



**MODELAGEM COMPUTACIONAL E MÉTODO DESIGN
CONSTRUTAL APLICADOS AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO
MECÂNICO DE PAINÉIS DE AÇO COM ENRIJECEDORES
SUBMETIDOS À FLAMBAGEM**

João Paulo Silva Lima

André Pereira Ramos

Liércio André Isoldi

Mauro de Vasconcellos Real

Elizaldo Domingues dos Santos

joaop_1005@hotmail.com

andreramos2209@gmail.com

liercioisoldi@furg.br

mauroreal@furg.br

elizaldosantos@furg.br

Universidade Federal do Rio Grande - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica
Av. Itália, km 8, Bairro Carreiros, CEP 96.201-900, Rio Grande, Brasil

Fernanda Santana Carvalho

fersantanacarvalho@gmail.com

Universidade Federal do Triângulo Mineiro – Departamento de Engenharia Civil

Av. Randalfo Borges Jr, 1250-Univerdecidade I, CEP 38.064-200, Uberaba, Brasil

Luiz Alberto Oliveira Rocha

luizrocha@mecanica.ufrgs.br

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Rua Sarmento Leite, 425, CP. 90050-170, Porto Alegre, RS, Brasil

Resumo. *Placas ortotrópicas possuem vigas dispostas longitudinalmente e transversalmente, chamadas de enrijecedores, com o objetivo de aumentar a resistência mecânica. Assim, é necessário obter uma geometria ótima de forma a maximizar a carga crítica de flambagem da placa ortotrópica, quando submetida à flambagem. Empregou-se o Método dos Elementos Finitos, utilizando o software ANSYS®. Inicialmente adotou-se uma placa fina simplesmente apoiada sem enrijecedores, usando como referência o valor da tensão crítica de flambagem da mesma. Enrijecedores foram incorporados à placa. Para isso, a variável fração de volume (ϕ), que representa a relação entre o volume de enrijecedores e o volume total do elemento estrutural placa/enrijecedores, foi adotada, mantendo uma variação nula do volume final da placa. Foram analisadas quatro combinações diferentes de enrijecedores, onde quatro valores de fração volumétrica foram adotados $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$ em cada situação. Cada análise dos painéis enrijecidos apresentou uma relação h_s/t_s , relacionando a espessura do enrijecedor e sua altura. Os resultados obtidos foram comparados entre si e com a placa sem enrijecedores, indicando que a variação da configuração geométrica afeta significativamente o comportamento mecânico sob flambagem dos painéis enrijecidos, sendo possível determinar a geometria ótima que conduz a uma carga crítica maximizada.*

Palavras-chave: *Flambagem, Placa, Enrijecedores, Design Constructal, Simulação Numérica*

1 INTRODUÇÃO

O setor da indústria naval compreende a atividade de fabricação de embarcações e veículos de transporte aquático em geral. Esse setor envolve desde construções de pequenas embarcações à construção de estaleiros, plataformas e sondas de perfuração para a produção de petróleo em alto-mar, além de toda a rede de fornecimento de navieças.

A indústria naval no Brasil possui um mercado crescente, porém antigo, o qual vem desde a vinda dos portugueses, que aproveitaram as vantagens de se construir navios em nosso país, visto que se tinha abundância e excelência das madeiras e a mão-de-obra indígena. Desde então, muitos estaleiros foram fundados em vários pontos do litoral brasileiro, podendo atualmente ser encontrados inclusive estaleiros em cursos fluviais.

Segundo Campos Neto e Pompermayer (2014), no início do século XXI, a forte retomada dos investimentos das indústrias naval e offshore trouxe impactos positivos na economia brasileira. Este advento resultou em uma forte geração de emprego e renda, além de um desenvolvimento de uma rede de fornecedores nacionais de insumos, peças e componentes. E, juntamente a esse desenvolvimento, houve uma expansão de estudos e pesquisas de inovação em tecnologias de produtos e processos aplicados. Porém, com a expansão do mesmo na economia Brasileira, depara-se com uma necessidade de criação de estruturas cada vez maiores e mais resistentes, levando em consideração o tipo de serviço e finalidade.

Tendo essa necessidade de execução de grandes estruturas, painéis e estruturas do tipo placa ganharam importância especial e nomeadamente aumentaram-se suas aplicações nos últimos anos dentro da indústria naval e offshore. As estruturas navais são constituídas basicamente por painéis enrijecidos que, em seu processo de fabricação, envolvem procedimentos de corte e soldagem. Tais painéis são formados pela soldagem de vigas finas em uma chapa de pouca espessura, dispostas longitudinalmente e transversalmente, de forma a enrijecer a chapa. Esse conjunto possui uma capacidade para resistir a combinações de momento de flexão global.

O dimensionamento da estrutura das embarcações, segundo Yasuhisa et al. (2009), é um fator preponderante em um projeto de estruturas navais e oceânicas, resultando em um equipamento de navegação seguro, independente do tipo de serviço ou finalidade. Esse bom funcionamento é realizado mediante a capacidade de resistência a diferentes solicitações mecânicas nos componentes estruturais, podendo essas, de acordo com Ventsel e Krauthammer (2001), ser do tipo cisalhamento, flexão e torção, quando esses componentes estão sujeitos à cargas transversais ou axiais. A estrutura formada por esses componentes estruturais é formada por um caixão de grandes dimensões, que devido à esbelteza dos elementos de placa, necessita ser reforçado através do uso de enrijecedores para resistir às forças compressivas. A presença dos enrijecedores, além de contribuir com a resistência global da viga-navio, é responsável por evitar a flambagem dos painéis.

Segundo Rackow (2015), a utilização de enrijecedores é uma prática bastante comum, porém, esse processo carece de equações e soluções analíticas que realizem seus dimensionamentos. A complexidade de dimensionamento é explicada através da dificuldade da análise da flambagem desses elementos esbeltos sob carregamentos axiais, uma vez que envolve uma grande quantidade de parâmetros geométricos.

Tendo essa barreira em se obter resultados através de soluções analíticas, a simulação numérica torna-se uma importante ferramenta para a análise desses comportamentos estruturais. Dentre diferentes metodologias o método dos elementos finitos (MEF), que é amplamente empregado para a análise numérica de estruturas, pode ser adotado para o estudo da flambagem de placas com enrijecedores. O MEF baseia-se no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em sub-estruturas. Cada uma dessas sub-estruturas designa-se por elemento finito e tem comportamento conhecido, sendo o comportamento do todo considerado como a soma das partes. (Azevedo, 2003).

O advento de tecnologias computacionais permitiu à engenheiros estruturais se disporem de softwares intuitivos, que permitem a interpretação de resultados obtidos e credíveis, de forma que, mesmo não tendo acesso à fonte do código computacional, tem-se conhecimento das características do modelo que está a usar. A simulação computacional permite a obtenção de resultados de forma rápida, e utilizando um modelo adequado, a mesma também é segura. Essa capacidade de trabalhabilidade e facilidade na obtenção de resultados permite a realização da otimização estrutural.

Esse importante processo de otimização avalia a melhoria de um projeto, onde, definido um critério de avaliação, a otimização irá consistir na melhor geometria para um determinado fim. A presença de enrijecedores pode ser avaliada buscando a melhor geometria dos mesmos, a fim de se suportar os esforços de flambagem na estrutura.

