

**A ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO EM CRIANÇAS DE 1ª SÉRIE.  
UM ESTUDO SOBRE APRENDIZAGEM CONSTRUTIVISTA<sup>1</sup>**

Maria Lucia Faria Moro<sup>2</sup>  
Veronica Branco  
Universidade Federal do Paraná

**RESUMO** - São relatados resultados da análise qualitativa de estratégias cognitivas infantis. Estas foram expressas em uma situação de aprendizagem sobre a adição/subtração, no contexto de uma pesquisa sobre o papel da interação social na aprendizagem construtivista de noções escolares. Os sujeitos são nove alunos de 1ª série do 1º grau de uma escola pública de Curitiba, agrupados em três trios. Os resultados mostram as peculiaridades cognitivas infantis na elaboração da noção focalizada, em níveis de progressão no plano pré-operatório. Esquemas são superados e outros descobertos com as oportunidades oferecidas pela situação. Na interpretação desse processo é apontado o papel da alternância de tarefas de realização prática com as de explicação, com base no fenômeno da tomada de consciência das ações e de seus resultados rumo a novos planos de conceitualização.

**Palavras-chave:** estratégias cognitivas infantis, iniciação matemática, aprendizagem construtivista, adição/subtração.

**ADDITION/SUBTRACTION IN 1ST.GRADE  
ELEMENTARY SCHOOL CHILDREN'S  
A STUDY ABOUT CONSTRUCTIVIST LEARNING**

**ABSTRACT** - The article reports results from a qualitative analysis of children's cognitive strategies. These strategies were expressed in a learning situation about addition/subtraction, within an investigation concerning the role of social interaction in the constructivist learning of school contents. The nine subjects, grouped in trios, attend 1st. grade at an elementary public school in Curitiba. Results point to children's cognitive peculiarities to elaborate the content in progressive pre-operational levels, when schemes are exceed and new ones are discovered from oportunities offered by the learning situation. This process is explained by the alternance

1 As acadêmicas de Pedagogia e bolsistas do CNPq, Elizabeth Hubner e Magda Rodrigues Alves, colaboraram na elaboração deste artigo, participando da análise dos resultados expostos. Agradecemos àquela agência o apoio recebido na forma de auxílio-pesquisa, bolsas de iniciação científica e bolsa ao pesquisador. Nosso muito obrigada aos alunos, professores e pessoal técnico da Escola Municipal "Nossa Senhora do Carmo", onde a pesquisa foi realizada.

2 Endereço: Maria Lucia Faria Moro, Rua Francisco Torres, 621 - ap.22 80.060-130, Curitiba PR.

between practical and explanatory tasks, based on the phenomenon of taking awareness of actions and their results in the construction of new levels of conceptualisation.

**Key-words:** children's cognitive strategies, mathematical elementary learning, constructivist learning, addition/subtraction.

Em 1989, em uma escola pública da periferia de Curitiba, realizamos uma pesquisa sobre o papel das trocas sociais de crianças, agrupadas em trios, na aprendizagem construtivista de duas noções da iniciação escolar no 1º grau, o sistema da adição/subtração e o sistema da escrita alfabética.

Com propósitos teóricos e de aplicação pedagógica, o estudo foi planejado para examinar a relação das interações sociais das crianças com sua construção cognitiva em situação de aprendizagem, no quadro da epistemologia genética de Piaget.

Expomos, agora, os primeiros resultados da análise de uma parte restrita dos dados obtidos. São eles referentes a algumas categorias de estratégias cognitivas expressas pelos sujeitos de três dos seis trios examinados, na primeira de seis sessões de aprendizagem do sistema da adição/subtração.

As estratégias cognitivas das crianças são suas formas próprias de solucionar as tarefas propostas pelo adulto. Em sua sequência progressiva e conforme a perspectiva adotada, elas configuram o processo de aprendizagem ocorrente.

Dessa forma, apresentamos apenas uma dimensão muito parcial dos dados obtidos e dos problemas que nos propusemos tratar.

### ALGUNS ELEMENTOS TEÓRICOS

De pesquisas realizadas para responder a críticas do behaviorismo, Piaget propõe que a aprendizagem das estruturas lógicas insere-se no processo do desenvolvimento cognitivo, obedecendo aos mesmos fatores e mecanismos desse processo mais amplo (Piaget & Gréco, 1959).

