times 10^5$	23	$1,6654 \times 10^6$	38	$-1,2820 \times 10^6$
9	$-2,8489 \times 10^{-9}$	24	$-3,4187 \times 10^{-8}$	39	$-1,1395 \times 10^{-8}$
10	$-1,2206 \times 10^7$	25	$-2,3372 \times 10^6$	40	$8,8889 \times 10^5$
11	$-3,4344 \times 10^5$	26	$3,4344 \times 10^5$	41	$1,6654 \times 10^6$
12	$8,5466 \times 10^{-9}$	27	0,00	42	$4,6187 \times 10^5$

13	$1,2143 \times 10^7$	28	$-5,0952 \times 10^6$	43	$1,1547 \times 10^6$
14	$4,7844 \times 10^6$	29	$-3,4344 \times 10^5$	44	$1,2820 \times 10^6$
15	$1,7094 \times 10^{-8}$	30	$-9,2375 \times 10^5$	45	$9,2375 \times 10^5$

As reações de apoio são mostradas na Tabela 9 para cada componente (x, y, z).

Tabela 9. Resultado das reações nos apoios do Exemplo 3

Nó	Rx (N)	Ry (N)	Rz (N)
1	-7464,20	4309,33	8293,56
2	0,00	3000,00	-49830,64
3	-535,80	-309,33	9830,64

Os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho encontram-se de acordo com os publicados por Pappalardo Jr & Agnelo (2014). Os resultados das tensões nas barras do Exemplo 3 são mostrados na Figura 13 através do VTK.

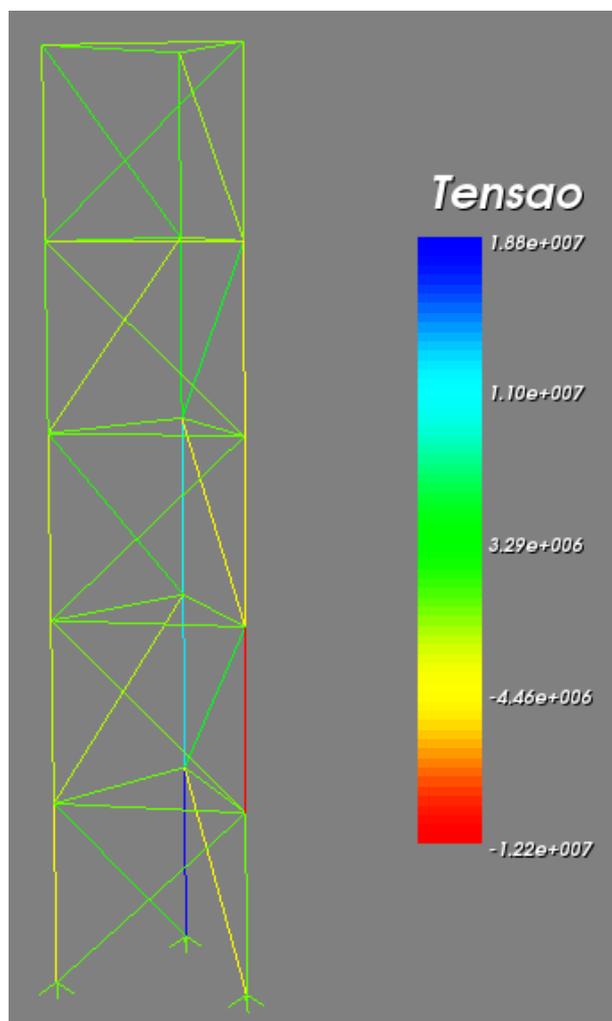


Figura 13. Resultado de tensão do Exemplo 3

7 CONCLUSÕES

Com a implementação realizada para análise de treliças 2D e 3D através do Método dos Elementos Finitos obteve-se resultados de deslocamentos nodais, tensões nas barras e reações nos apoios.

Além disso, destaca-se que é importante o emprego da computação gráfica para otimização de análise das treliças aqui calculadas. A visualização obtida através do VTK traz uma melhor ideia da distribuição dos esforços e deslocamentos nas barras da estrutura.