Diante do exposto, o presente trabalho tem como objetivo realizar a otimização geométrica de placas com enrijecedores retangulares submetidas à flambagem elástica. O método Design Construtal será empregado para propor as configurações geométricas possíveis, que serão simuladas numericamente através do MEF no software ANSYS. Assim a técnica de otimização geométrica usada será o método de busca exaustiva, realizando uma comparação do comportamento mecânico entre todas as configurações geométricas propostas. A função objetivo consiste em maximizar a carga crítica de flambagem.

2 TEORIA DE PLACAS

De acordo com Szilard (2004), existe uma gama de aplicações de elementos de placas na engenharia, onde que, a análise de tensões matematicamente exata de uma placa fina – submetida a cargas que atuam transversalmente a sua superfície – exige solução das equações diferenciais de elasticidade de três dimensões. Porém, na maioria dos casos, tal abordagem se depara com dificuldades matemáticas existentes, em que a teoria clássica de placas finas de Kirchhoff e Love é largamente empregada na grande maioria das aplicações, rendendo resultados suficientemente precisos, sem a necessidade de realizar uma análise de tensões tridimensional completa.

2.1 Teoria Clássica de pequenas deflexões para placas finas

A Teoria de Kirchhoff, de acordo com Szilard (2004), é formulada em termos de desvios transversais apresentados através de uma equação diferencial de quarta ordem, exigindo apenas duas condições de contorno a serem satisfeitas em cada extremidade. Considerando a Fig. 1, as simplificações utilizadas na derivação da equação da placa baseiam-se nos seguintes pressupostos: o material da placa é homogêneo, isotrópico e linear-elástico; a placa é inicialmente plana e o plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão; a espessura da placa deve ser constante, sendo sua menor dimensão lateral no mínimo dez vezes maior que a sua espessura t ; pequenas deflexões transversais $w(x,y)$ da placa são pequenas se comparadas com sua espessura t ; as inclinações do plano médio da placa (rotações) pequenas quando comparadas com a unidade; as seções planas e normais ao plano médio da placa antes da deformação permanecem planas e normais ao plano médio após a deformação; a tensão normal σ_z na direção transversal à placa pode ser desprezada.

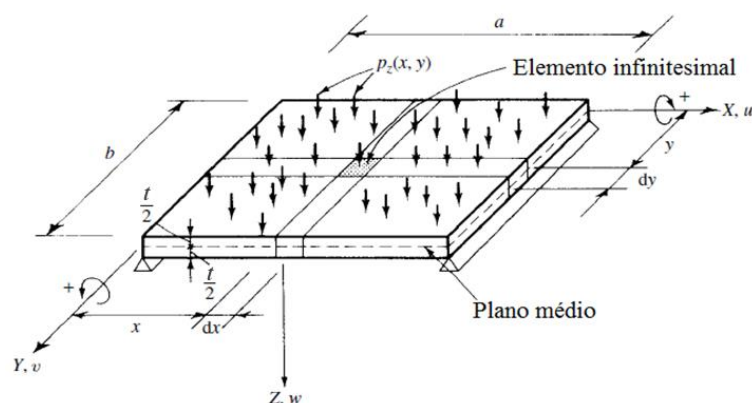


Figura 1. Placa fina com carregamento distribuído transversalmente aplicado (Fonte: Szilard, 2004)

Ainda segundo Szilard (2004), o comportamento de uma placa fina se assemelha à uma malha de vigas bidimensionais. Deste modo, a carga externa P_z é equilibrada por forças de cisalhamento transversal Q_x e Q_y , além dos momentos fletores M_x e M_y . A principal diferença quando se compara a malha de vigas bidimensionais com a placa é a presença dos momentos de torção M_{xy} e M_{yx} , os quais também contribuem na resistência ao carregamento interno (Fig. 2).

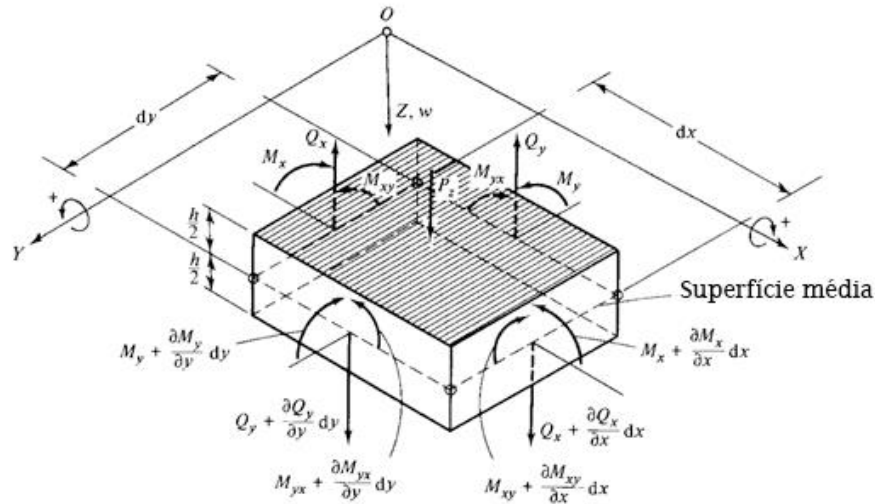


Figura 2. Esforços em um elemento de placa (Fonte: Szilard, 2004)

Primeiramente se considera a soma de todos os momentos de forças em torno do eixo y igual a zero. Após isto, realiza-se a expansão e simplificação dessa soma, negligenciando os termos que representam uma pequena parcela de ordem superior, obtendo:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0 \quad (1)$$

Dividindo os termos da Eq. (1) por $dx dy$ e fazendo de forma semelhante ao eixo X tem-se:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (3)$$

Agora, fazendo o equilíbrio no eixo Z , tem-se que:

$$\frac{\partial q_y}{\partial x} + \frac{\partial q_x}{\partial y} = -p_z \quad (4)$$

Substituindo as Eqs. (2) e (3) em (4) e observando que $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (5)$$

Segundo Jawad (1994), tendo como base as hipóteses de simplificação anteriormente apresentadas, a relação entre a deformação e a deflexão na placa são definidas por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

sendo ε_x a deformação normal na direção x , ε_y a deformação normal na direção y e γ_{xy} a deformação por cisalhamento no plano x - y .

Considerando a relação entre as tensões na placa e suas deflexões, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

de forma que σ_x , σ_y , τ_{xy} , são a tensão normal na direção x , a tensão normal na direção y , e a tensão de cisalhamento no plano x - y , respectivamente. Além disso, E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material da placa.

Já os momentos atuantes na placa são relacionados às tensões definidas na Eq. (7) por:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (8)$$

onde M_x e M_y são os momentos fletores em relação às direções x e y , respectivamente; M_{xy} é o momento torçor em relação ao plano x - y , ambos considerados por unidade de comprimento. A partir das Eqs. (6) e (7), pode-se reescrever a Eq. (8) como:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde D é rigidez à flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (10)$$

E, finalmente, substituindo a Eq. (9) na Eq. (5) a equação diferencial governante para uma placa fina é definida como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D} \quad (11)$$

A solução da Eq. (10) produz uma expressão para a deflexão w da placa.