Ao contrário do desenvolvimento, a aprendizagem é então concebida como uma intervenção específica e intencional que se refere a uma noção determinada a ser incorporada pelo sujeito às suas estruturas cognitivas. Assim, a aprendizagem só ocorrerá se a estrutura a ser aprendida encontrar no sujeito suporte em outras mais elementares na sequência da construção, em uma relação de assimilação. Logo, a aprendizagem só é possível quando há assimilação ativa por um sujeito ativo (Piaget, 1964).

A aprendizagem provavelmente trará mudanças às estruturas cognitivas do sujeito. Mas, por si só, ela não será suficiente para provocar o desenvolvimento dessas estruturas, embora participe necessariamente da ativação desse processo em interação com os demais fatores ali atuantes (Piaget & Gréco, 1959).

A partir dessa concepção, trabalhamos a idéia de uma aprendizagem construtivista de noções escolares. Se admitimos com Piaget que a criança é sujeito de seu ato de conhecer, construindo seu conhecimento na interação necessária com o objeto em um contexto de interações e transmissões sociais, segundo as regulações da

### *Aprendizagem construtivista*

equilíbrio, as noções escolares enquanto objetos de conhecimento são também construídas pelas crianças com as peculiaridades e em níveis que lhe são próprios.

A respeito, temos as propostas de Coll (1983) sobre a necessidade de análise dos conteúdos escolares para verificar sua complexidade estrutural e sua forma de construção pelos alunos.

As noções escolares teriam então sua construção provocada, ativada, na situação de aprendizagem. Esta consistiria de tarefas caracterizadas por conter propostas de confronto aos esquemas anteriores dos sujeitos para, dos conflitos cognitivos então gerados, ser provocada a estruturação de novos esquemas. Assim, a aprendizagem tem como foco a compreensão progressiva de cada noção, segundo os diversos níveis de sua psicogênese.

Partindo desse quadro teórico, organizamos nossas situações de aprendizagem tendo o apoio da literatura sobre a construção do número e das operações da adição/subtração.

Nos anos 60, Piaget e colaboradores publicam resultados de trabalhos sobre a epistemologia do número, interessantes à compreensão da aritmetização progressiva da criança. Das primeiras pesquisas desse ciclo, Piaget afirma a especificidade crescente das inferências numéricas e mostra que a noção de número se constrói de níveis figurativos aos operatórios (Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960).

Dentre as inferências relativas ao número, os autores apontam a iteração como estrutura que se constrói a partir de características pontuais para chegar à idéia de que toda passagem de um número a outro pode ser decomposta em uma sequência de passagens  $+1$ ,  $-1$ . Logo, aritmetizar quantidades significa considerar as partes de um todo quantificável como tantas quantas unidades iteráveis, ao mesmo tempo equivalentes e distintas.

Resultados de Gréco na obra de 1960 e na seguinte do ciclo (Gréco & Morf, 1962) evidenciam a importância da correspondência termo a termo na aritmetização progressiva da criança, quando da passagem da iteração ( $+1$ ) ( $-1$ ) centrada na ação para a idéia de iteração inferida como operação recorrential de transformação numérica ao infinito, com a idéia de "número qualquer".

Gréco mostra que, a partir de coleções iguais, compostas por correspondência termo a termo, a igualdade numérica é admitida pelos sujeitos antes de compreenderem eles a conservação de quantidades. Propõe então a noção de quotidade para expressar a existência dessas igualdades não-quantitativas, enquanto transição para a idéia de número. É o fato de o sujeito admitir igualdades, atribuindo-lhes mesmo um numeral (numeral este com caráter de denominador e não de numerador), sem a conservação de quantidades numéricas (Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960; Gréco & Morf, 1962).

Em Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget (1963), a partir de experiências sobre inferências aritméticas que exigiam a coordenação das dimensões cardinal e ordinal, Gréco mostra ser difícil para sujeitos de menos de 12 anos raciocinar com mobilidade sobre a série de números naturais na base de  $+1$  qualquer que seja  $n$ . Eles também têm dificuldade em avaliar cardinais arbitrários embora, bem cedo, possam entender que avançar uma posição na série equivale a juntar um ( $+1$ ), e que recuar uma posição equivale a tirar um ( $-1$ ). No entanto, a coordenação completa dessas duas operações em ambas as dimensões, a cardinal e a ordinal, só será possível mais tarde, no nível formal. Ocorreria, desse modo, uma progressiva construção do número enquanto

"número qualquer", em cujo enriquecimento a iteração  $+1 -1$  teria papel essencial.