Os códigos desenvolvidos, para treliça 2D e 3D, não apresentam diferença numérica entre os valores obtidos e os valores da literatura. O uso de ferramentas computacionais vem como alternativa para catalisar o interesse dos discentes do curso de engenharia e contribuir para um maior rendimento nas disciplinas relacionadas a área de estruturas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao professor Antônio Carlos de Oliveira Miranda por ter esclarecido as dúvidas referentes ao software VTK.

REFERÊNCIAS

- Alves Filho, A., 2000. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE. São Paulo: Érica.
- Bezanson, J., Karpinski, S., Shah, V., Edelman, A., 2012. *Julia (linguagem de programação)*. Disponível em < [https://pt.wikipedia.org/wiki/Julia_\(linguagem_de_programa\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Julia_(linguagem_de_programa)) >.
- Buriol, T. M., & Argenta, M. A., 2009. Acelerando o Desenvolvimento e o Processo de Análises Numéricas Computacionais Utilizando Python e Cuda. *XXX Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*.
- Buriol, T. M., Neto, M. S. A., Scheer, S., & Godoi, W. C., 2007. Modelagem em VRML para Visualização Científica Utilizando o Visualization ToolKit. *IX Symposium on Virtual and Augmented Reality (SVR)*.
- Chapman, S. J., 2010. *Programação em MATLAB para Engenheiros*. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning.
- Del Río, J. D., 2015. *Aplicação do Método de Elementos Finitos Semi-Embutidos na Simulação de Vigas de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília.
- Gavazza, S., & Graça, M. S. B. A., 2011. Dificuldades para o aprendizado de Resistência dos Materiais. *XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*.
- Jaeger, R. R., 2012. *Vigas de Concreto Armado Sob Estado Plano de Tensão: Programa Computacional Aplicando o Método dos Elementos Finitos*. Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil. Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Leet, K. M., Uang, C. M., & Gilbert, A. M., 2010. *Fundamentos da Análise Estrutural*. 3 ed. Porto Alegre: AMGH.
- Lisserre, L., 2003. *Sistema Computacional com Geração de Dados e Visualização de Resultados para Estrutura de Edifícios*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Liserre, L., & Ramalho, M. A., 2008. Sistema Computacional com Geração de Dados e Visualização de Resultados para Estrutura de Edifícios. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 10, n. 46, p. 33-59.

Logan, D. L., 2007. *A First Course in the Finite Element Method*. 4 ed., Canadá: Thompson Learning.

Martha, L.F., 2002. “*FTOOL - Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas*”, Versão Educacional 2.11 para Windows, Tecgraf, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

Neto, H. L., 2002. Ensinando História da Engenharia de Estruturas a Aluno de Engenharia Civil. *XXX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*.

Ormonde, P. C., & Souza, A. S. C., 2012. “Software Educacional Livre para Análise Não-Linear e Dimensionamento de Pórtico Plano em Estruturas Metálicas”. *Congresso Latino-Americano da Construção Metálica (ConstruMetal)*.

Pappalardo Jr, A., & Agnelo, D. P., 2014. *Desenvolvimento de Programa Análise de Treliças Espaciais*. Trabalho Final de Disciplina. Faculdade de Engenharia São Paulo.

Rovere, H. L. L., & Schneider, A. F., 2003. ANEST – Programa Educacional para Análise de Estruturas Reticuladas. *XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*.

Sabino. R. B. G., & Bono. G. F. F., 2010. Programa Educacional para Análise de Estruturas Reticuladas. XVIII Congresso de Iniciação Científica da UFPE (Conic) e VII Congresso de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação da UFPE (Coniti).

Silva, L. S., 2003. *Análise Limite de Problemas Geotécnicos com Elementos Finitos Mistos e Híbridos*. Tese de Doutorado em Geotecnia. Universidade de Brasília.

Soriano, H. L., Lima, S. S., & Friedman, S., 2001. Sobre o Ensino de Isostática. *VII Encontro Ensino em Engenharia*.

Souza, C. A. S., 2003. *Implementação de uma Estrutura de Dados para Visualização Científica*. Dissertação de Mestrado em Ciências de Computação e Matemática Computacional. Universidade de São Paulo.

Souza, L. A. F., 2015. Análise Não Linear Estática de Treliça Plana Utilizando a Mecânica do Dano. *Scientia Plena*, v. 11, n. 46.

Suzuki, M. S., 2014. *Análise de Estruturas Reticuladas Utilizando o Software Excel pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. Universidade Estadual Paulista.