2.2 Flambagem de placas

De acordo com Real e Isoldi (2010), em diversas situações de projetos, placas finas são submetidas a cargas de compressão uniaxial, de forma que a grande esbeltez desses componentes faz com que eles sejam suscetíveis à instabilidades como flambagem. A equação diferencial da superfície elástica de flambagem de uma placa fina comprimida uniaxialmente, de acordo com Ugural (1981), Åkesson (2007) El-Sawy e Nazmy (2001) e Wang, Wang e Reddy (2005) é dada por:

$$\sigma_{cr} = K_q \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (12)$$

sendo t a espessura da placa, b sua largura e K_q o coeficiente de flambagem da placa, dado por:

$$K_q = \left(\frac{m b}{n a} + \frac{n a}{m b} \right)^2, m = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

onde a é o comprimento da borda longitudinal descarregada da placa; b o comprimento da borda transversal carregada; m o número de semi-ondas durante a flambagem na direção de σ_{cr} , e n na direção transversal a σ_{cr} , considerado igual a 1, ou seja, formando apenas uma semi-onda transversal. Para os valores de m , tem-se valores de K_q em função da relação entre os lados da placa (a/b). Considerando uma placa simplesmente apoiada, para qualquer valor de m , o valor de K_q tende para um valor mínimo, sendo neste caso $K_q = 4$, independentemente do tipo de vinculação na borda transversal. Adotando-se então este valor, sempre que se tiver a condição de contorno rotulada-rotulada na placa (Trahair e Bradford, 1988; Salmon e Johnson, 1990).

2.3 Flambagem de Placas com Enrijecedores

De acordo com Szilard (2004), as cargas coplanares relativamente baixas que uma placa pode suportar sem sofrer flambagem podem ser consideravelmente aumentadas pela adição de enrijecedores. Porém, ao se aumentar a carga crítica as dificuldades encontradas em sua análise também são aumentadas devido ao aumento do número de variáveis, além disso, os modos de flambagem são normalmente mais complexos. Consequentemente, na prática da engenharia fórmulas mais simplificadas ou gráficos são utilizados para o projeto de tais placas.

Enquanto enrijecedores longitudinais dispostos paralelamente às cargas coplanares suportam parte da força aplicada, enrijecedores transversais são usados meramente para subdividir a placa em unidade menores, uma vez que, a carga suportada por eles é relativamente pequena. Combinações de enrijecedores paralelos e transversais resultam em placas com enrijecedores ortogonais.

Szilard (2004) apud Wittrick (1952) apresentou uma solução aproximada para uma placa na presença de enrijecedores longitudinais e transversais baseando-se na Teoria de Placas Ortotrópicas. Essa solução é detalhada neste tópico.

Wittrick (1952) derivou cargas críticas de placas retangulares reforçadas com diferentes condições de contorno utilizando a idealização do problema de placas ortotrópicas. Se os reforços longitudinais são flexíveis o suficiente para permitir a flambagem global da placa, consequentemente, a tensão crítica pode ser estimada por:

$$(\sigma_{cr}) = \frac{4\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left\{ 1 + \left[1 + 12(1-\nu^2) \frac{I_x}{c_1 t^3} \right]^{1/2} \right\} \quad (14)$$

assumindo-se que os reforços longitudinais se encontram na direção x , onde que I_x é o momento de inércia das nervuras considerando como referência a superfície média da placa, e c_1 os espaçamentos das nervuras nas direção x .

3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

De acordo Manrique (1989), métodos numéricos são altamente empregados em análises estruturais. Especificamente se tratando de soluções da grande maioria dos problemas de painéis sob esforços mecânicos, as mesmas são praticamente impossíveis de se resolver quando se tenta por meio da aplicação das equações diferenciais da teoria da elasticidade. Para a análise desses problemas, segundo Maki (1968) se procura outros métodos de solução. Um destes métodos tem sido designado no Método dos Elementos Finitos, o qual resulta soluções aproximadas para esses problemas.

O Método dos Elementos Finitos baseia-se na decomposição do domínio de integração em um número finito de subdomínios (elementos finitos) transformando o meio contínuo em discreto. A divisão de domínio é nomeada de rede de elementos finitos, onde os pontos de intersecção das linhas dos elementos são denominados nós. Apesar de cada elemento ter o comportamento arbitrado de forma aproximada, a malha dos elementos se comporta de forma semelhante ao contínuo original. Além disso, no modelo de deslocamentos presente no MEF, um campo de deslocamentos nodais é arbitrado, fazendo com que a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes seja substituída pela interação de forças nodais entre os elementos. Sendo assim, o equilíbrio infinitesimal considerado no modelo matemático do meio contínuo é substituído pelo equilíbrio presente em cada elemento finito, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas do elemento como um todo (Assan, 2003; Soriano, 2003). A teoria básica envolvendo o método dos elementos finitos é bastante difundida, podendo ser encontrada facilmente na literatura como Zienkiewicz (1971), Gallagher (1975) e Przemieniecki (2009). O software ANSYS, que é baseado no MEF, foi empregado no desenvolvimento dessa pesquisa. Como o estudo é relacionado a placas finas, optou-se pelo uso do elemento SHELL93 (Fig. 3), que é um elemento do tipo casca estrutural 2D.

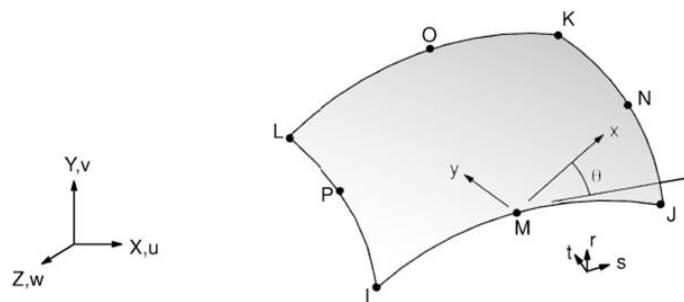


Figura 3. Elemento finito SHELL93 (Fonte: Kohnke, 1999)

De acordo com Kohnke (1999), o elemento SHELL93 é um elemento finito do tipo casca de caráter isoparamétrico. Cada um de seus oito nós possui seis graus de liberdade, sendo três translações nas direções x , y e z , além de três rotações também em torno desses eixos.

Caracterizado como um elemento finito 2D, é considerado de caráter tridimensional devido à sua não restrição ao plano x - y , podendo ser empregado em qualquer posição do espaço tridimensional, além de ser deformável na direção fora de seu plano. Os elementos finitos tipo casca são usados para modelar componentes estruturais do tipo placa que possuem espessura pequena se comparada às suas outras dimensões. Podem ser carregados em seu plano (carregamentos de membrana) bem como fora de seu plano por momentos fletores e/ou

torsores. Além disso, o elemento finito SHELL93 pode considerar grandes deslocamentos e plasticidade (Dufour, 2003; Ross, 2011).

A necessidade de uma grande acuracidade no resultado e a qualidade da malha a ser trabalhada são fatores preponderantes que possibilitam a diferenciação dos valores aceitáveis para os desprezíveis. Para a verificação da malha a ser adotada considerou-se uma placa com enrijecedores, onde se adotou elementos regulares do tamanho de 20 mm, tamanho esse definido a partir de um teste de convergência de malha. O esquema de malha adotado é apresentado na Fig. 4.