Na mesma obra, Inhelder e Piaget examinam o papel das iterações no plano da ação propriamente dita, e da recorrência elementar, com base na idéia de que a iteração da ação de fazer a correspondência, mais do que a correspondência figurai, levaria à compreensão das equivalências numéricas e de sua conservação.

Os autores concluem apontando para uma forma elementar de recorrência, tão precoce que precede as conservações. Seria um raciocínio ligado ao número, elaborado na repetição da ação, com a transmissão de uma posição à posição seguinte pelas ações sucessivas de juntar elementos em correspondência termo a termo.

Foram, portanto, essas descobertas de Genebra que nos levaram a organizar a primeira parte da situação de aprendizagem ora focalizada, como centrada na composição das quantidades naturais de 1 a 10, com modificações posteriores dessas quantidades mediante sua recomposição e decomposição em quantidades diferentes e seu retorno à mesma série de 1 a 10, sempre segundo o princípio da ação iterativa  $(+1) (-1)$ , e pelo emprego da correspondência termo a termo.

Esse quadro traz a idéia de que, na iniciação aritmética, a adição e a subtração, como operações inversas de um sistema, devem ser trabalhadas ao mesmo tempo pelas crianças, com base em ações infantis tão naturais como a de pôr elementos e a de retirar elementos de coleções quaisquer.

Essas operações seriam essenciais à estruturação das quantidades numéricas, as quais compõem-se e decompõem-se por ações iterativas  $(+1) (-1)$ . Daí a importância de sua compreensão como sistema de ações inversas, produzindo quantidades numéricas que continuamente podem ser alteradas por iteração, sendo o número compreendido como oriundo daquele sistema de operações.

A literatura recente é farta a respeito dessas questões importantes à iniciação escolar em matemática.

Recordando poucas das inúmeras referências a respeito, temos Vergnaud (1985) mostrando que, em certos casos, a subtração corresponde a operações tão naturais como as adições (tirar, sair, perder), e insistindo em que os problemas aditivos são estruturas aditivas (relações) formadas de adições/subtrações. Saliencia que a subtração não se subordina à adição e não precisa ter sua introdução apoiada previamente naquela operação.

Kamii, com a colaboração de De Claro (1985), propõe a adição como objetivo central do primeiro ano, e a subtração como objetivo central do segundo ano básico, embora admita que a operação de subtração acompanhe a da adição com base na idéia de que ela é o inverso da adição.

Para sustentar essa idéia, a autora aponta, entre outras razões, resultados de Piaget sobre a tendência do pensamento infantil de se centrar nos aspectos positivos da ação e, só depois, nos seus aspectos negativos. A subtração é então afirmada como construção secundária, mais difícil por ser antinatural, quando as crianças ainda estão compreendendo adições.

Essa proposta sugere que, para Kamii, a subtração vem subordinada à adição, ao contrário do que pensam outros autores. Parece também assim que a autora não se refere à elaboração da adição/subtração enquanto sistema de operações reversíveis, ao contrário do que a inspiração piagetiana faria esperar.

Sobre a tarefa da segunda parte da situação de aprendizagem - a produção de

### *Aprendizagem construtivista*

notações pelos sujeitos do realizado nas tarefas da primeira parte e suas explicações dessa produção- baseamo-nos na hipótese que dá relevância à expressão gráfica da criança das noções matemáticas por ela trabalhadas no plano da ação, e à interpretação que ela faz de seus grafismos, como outros planos necessários de elaboração das relações ali envolvidas.

A expressão gráfica e sua interpretação participam assim expressivamente da construção daquelas noções, na medida em que favorecem a tomada de consciência de ações e de coordenações de ações que estruturam as mesmas noções.

É fundamental também o fato de ser o sistema de notações numéricas, por si só, um objeto de conhecimento a ser construído pela criança, como sistema de intercomunicação em nossa cultura. Seu significado social é assim expressivo e, por isso mesmo, é conteúdo da aprendizagem escolar da matemática.

A literatura atual mostra ser relevante fazer com que a criança expresse, em suas formas espontâneas de grafismo, o que elaborou a nível de ação, e interprete suas notações. Mostra ainda que as notações infantis das relações matemáticas têm uma progressão, e são ricas como produto da elaboração das crianças.

Assim, temos em Schubauer-Leoni e Perret-Clermont (1980), Brun e Schubauer-Leoni (1981) e Schubauer-Leoni e Perret-Clermont (1984) a identificação e análise de tipos de notação das crianças de problemas da adição/subtração, e que têm sua evolução favorecida sobretudo em situações de intercomunicação infantil.