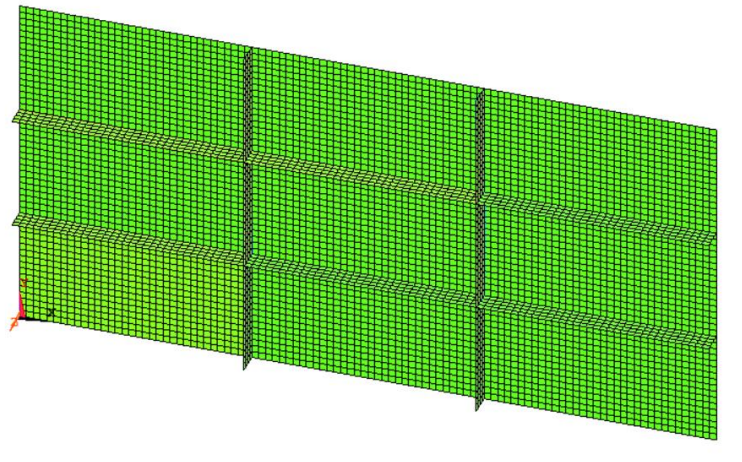


Figura 4. Malha do tipo quadricular para a placa retangular enrijecida

De acordo com Medenci e Guven (2008), para a análise numérica de flambagem foi adotada a análise elástica de autovalores. A solução de equações algébricas homogêneas foram utilizadas para analisar as equações de equilíbrio por elementos finitos para esse tipo de análise. O autovalor mais baixo corresponde à carga crítica de flambagem e o autovetor a ele associado representa o primeiro modo de flambagem.

Para essa formulação, segundo Przemieniecki (2009), são considerados tanto os termos lineares como os não-lineares. Assim, tem-se a matriz de rigidez total $[K]$, que é obtida pela soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações, $[K_E]$, com a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$. A matriz $[K_G]$ além da geometria, depende também do esforço normal de compressão existente no início do carregamento, $\{P_0\}$. Sendo assim, a placa irá possuir um deslocamento total $\{U\}$ associado a um nível de carga $\{P_0\}$ que é dado por:

$$\{U\} = \left[[K_E] + \lambda [K_G] \right]^{-1} \lambda \{P_0\} \quad (15)$$

onde λ é um escalar.

Na análise de flambagem, a placa tem um grande crescimento nos deslocamentos sem crescimento da carga. Matematicamente é possível determinar a matriz inversa de forma que, os deslocamentos $\{U\}$ tendem a infinito quando:

$$\det \left[[K_E] + \lambda [K_G] \right] = 0 \quad (16)$$

A Eq. (16) representa um problema de autovalores, que resolvido gera o menor autovalor, λ_1 , que corresponde à carga crítica $\{P_{cr}\} = \lambda_1 \{P_0\}$ ocorrendo flambagem. Além disso, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define o modo de flambagem. Segundo o ANSYS User's Manual (2005), o problema de autovalores é resolvido usando o método numérico de Lanczos.

3.1 Verificação do modelo computacional

A funcionalidade do Software ANSYS® na determinação da carga crítica elástica de flambagem é apresentada neste capítulo. Na primeira análise, foi realizado um estudo de uma placa maciça de espessura constante, comparando o resultado obtido numericamente com a solução analítica dada pela Eq. (12). Em segunda análise foi verificada a tensão crítica elástica para uma placa que contém quatro enrijecedores longitudinais e quatro transversais através da solução de Wittrik (1952) apresentada na Eq. (14).

3.1.1 Painel maciço sob flambagem elástica

Para essa verificação, utilizou-se um painel retangular fino com espessura constante sob compressão no plano e simplesmente apoiado em seus quatro bordos. De acordo com a Fig. 5, este painel possui comprimento $a = 2$ m, largura $b = 1$ m e espessura $t = 0,02$ m.

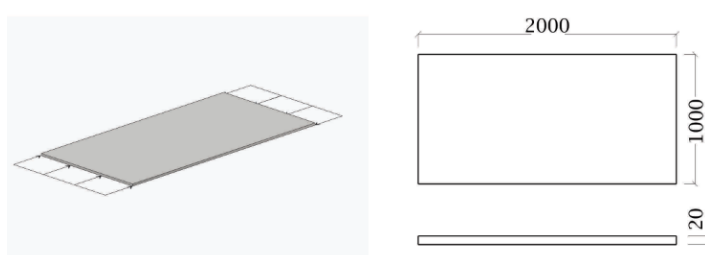


Figura 5. Detalhamento da placa maciça sob compressão uniaxial, em mm

A solução analítica é proposta por Szilard (2004) e é definida pela Eq. (12). Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é $\sigma_{cr} = 303,68$ MPa. Já através da modelagem computacional, foi obtida uma tensão crítica como sendo $\sigma_{cr} = 299,00$ MPa. Portanto, uma diferença de 1,54% entre o modelo numérico e a solução analítica foi encontrada, verificando o modelo computacional. Na Fig. 6 a configuração flambada para a placa sem enrijecedores é apresentada.

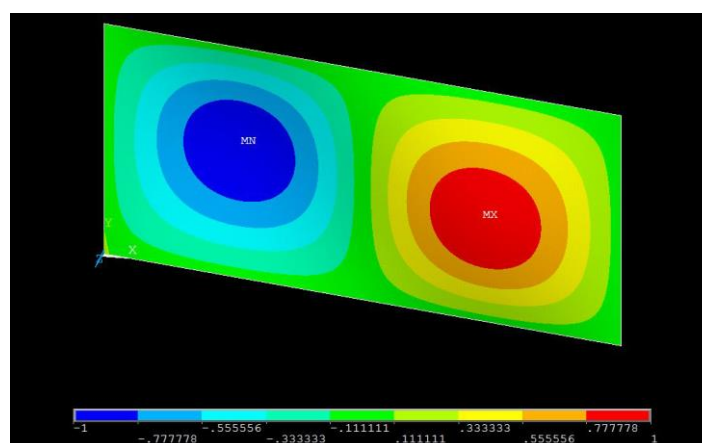


Figura 6. Configuração flambada para a placa maciça

3.1.2 Painel ortotrópico com enrijecedores longitudinais e transversais

Aqui uma placa retangular fina com espessura constante sob compressão no plano, possui uma grade de enrijecedores dispostos longitudinalmente e transversalmente, contendo quatro

em cada uma das direções. De acordo com a Fig. 7, este painel simplesmente apoiado possui comprimento $a = 2,0$ m, largura $b = 1,0$ m e espessura $t = 0,01$ m. Os enrijecedores possuem as mesmas propriedades geométricas com altura $h_s = 0,05$ m e espessura $t_s = 0,01$ m. Os mesmos foram dispostos simetricamente em relação ao eixo central do plano horizontal da placa, de forma que para o eixo longitudinal e transversal, os espaçamentos entre os enrijecedores foram de $c_x = 0,2$ m e $c_y = 0,4$ m.

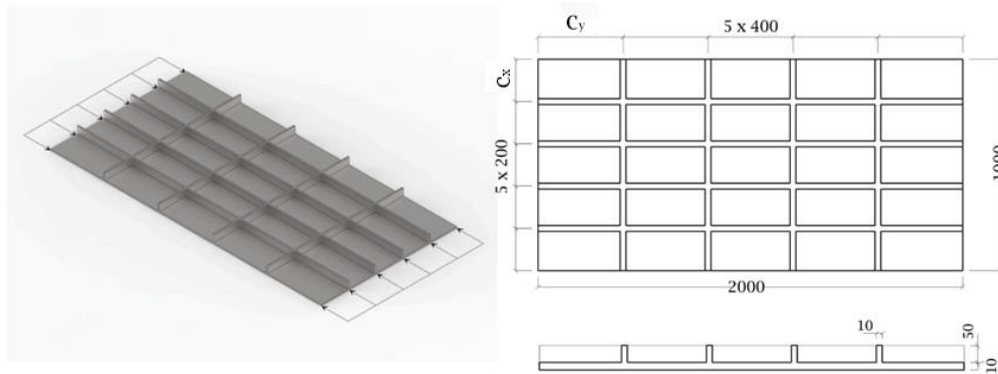


Figura 7. Placa ortotrópica com 4 enrijecedores em cada direção sob compressão uniaxial

Para essa verificação de flambagem elástica na placa com enrijecedores, foi empregada a solução aproximada proposta por Wittrick (1952), dada pela Eq. (13). Para a placa proposta, a tensão crítica de flambagem determinada pela solução analítica é $\sigma_{cr} = 351,36$ MPa. Na modelagem computacional, obteve-se a tensão crítica como sendo $\sigma_{cr} = 349,83$ MPa, cujo modo de flambagem elástica pode ser verificado na Fig. 8.

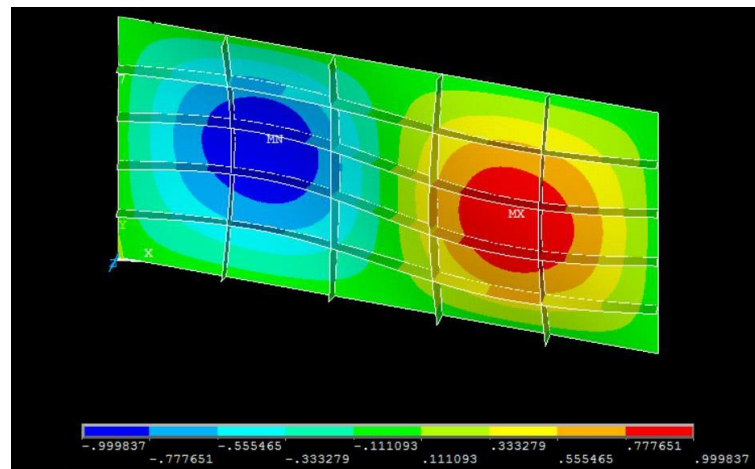


Figura 8. Situação deformada para a placa ortotrópica

Analisando a solução proposta por Wittrick (1952) e o resultado numérico foi possível observar uma diferença de 0,43%, entre os valores, o que verifica o modelo computacional adotado.

4 MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

Proposta por Adrian Bejan em 1997, a Teoria Construtal é a visão de que a geração de concepções ou destinações na natureza é um fenômeno físico de caráter universal que pode ser baseado no princípio da Lei Construtal.

De acordo com Bejan e Lorente (2006) se um sistema de fluxo possui liberdade suficiente para alterar a sua configuração, em seguida, o sistema exhibe configurações que dão progressivamente melhores vias de acesso para as correntes que fluem. Este princípio foi formulado em 1996, como a Lei Construtal da geração de configuração de fluxo, de forma que para um sistema de fluxo persistir no tempo, o mesmo deve evoluir de tal modo que proporcione o acesso mais fácil para as correntes que fluem através dele.

Esta lei é a base para a Teoria Construtal da geração de configuração do fluxo na natureza. Segundo Bejan e Lorente (2008), este princípio prevê forma natural de bacias hidrográficas, na concepção do design animal, engenharia, dinâmicas sociais, dentre outros.

Ao se considerar a Teoria Construtal, Bejan e Lorente (2008) mostram que os fluxos são tratados e configurados como um fenômeno baseado em um princípio científico, de forma que a geometria ali presente representa a capacidade de movimento e luta de um mecanismo pelo qual o sistema de fluxo alcança objetivo global sob restrições globais, conseguindo dessa forma sobreviver no tempo e ser eficiente.

Reis (2006) afirma que a Teoria Construtal conseguiu atrair muitos educadores e pesquisadores de diversas áreas (engenharia, física, biologia, sociologia, dentre outras), que juntos possuem uma nova direção, que consiste em aplicar a Lei Construtal para uma melhor engenharia, além de uma melhor organização de movimentação e conexão de pessoas, produtos e informações. Essa finalidade é denominada Método Design Construtal, que através dele, se obtém não só as melhores condições de geometria, mas também melhores estratégias, como rapidez, custo, direção, confiabilidade, para gerar a geometria que está se necessitando.

Para o presente estudo, fez-se a transformação de uma fração de volume (ϕ) de uma placa, antes maciça, em elementos enrijecedores, através da seguinte equação:

$$\phi = \frac{V_e}{V} = \frac{N_{sl}(ah_s t_s) + N_{st}[(b - N_{st}t_s)h_s t_s]}{abt} \quad (17)$$

onde N_{el} e N_{et} são, respectivamente, o número de enrijecedores nas direções longitudinal e transversal da placa; a , b e t são, respectivamente, o comprimento, a largura e a espessura da placa; e h_s e t_s são, respectivamente, a altura e a espessura dos enrijecedores. Cabe destacar que todos os enrijecedores apresentam uma mesma geometria, com seção transversal retangular, permitindo a realização de uma variação no grau de liberdade h_s/t_s , correspondente à relação entre a altura e largura do enrijecedor.

Sendo assim, a transformação na configuração geométrica sofrida pela placa acarretará em uma variação nula de volume. Cabe destacar que uma variação geométrica sem variação volumétrica é um aspecto que está diretamente relacionado à aplicação do Método Design Construtal.

Diferentes valores de ϕ foram considerados, representando diferentes frações volumétricas da placa a ser transformada em enrijecedores.

A Fig. 9 representa esquematicamente todos os parâmetros em uma placa enrijecida, em um caso onde $N_{el} = N_{et} = 2$.

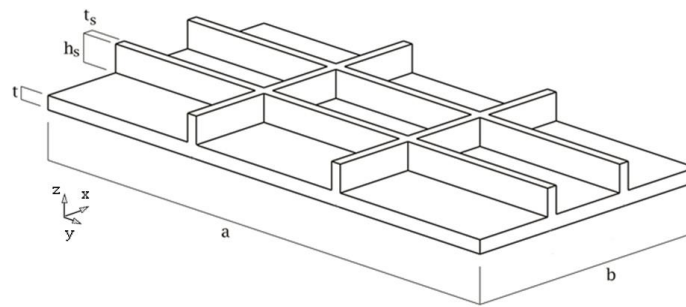


Figura 9. Esquema prático a ser analisado

Nesta análise adotou-se o material Aço AH-36, o qual possui valores de tensão de escoamento, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, respectivamente, $\sigma_0 = 355$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$. A placa possui comprimento $a = 2$ m, largura $b = 1$ m, e espessura t de acordo com os valores de ϕ .

Foram realizadas simulações numéricas de placas com enrijecedores considerando os seguintes tipos de configurações geométricas: P(2x2) ($N_{el} = N_{et} = 2$), P(2x3) ($N_{el} = 2$, $N_{et} = 3$), P(3x2) ($N_{el} = 3$, $N_{et} = 2$) e P(3x3) ($N_{el} = N_{et} = 3$). Como já foi comentado anteriormente, em todos os casos foi mantido constante o volume total de material em relação ao caso da placa sem enrijecedores apresentado na verificação do modelo computacional. Foram adotadas frações de volume dos enrijecedores, definidas pela Eq. (15), como valores de $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Além disso, para cada fração volumétrica, foi avaliada a influência do grau de liberdade h_s/t_s no comportamento sob compressão axial da estrutura.

5 RESULTADOS OBTIDOS

Usando como referência a tensão crítica de flambagem da placa maciça sem enrijecedores ($\sigma_{cr} = 299,00$ MPa), os valores de tensão crítica para os casos de placas com enrijecedores indicados nas Tabelas 1, 2, 3 e 4 foram normalizados, obtendo os valores de σ_{crN} . Com isso, nas Figs. 10, 11, 12 e 13, os valores normalizados de tensão crítica, respectivamente, para as frações de volume $\phi = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$, em função da variação do grau de liberdade h_s/t_s são apresentados.