Anne Sinclair (1988a) analisa as diversas formas de crianças pequenas representarem graficamente coleções de objetos idênticos e descreve tipos de notação, dos menos aos mais complexos.

Hermine Sinclair e Anne Sinclair (1986) propõem como essencial, no início da construção da numeração escrita, a articulação da elaboração infantil nos níveis da interpretação e da produção de notações. Lembram o quanto é importante seguir as notações espontâneas da criança e, a partir delas, tentar provocar sua progressão para notações mais adiantadas, desde que ligadas ao *background* conceitual infantil.

Hermine Sinclair (1988b) ressalta que o número é um objeto de pensamento; daí a relevância da questão: o que se pode fazer com ele? O que a criança pode fazer com ele? Insiste no fato de que, na escola, o trabalho deve partir dos quantificadores da linguagem natural infantil. A verbalização não-significativa, formal, deve ser evitada a partir da ênfase na realização ativa das relações, das implicações numéricas.

Em outro texto, Hermine Sinclair (1988c) chama a atenção para o trabalho conceitual das crianças na elaboração de relações entre as formas gráficas e suas significações. Recorda que, nas sociedades urbanas, desde pequenas as crianças em geral defrontam-se com os elementos do sistema da escrita numérica, assim como com os da escrita alfabética. E elas os interpretam segundo seus esquemas próprios.

Assim, se expostas antes a tais sinais gráficos, ao iniciar sua escolarização as crianças já têm elaborado algo sobre as notações numéricas.

Essas idéias nortearam então a organização de nossa primeira situação de aprendizagem. Pelo modo de ali apresentar aos nossos sujeitos a adição/subtração, quisemos dar-lhes a oportunidade de elaborar essas operações, de avançar na sua construção e, assim, compreendê-las como componentes de um sistema de inversos.

Entendemos que a análise das estratégias dos sujeitos na solução das tarefas de aprendizagem pode revelar o caminho dessa construção, tal como por nós provo-

cada, com suas peculiaridades e sua provável progressão. Daí trabalharmos inclusive com a alternativa de hierarquizá-las em suas várias categorias, em um desenho provável do próprio processo da aprendizagem.

## MÉTODO

### Sujeitos

Os três trios cujas estratégias cognitivas aqui analisamos foram escolhidos aleatoriamente dentre os seis examinados. Um foi composto de dois meninos e uma menina, e dois, de três meninos (de 7,3 a 10,2 anos). Todos eram alunos de 1- série do 1º grau e a maioria tinha já uma história de repetência nessa série.

Sua distribuição nos trios foi feita aleatoriamente, mas conforme a seguinte condição: a presença no trio de ao menos um sujeito de desenvolvimento cognitivo menos adiantado, sendo os demais, de desenvolvimento cognitivo intermediário ou mais adiantado. Essa composição visou possibilitar a ocorrência de confrontos de opiniões e realizações dos sujeitos, diferentes ou opostas entre si, nas sessões de aprendizagem.<sup>3</sup>

### Procedimentos

A primeira situação de aprendizagem foi composta, em sua primeira parte, de seis tarefas de composição e/ou decomposição de quantidades pela iteração (+1) (-1), tendo como material duas coleções de fichas de cartolina de cor diferente: a tarefa A, de composição de coleções de 1 a 10 elementos; a tarefa B, de modificação dessas coleções com o acréscimo de elementos (parcelas); a tarefa C, de sua modificação, pelo decréscimo daqueles elementos; a tarefa D, de recomposição das coleções de 1 a 10 elementos em outras quaisquer; a tarefa E, de recomposição das coleções para torná-las de quantidades iguais; a tarefa F, de recomposição da série de coleções de 1 a 10 elementos. Na segunda parte foram propostas duas tarefas: produzir notação das realizações da primeira parte e, em seguida, explicar as notações produzidas.<sup>4</sup>

A situação de aprendizagem, aplicada por um pesquisador, teve duração de quarenta minutos para cada trio, com gravação contínua em vídeo e em áudio.

### Análise dos dados

A montagem dos protocolos de dados foi feita da transcrição completa dos dados em vídeo e em áudio, depois revisada. Em sua versão final, esses protocolos compõem-se do registro verticalmente sequenciado das ocorrências observadas na situação - verbalizações e ações práticas - separadas em blocos conforme cada participante (o experimentador e cada um dos três sujeitos).

A análise dos dados foi de ordem qualitativa, realizada conforme os seguintes níveis de descrição:

3 Esta caracterização foi definida com base nos resultados do pré-teste, composto de provas clínicas relativas às noções escolhidas como objeto da aprendizagem (Moro, Branco & col., 1990).

4 A descrição detalhada das tarefas da situação de aprendizagem está à disposição em relatório de circulação restrita (Moro & Branco, 1992).

### Aprendizagem construtivista

- 1° - *descrição interpretativa dos comportamentos dos sujeitos* visando uma aproximação preliminar aos elementos descritores das estratégias cognitivas. Como unidade básica de interpretação foram escolhidas realizações dos sujeitos, delimitadas em pequenas seqüências de ações e verbalizações, em que aconteciam as tentativas de solucionar cada parte da tarefa. O resultado foi uma seqüência de interpretações das realizações de cada sujeito dos três trios, o que permitirá, mais tarde, a análise da evolução das estratégias de cada sujeito;
- 2° - *descrição de tipos de estratégias cognitivas*, para isolar os diferentes modos de os sujeitos buscarem soluções para as tarefas. Foi efetuada mediante o exame interpretativo de cada uma das descrições de primeiro nível e resultou em uma descrição tipificada das diversas estratégias cognitivas de cada tarefa. A seleção de descritores mais refinados foi tentada por meio da comparação das interpretações dentro do mesmo trio e entre trios;
- 3° - *categorização dos tipos de estratégias cognitivas*, para sintetizar a apresentação das estratégias encontradas em grupos específicos. Foi obtida mediante o exame de cada um dos tipos identificados, e os critérios para essa classificação emergiram da análise da natureza das realizações que as diferentes tarefas das situações de aprendizagem provocaram nos sujeitos;
- 4° - *hierarquização dos tipos de estratégias cognitivas por categoria*, visando verificar sua seqüência, do tipo menos para o mais complexo do ponto de vista de sua evolução, com base em critérios da literatura. Em certos casos não foi possível distinguir claramente a diferença evolutiva entre alguns tipos, o que sugeriu mais uma variação do tipo do que propriamente uma diferença de posição hierárquica.

### RESULTADOS

Das tarefas da primeira parte da situação de aprendizagem, identificamos categorias de estratégias cognitivas relativas: ao sentido geral da composição de coleções de 1 a 10 elementos; aos modos de composição dessas coleções; ao sentido geral de suas alterações quantitativas mediante acréscimos e/ou decréscimos de elementos a elas efetuados; à explicação das coleções de 1 a 10 elementos e das composições obtidas por acréscimos e/ou decréscimos a elas efetuados; à identificação das coleções obtidas; à previsão e às formas de controle das quantidades a compor. Da segunda parte, duas categorias apenas foram identificadas: dos tipos e das explicações das notações.

Os limites deste texto levam-nos a expor resultados da análise de quatro daquelas categorias. Essa síntese abrange todos os tipos de estratégias da mesma categoria, às vezes presentes em mais de uma tarefa da situação.

#### **Estratégias cognitivas relativas ao sentido geral da composição de coleções de 1 a 10 elementos**

As estratégias cognitivas descritas nessa categoria manifestaram-se nas tarefas A e F. Pudemos assim hierarquizá-las:

*1ª Estratégia* - composição de coleção qualquer de muitos elementos, sem levar em conta limites.

A orientação inicial do experimentador "...façam fileiras de 1 a 10 quadradinhos..." é compreendida como "pôr bastante quadradinhos...". As crianças acrescentam os elementos conforme a tendência forte da ação afirmativa de acrescentar elementos enquanto existe algo a acrescentar (Piaget, 1974c), traduzindo-se a quantificação em termos de "muitos", "bastante":<sup>5</sup>

2º trio: **Joc, Ru, Rod** põem em seguida +1 e mesmo +2 fichas em uma fila; Joc põe +1 ficha repetidamente sem respeitar a vez e com contagem unitária verbal mecânica, verbalizando até quinze, acompanhado pela verbalização de Rod até catorze; fila=12 fichas.

*2ª Estratégia* - composição de coleção de muitos elementos, mas levando em conta o limite quantitativo máximo anunciado.

Diante do pedido do experimentador, os sujeitos acrescentam ainda muitos elementos, mas limitam-se à quantidade da maior coleção solicitada. Eis a interpretação que fazem do pedido do experimentador: "fazer filas de 1 a 10 ..." significa pôr dez elementos.