Tabela 1. Dimensões dos enrijecedores da placa P(2x2)

t_s	$\phi = 0,1$		$\phi = 0,2$		$\phi = 0,3$		$\phi = 0,4$	
	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s
0,010	0,066	6,6	0,133	13,333	0,200	20,000	0,266	26,67
0,015	0,044	2,933	0,089	5,925	0,133	8,880	0,178	11,851
0,020	0,033	1,650	0,067	3,333	0,100	5,000	0,133	6,667
0,025	0,027	1,080	0,053	2,133	0,080	3,200	0,107	4,267
0,030	0,022	0,733	0,044	1,481	0,066	2,222	0,089	2,962
0,035	0,019	0,542	0,038	1,088	0,057	1,632	0,076	2,176
0,040	0,016	0,400	0,033	0,833	0,050	1,250	0,067	1,667
0,045	0,014	0,311	0,029	0,658	0,044	0,987	0,059	1,316

Tabela 2. Dimensões dos enrijecedores da placa P(2x3)

t_s	$\phi = 0,1$		$\phi = 0,2$		$\phi = 0,3$		$\phi = 0,4$	
	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s
0,010	0,050	5,037	0,100	10,075	0,151	15,113	0,201	20,151
0,015	0,033	2,247	0,067	4,495	0,101	6,742	0,134	8,990
0,020	0,025	1,269	0,050	2,538	0,076	3,807	0,101	5,076
0,025	0,020	0,815	0,040	1,630	0,061	2,445	0,081	3,261
0,030	0,017	0,568	0,034	1,136	0,051	1,705	0,068	2,273
0,035	0,014	0,419	0,029	0,838	0,044	1,257	0,058	1,676
0,040	0,012	0,322	0,025	0,644	0,038	0,966	0,051	1,288
0,045	0,011	0,255	0,023	0,511	0,034	0,766	0,045	1,022

Tabela 3. Dimensões dos enrijecedores da placa P(3x2)

t_s	$\phi = 0,1$		$\phi = 0,2$		$\phi = 0,3$		$\phi = 0,4$	
	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s
0,010	0,0576	5,763	0,115	11,527	0,173	17,291	0,230	23,054
0,015	0,0385	2,572	0,077	5,145	0,115	7,718	0,154	10,291
0,020	0,029	1,453	0,058	2,906	0,087	4,360	0,116	5,813
0,025	0,023	0,934	0,046	1,868	0,070	2,802	0,093	3,737
0,030	0,019	0,651	0,039	1,303	0,058	1,955	0,078	2,606
0,035	0,016	0,480	0,033	0,961	0,050	1,442	0,067	1,923
0,040	0,0147	0,369	0,029	0,739	0,044	1,109	0,059	1,479
0,045	0,013	0,293	0,026	0,587	0,039	0,880	0,052	1,174

Tabela 4. Dimensões dos enrijecedores da placa P(3x3)

t_s	$\phi = 0,1$		$\phi = 0,2$		$\phi = 0,3$		$\phi = 0,4$	
	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s	h_s	h_s/t_s
0,010	0,045	4,489	0,090	8,979	0,135	13,468	0,180	17,957
0,015	0,030	2,005	0,060	4,011	0,090	6,016	0,120	8,022
0,020	0,023	1,134	0,045	2,268	0,068	3,401	0,091	4,535
0,025	0,018	0,729	0,036	1,459	0,055	2,188	0,073	2,917
0,030	0,015	0,509	0,031	1,018	0,046	1,527	0,061	2,036
0,035	0,013	0,376	0,026	0,752	0,039	1,128	0,053	1,504
0,040	0,012	0,289	0,023	0,579	0,035	0,868	0,046	1,157
0,045	0,010	0,230	0,021	0,460	0,031	0,689	0,041	0,919

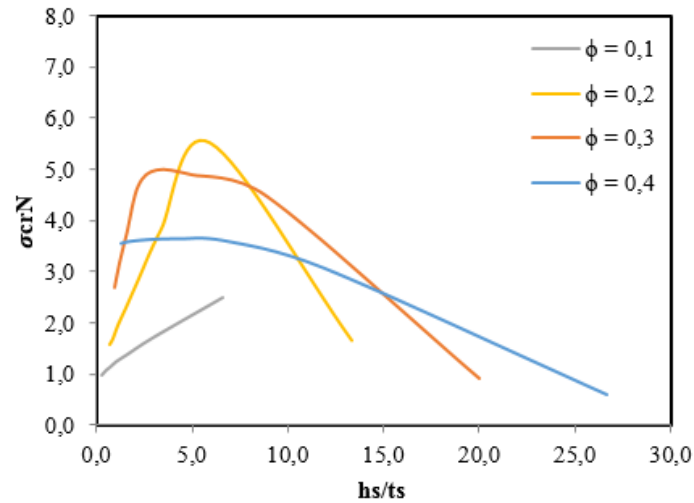


Figura 10. Valores de carga crítica de flambagem elástica normalizada para P(2x2)

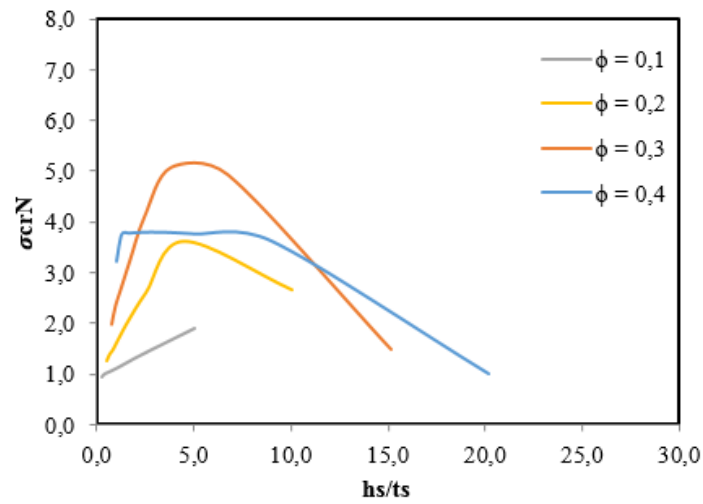


Figura 11. Valores de carga crítica de flambagem elástica normalizada para P(2x3).

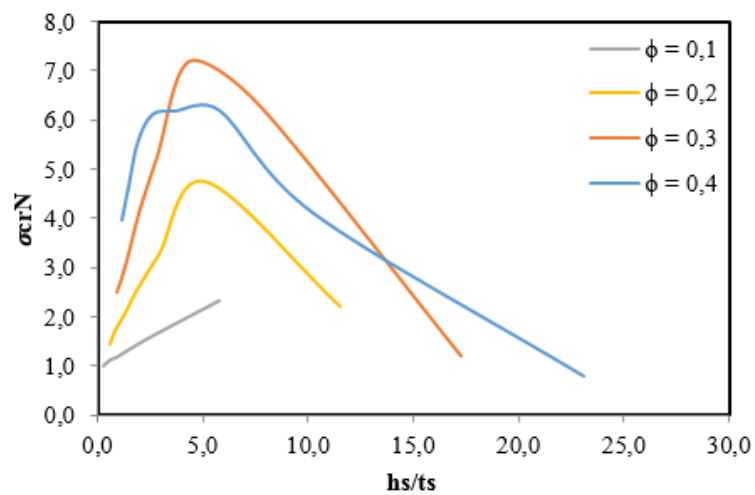


Figura 12. Valores de carga crítica de flambagem elástica normalizada para P(3x2)