Além do esquema, ainda presente, de acrescentar elementos em quantidade, nessa estratégia aparecem esquemas correspondentes à noção de quotidade, segundo os quais: "pôr... de 1 a 10..." é compreendido como "pôr de 1... é pôr um elemento, o primeiro..." e "pôr até de 10... é pôr um total de até 10, o décimo..." pela ordem. Uma coleção de 10 elementos é vista como suficiente pois cada elemento corresponde a um denominador numeral que se sequencia na ordem de 1 a 10, já dominada na escola.

1º trio: **Fab** (põe +1 ficha até fila=10; conta cada ficha em voz baixa) enquanto **Tat e Adr** (põem +1 ou +2 fichas na sua vez, com Tat fazendo contagem unitária verbal de parcela para em seguida, com Adr, pôr mais fichas até fila=10);

*3ª Estratégia* - composição de coleções de quantidades diferentes fora de qualquer ordem e com um controle elementar dessas quantidades.

Repetem-se coleções de mesma quantidade, sem que se manifeste indício de que as quantidades diferenciam-se sempre por um elemento (+1) (-1). É forte ainda o esquema de acrescentar muitos elementos: são compostas, sobretudo, primeiro as coleções de maior quantidade (coleções de 6 a 10 elementos) e, só depois, as de menor quantidade (coleções de 1 a 5 elementos). Porém, ao menos no plano da ação esboçam-se esquemas que podem levar à idéia de quantidade.

3º trio: **Aud, Ad e Ser** (mantém fila=10 fichas e fazem juntos filas=9, fila=8 fichas); Aud: "... de dez, não! De onze dá, tia?" Exp: "Não! Só de 1 até 10, não precisa de onze". Aud, Ad e Ser (fazem juntos filas=8, =7, =5, =7, =8, =6 fichas; depois, filas=5, =3, =4, =3, =2 fichas. Seguem repetidas retiradas de fichas de filas e fichas são postas em outras diferentes filas, resultando em filas=7, =9, =5, =8, =9, =6, =8, =4, =4, nesta ordem, as duas últimas não paralelas).

5 Destacamos em negrito a identificação do(s) sujeito(s) que expressou(aram) a estratégia cognitiva descrita.



4ª *Estratégia* - composição de coleções de quantidades diferentes produzidas mediante alguma ordenação.

Dentre elas, aparece um tipo em que já está presente o sentido geral crescente da composição: iniciando por coleções de menor quantidade, toda a série é recomposta (e esta é a limitação da estratégia) a partir da decomposição total, desnecessária das coleções antes presentes. Com isto, os acréscimos na nova composição ocorrem de um todo ainda não organizado, de um "monte" de elementos. Não ocorrem de coleções que decrescem progressivamente para que outras aumentem em decorrência dos acréscimos como ação contrária. Parece que os sujeitos ainda entendem que recompor as coleções de 1 a 10 só será possível mediante um "apagamento" total do que está diante deles, algo ligado à configuração presente: esta é desfeita para produzir uma outra, a da "boa forma" da série de 1 a 10.

Nesse mesmo nível, encontramos uma estratégia mais avançada que a anterior: apesar de "serem desmanchadas" algumas coleções desnecessariamente, há o reaproveitamento de algumas delas, com deslocamentos repetidos de um elemento a cada vez, entre as coleções, para produção da série. Logo, e ao menos no plano da ação, no repertório dos sujeitos há as ações iterativas de retirar/acrescentar (-1) (+1) elementos:

3º trio: **Aud** (desfaz filas=6, =8, =2, =4 fichas e as repõe fazendo filas=1, =2, =3, contando-as); **Ad** (repõe fichas fazendo fila=4) "...quatro". Aud (contando, repõe fichas) "...cinco". Ad: "Agora seis..." (repõe fichas com Aud e faz fila=5) "...seis."

5ª *Estratégia* - recomposição de coleções a partir da transformação das coleções presentes, com predomínio de modos ordenados, crescentes ou decrescentes de mudar os elementos.

A série de 1 a 10 é obtida então por decréscimos/acréscimos controlados de elementos quando, com a sucessão dessas ações, os sujeitos praticam-nas enquanto opostas, para atingir o objetivo da tarefa. As coleções de menor quantidade resultam das retiradas de elementos que são acrescentados a outras a aumentar. Há sinais de esquemas de composição de quantidades com alguma idéia de quantidade numérica.

3º trio: (**Aud, Ad, Ser** na sua vez põem +1 ficha para fazer nova fila=7; tiram -1 e põem +1 fichas nas filas, refazendo filas=8, =9, =10; repetem estas ações e fazem fila=4, =3, =2, =1).

Essas estratégias expressam patamares de compreensão da noção focalizada: da marca dos aspectos figurativos; depois, da noção de quantidade e, por fim, da presença de aspectos já transformacionais na composição de quantidades, indicadores tímidos de uma transição para uma elaboração mais avançada do sistema da adição/subtração.

#### **Estratégias cognitivas de explicação das coleções de 1 a 10 elementos**

As estratégias identificadas sob essa categoria consistem em explicações sobre: a presença da série completa de coleções de 1 até a de 10 elementos, a possibilidade de compor coleções além do limite indicado. Colocam-se em três níveis:

1° *Nível*- de explicações marcadas pela dimensão figurativa.

Os sujeitos afirmam necessitar de mais elementos para acrescentar porque a figura está incompleta e precisa ser completada para terminar de "formar" algo; ou, embora afirmem com o adulto que as coleções de 1 a 10 elementos estão presentes, admitem em seguida que elas compõem uma figura determinada.

3° trio: Exp: "...como é que ficou, deu para formar de 1 a 10 assim?"; Aud, Ad, Ser (acenam sim); exp: "O que vocês acham disto aí?"; **Aud:** "Um muro."; **Ad, Ser** (acenam sim).

2° *Nível*- de explicações marcadas pela noção de quantidade.

A presença da série completa é afirmada quando ela não o é, mostrando que a presença de coleções de quantidades diferentes, maiores ou menores, parece satisfazer os sujeitos porque entendem eles haver ali "...até 10 quadradinhos...". Predomina a idéia de que, havendo muitas coleções, ali haveria "de um primeiro até um décimo quadradinho...". Somente com perguntas desafiadoras específicas é que os sujeitos passam a constatar a quantidade de cada coleção presente, e admitir suas diferenças em termos de mais ou menos quantidade.

3° trio: Exp; (diante de filas=7, =9, =5, =4, =9, =6, =8, =2, =4, =4 fichas) "...que tal, fizeram todos?"; **Aud:** " Fizemos."; exp: "...desde a fileira de um, fizeram também até a fileira de dez?"; **Aud, Ad, Ser** (sinal afirmativo).

3° *Nível*- de explicações com marca quantitativa.

Há a idéia de que quantidades diferentes estão ali presentes e que, inclusive, devem ser verificadas para serem identificadas. A série parece ser entendida como série de coleções de quantidades diferentes. Porém, da forma pela qual ocorreu, no exemplo, a intervenção do experimentador, com forte sugestão aos sujeitos, não temos indicadores suficientes para afirmar sobre a natureza mais avançada dessa explicação. A necessidade de o sujeito contar, na falta de constatação da diferença progressiva de +1 elemento entre as coleções, sugere não haver tal avanço. Apontar essa diferença nas coleções dispensaria a necessidade da contagem dos elementos de cada uma delas até a de dez.

1° trio: Exp: "...olhando tudo assim (mostra filas), o que vocês pensam das coisas de 1 até 10? Como é que são, alguém pensa alguma coisa?"; **Tat** (rí, olha exp); exp: "Tem uma porção de quadradinhos, formando desde a quantidade um?..."; Fab: "Do um até o dez."; Tat: "Pode contá?" (faz gesto com a mão em direção às filas).

Em síntese, nas explicações dos sujeitos sobre as coleções por eles compostas, parece estar presente sobretudo a idéia de quantidade: diante das coleções de 1 a 10, os sujeitos as reconheceriam como tal, mas não as estariam compreendendo enquanto quantidades diferentes.

Manifesta-se uma pequena assimetria entre as estratégias relativas ao sentido geral da composição das coleções e as referentes à sua explicação: as primeiras aparecem como mais avançadas em relação às segundas.

**Estratégias cognitivas relativas ao sentido geral dos decréscimos/acrécimos de elementos a coleções**

As estratégias identificadas sob essa categoria ocorreram nas tarefas D e E,

### *Aprendizagem construtivista*

quando os sujeitos efetuaram decréscimos/ acréscimos (+1) (-1) de elementos para, respectivamente, alterar a quantidade das coleções e para torná-las iguais:

*1ª Estratégia* - da alteração das coleções dominada por critérios figurativos e guiada pela correspondência global/espacial.

Os sujeitos tiram/ põem elementos nas coleções para "desenhar" figuras geométricas ou contornos aparentes de figuras e espaços.