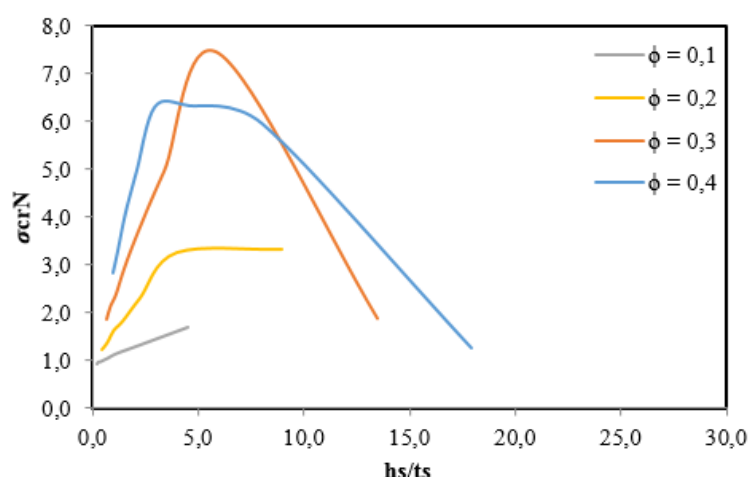


Figura 13. Valores de carga crítica de flambagem elástica normalizada para P(3x3).

A partir dos resultados ilustrados nas Fig. 9, 10, 11 e 12 é possível afirmar que a maioria das configurações geométricas propostas de placas com enrijecedores acarretaram em um aumento do valor da tensão crítica de flambagem em relação à placa sem enrijecedores. Porém em algumas situações, o valor da tensão crítica é inferior ao valor da tensão crítica para a placa sem enrijecedores usada como referência.

Quando isso ocorre, essa situação pode ser explicada por dois fatores. Primeiramente, a placa analisada apresenta uma ocorrência de flambagem local. Como exemplo disso tem-se a situação onde a placa P(2 x 2) possui $\phi = 0,4$ e enrijecedores com espessura $t_s = 0,01$ m e altura $h_s = 0,26$ m, ou seja, $h_s/t_s = 26,67$. Para esse caso teve-se a pior situação de carga crítica de flambagem entre as geometrias propostas, como se vê na Fig. 14. Através da análise, percebe-se uma redução de 41,10% na tensão crítica de flambagem elástica em relação à placa de mesmo volume, porém não contendo enrijecedores.

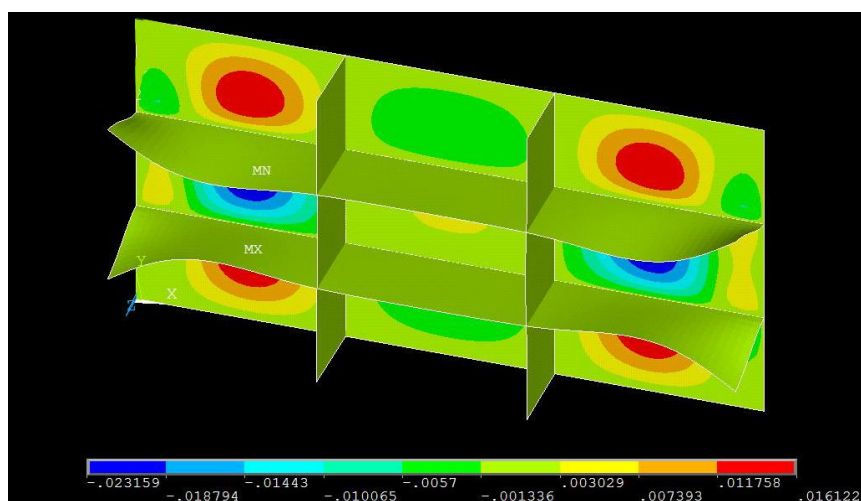


Figura 14. Situação deformada para a geometria com pior desempenho elástico

Apresentando um valor muito grande na relação $h_s/t_s = 26,67$, induz-se que os enrijecedores apresentarão um comportamento semelhante ao de uma placa, visto que os mesmos apresentarão uma dimensão relativamente menor que suas outras duas. Desta forma,

pode-se perceber, através da Fig. 13, que a placa enrijecida apresentou flambagens locais na placa e nas extremidades dos enrijecedores longitudinais.

O segundo fator que determina essa redução é quando os enrijecedores apresentam uma relação muito pequena de h_s/t_s , ou seja, a presença de enrijecedores com rigidez reduzida pouco contribuem para a resistência à flambagem da placa. Sendo assim, quanto menor se torna a relação h_s/t_s , menor é o valor da tensão crítica de flambagem das placas enrijecidas. Além disso, ao analisar as combinações de enrijecedores com fração volumétrica $\phi = 0,1$, percebe-se que à medida que se diminui a relação do parâmetro h_s/t_s , a carga crítica de flambagem para as placas enrijecidas tende ao valor da carga crítica de uma placa sem enrijecedores que possui comprimento $a = 2$ m, largura $b = 1$ m e espessura $t = 0,018$ m, cuja carga crítica resulta em uma tensão de $\sigma_{cr} = 240,50$ MPa.

É possível observar também que, à medida que se aumenta o valor da relação h_s/t_s , as placas tendem a apresentar o mesmo comportamento, onde se tem um crescente aumento de carga crítica de flambagem, até se atingir um valor máximo. Após isso, tem-se um subsequente decréscimo. Para cada valor de fração volumétrica (ϕ) obteve-se um intervalo de valores de h_s/t_s para o qual ótimas obtidos tensões críticas de magnitude superior. Portanto, considerando as configurações geométricas propostas é possível definir um valor ótimo para a relação h_s/t_s para cada valor de fração de volume.

Observou-se que a melhor configuração geométrica apresentada foi para uma placa P(3x3) com $\phi = 0,3$, cujos enrijecedores possuem espessura $t_s = 0,015$ m e altura $h_s = 0,090$ m, ou seja, $h_s/t_s = 6,02$. Para essa geometria teve-se uma melhoria de 741% em relação à placa de mesmo volume, porém sem enrijecedores. Na Fig. 15 é possível notar que essa geometria otimizada promoveu uma flambagem global da placa, diferentemente do comportamento visto na Fig. 13. A ocorrência da flambagem global, onde placa e enrijecedores sofrem uma deformação conjunta, conduz a uma performance superior da estrutura.

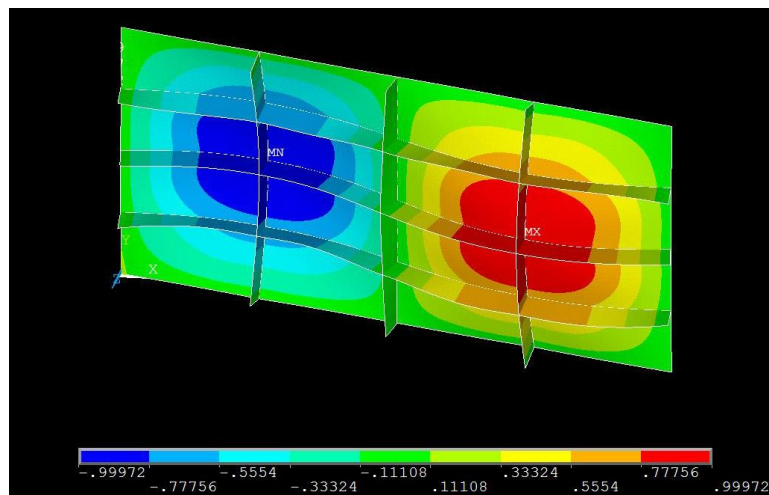


Figura 15. Situação deformada para a geometria com melhor desempenho.

6 CONCLUSÕES

Empregando o software ANSYS®, foi possível simular numericamente o comportamento mecânico de placas sem e com enrijecedores submetidas à flambagem elástica. Os modelos computacionais, tanto para a placa sem enrijecedores, como para placa com enrijecedores, foram devidamente verificados.

Então, o Método Design Construtal permitiu, a partir de uma placa sem enrijecedores usada como referência, propor configurações geométricas de placas com enrijecedores possuindo o mesmo volume de material da placa sem enrijecedores. Diferentes valores para o parâmetro fração de volume (ϕ), razão entre o volume de enrijecedores e o volume da placa, foram considerados. Além disso, variações no número de enrijecedores longitudinais e transversais e do grau de liberdade h_s/t_s (razão entre a altura h_s e a espessura t_s dos enrijecedores) foram adotadas. Então, um método de busca exaustiva, comparando todas as configurações geométricas propostas com o método Design Construtal, tendo como função objetivo a maximização da carga crítica de flambagem, foi usado para realizar um estudo de otimização geométrica.

Considerando a análise apenas do comportamento elástico da placa enrijecida, os resultados obtidos apresentaram uma grande melhoria no valor da tensão crítica de flambagem. Dentre todas as geometrias analisadas, a que obteve melhor desempenho foi uma placa P(3x3), a qual apresenta uma relação $h_s/t_s = 6,02$, para uma fração volumétrica $\phi = 0,3$. Nesta situação teve-se uma melhoria de 741% em comparação com a tensão crítica para uma placa com mesmo volume de material e sem enrijecedores.

Em contrapartida alguns resultados apresentaram valores de tensão crítica inferiores quando comparados com o valor de tensão crítica da placa de referência. Esse fator pode ser explicado por dois fenômenos. Primeiramente, em algumas situações a relação h_s/t_s apresentou um valor relativamente pequeno, de forma que o enrijecedor apresentasse um comportamento de placas, como o caso da placa P(2x2) com $h_s/t_s = 26,6$ e $\phi = 0,4$, onde uma redução de 41,10% no valor da tensão crítica de flambagem elástica foi observada. A segunda explicação para esse fenômeno se dá para casos em que se tem um grande valor da relação h_s/t_s , de forma que os enrijecedores pouco contribuam para a resistência à flambagem elástica da placa. É o que acontece para todas as combinações estudadas quando $\phi = 0,1$, onde, à medida que se diminui o valor da relação h_s/t_s , o valor da tensão também diminui.

Por fim cabe salientar que a análise da flambagem elástica não leva em consideração a tensão de escoamento do material, que para o aço AH-36 é $\sigma_y = 355$ MPa. Portanto, em situações práticas, tensões críticas superiores à de escoamento do material não podem ser consideradas. Sendo assim, em trabalhos futuros, pretende-se empregar a mesma metodologia usada aqui, porém realizando uma análise numérica da flambagem elasto-plástica de placas com enrijecedores.

REFERÊNCIAS

- Åkesson, B., 2007. *Plate buckling in bridges and other structure*. Taylor & Francis.
- ANSYS User's Manual (version 10.0), 2005. Houston. Swanson Analysis System Inc.
- Assan, A.E., 2003. *Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*, Ed. Unicamp, Campinas, 298 p.
- Azevedo, A. F. M., 2003. *Método dos Elementos Finitos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1ª ed. Porto.
- Bejan, A., Lorente, S., 2006. Constructal Theory of generation of configuration in nature and engineering. *Journal of Applied Physics*, vol. 100, pp. 041301.
- Bejan, A. & Lorente, S., 2008. *Design with Constructal Theory*. Wiley, Hoboken.

Campos Neto, C. A. S. & Pompermayer, F. M., 2014 *Ressurgimento da indústria naval no Brasil: (2000-2013)*. gráfs. Color, IPEA, Brasília.

Dufour, P., 2003. Picking an Element Type for Structural Analysis. *Belcan Engineering Group, Inc.*, p. 5.

El-Sawy, K.M.; Nazmy, A.S. Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes. *Thin-Walled Structures*, v. 39, p. 983–998, 2001.

Gallagher, R.H., 1975 *Finite Element Analysis: Fundamentals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Jawad, M. H., 1994. *Theory and Design of Plate and Shell Structures*. Springer.

Kohnke, P., 1999. *ANSYS Theory Reference - Release 5.6*. ANSYS, Inc., 11^a Ed.

Maki, A. C., 1968. Finite Element Techniques for Orthotropic Plane Stress and Orthotropic Plate Analysis. U.S. Forest Service, Research Paper, p. 87, Madson.

Madenci, E.; Guven, I., 2006. *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®*. Ed. Springer, 2006.

Manrique, L. J. C., 1989. *Colapso de painéis planos enrijecidos*. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Przemieniecki, J. S., 2009. *Finite Element Structural Analysis: New Concepts*. AIAA (American Institute of Aeronautics & Astronautics), Reston, Virgínia.

Rackow, P. B., 2015. *Análise numérica não-linear de painéis com enrijecedores sob flambagem*. Dissertação de conclusão de Mestrado em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande.

Real, M.V.; Isoldi, L.A. 2010. Finite element buckling analysis of uniaxially loaded plates with holes. *Southern Conference on Computational Modeling*. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, p. 69-73.

Rao, S. S., 2004. *The Finite Element Method in Engineering*. Elsevier Science & Technology Books, Miami, USA.

Reis, A. H., 2006 Constructal theory: from engineering to physics, and how systems flow develop shape and structure. *Applied Mechanics Reviews*, v. 59, p. 269-281.

Ross, C. T. F., 2011. *Pressure Vessels: External Pressure Technology*. 2^a Ed., Woodhead Publishing, Padstow, Cornwall, UK.

Saint - Venant, B., 1883. *Théorie de l'elasti cité des corps solides*. Clebsch, Paris.

Salmon, C. G. & Johnson, J. E., 1990. *Steel structures: Design and behaviour: Emphasizing load and resistance factor design*. Harper Collins Publishers Inc., 3^a ed.

Soriano, H.L., 2003. *Método dos Elementos Finitos em Análise de estruturas*, Edusp, São Paulo, 298 p.

Szilard, R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Trahair, N.S. & Bradford, M.A., 1988. *The behavior and design of steel structures*. 2^a ed., Chapman e Hall.

Ugural, A.C., 1981 *Stresses in Plates and Shells*. McGraw – Hill, Michigan University, Nova York.

Ventsel, E. & Krauthammer, T. 2001. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. Marcel Dekker, Inc. The Pennsylvania State University, University Park, New York.

Wang, C.M.; Wang, C.Y.; Reddy, J.N. *Exact solutions for buckling of structural members*. CRC Press, 2005.

Wittrick, W. H., 1952. Correlation Between Some Stability Problems for Orthotropic and Isotropic Plates Under Biaxial and Uniaxial Stress, *Aeron. Quart.* v. 4, p. 83–92.

Yasuhisa, Y.; Yu, T., Masaki, M. & Tetsuo, O., 2009 *Design of Ship Hull Structures: A Practical Guid for Engineers*. Springer. Takaya, Yokohama, and Tokyo.

Zienkiewicz, O.C., 1971. *The finite Element Method in Engineering Science*. 2^a ed. McGraw-Hill, London.