3º trio: (**Ad** tira -1 ficha da fila=1 e a põe na fila=5,  $5+1=6$ ; **Aud**, da fila=6, para outra fila=6,  $6+1=7$ ; **Ser**, da fila=4, para a fila=2,  $2+1=3$ ; **Ad**, da fila=7, para outra fila=7,  $7+1=8$ ; ...**Aud**, da fila=2, para fila=1,  $1+2=3$ , fazendo lado de possível quadrado; **Ser**, da fila=3, em outra fila=3,  $3+1=4$ , outro lado de possível quadrado).

*2ª Estratégia* - da alteração das coleções dominada ainda por critérios figurativos, mas objetivando igualar coleções agora mediante a correspondência termo a termo espacial.

Foram obtidos então contornos de uma figura, algumas coleções iguais a partir de uma coleção de referência ou dois grupos de coleções iguais, como em E, sempre sugerindo figuras geométricas.

2º trio: **Rod** (pega fichas -1 da fila=10, e as põe aos pares, fazendo duas fila=5); põe fichas (+1) (+1)... em correspondência termo a termo espacial com fichas de outra coleção, arrumando-as e pondo mais fichas nesta outra. Resulta em coleções de quantidades iguais (duas filas=9).

*3ª Estratégia* - da alteração das coleções marcada já por critérios propriamente quantitativos.

A obtenção de coleções iguais se faz pela contagem e pela correspondência termo a termo espacial. Mas, a marca figurativa ainda está presente: há ocupação de espaços vazios na configuração resultante de coleções iguais, lado a lado, e retirada de elementos dos extremos das "filas", os excedentes das coleções não aproveitados, o que foi decisivo para tornar as coleções iguais em quantidade. Esses excedentes só foram reaproveitados com a interferência do experimentador.

3º trio: (**Ser** tira -1 ficha, por três vezes, da fila=10, e as põe respectivamente nas filas=3,  $3+1=4$ , =5,  $5+1=6$ , em outra =5,  $5+1=6$ , ocupando espaços vazios; **Ad** tira -3 fichas da fila=7, e as põe na mesma fila=3,  $3+3=6$ ; **Aud** tira -3 fichas da fila =9, e as põe na fila=4,  $4+3=7$ , ocupando espaços vazios. Após nova rodada semelhante, há: cinco filas=7, uma fila=8 e uma fila=6, com as fichas não alinhadas entre si).

*4ª Estratégia* - da alteração das coleções segundo critérios quantitativos propriamente ditos.

As sucessivas ações (-1) (+1) de retirar/ acrescentar elementos ocorrem controladas pela contagem, formando dois grupos nítidos de coleções (as de maior número e as de menor número de elementos). Aquelas trocas seguem sistematicamente um movimento, da retirada de coleções menores para acréscimos às maiores.

1º trio: (**Adr** tira -1 ficha da fila=1 e a põe na fila=5,  $5+1=6$ ; **Tat**, da fila=2, para fila=9,  $9+1=10$ ; **Fab**, da fila=4, para fila=9,  $9+1=10$ ; **Adr**, da fila=5, para outra fila=9,  $9+1=10$ ; **Tat**, da fila=5, para fila=1,  $1+1=2$ ; **Ficam**: três filas=10, fila=8, fila=5, fila=4, quatro filas=3).

Essas estratégias mostram a passagem de realizações de um nível francamente figurativo para outro, com sinais de transformação quantitativa, passando por níveis de transição. Na maioria delas, são marcantes ainda os critérios figurativos: é mais a forma da coleção que decide sobre sua quantidade do que a presença dessa quantidade composta pelos decréscimos/acrécimos sucessivos de elementos.

### **Estratégias cognitivas de explicação das alterações quantitativas das coleções em outras diferentes ou iguais entre si**

Os seguintes níveis foram identificados para as estratégias de explicação das alterações das coleções em outras de quantidades diferentes ou iguais entre si:

1° *Nível*- ausência de explicação sobre as alterações efetuadas.

3° trio: Exp: "Ah! Ficou assim?" (aponta arranjo); Ad: "Ficou."; exp: "O que aconteceu? Como é que ficaram as filas de vocês?"; **Aud, Ad, Ser** (olham arranjo em silêncio, sem responder).

2° *Nível*- explicação baseada na "boa forma" do conjunto de coleções de quantidades diferentes, definidas pelo espaço que ocupam e não pelos decréscimos/acrécimos (+1) (-1) de seus elementos.

3° trio: Exp (para oito filas=6): "Elas têm a mesma quantidade?"; **Aud** (abrindo mão para indicar espaço que as filas devem ocupar): "Não!... tirando mais, tem que tirar um." (tira uma ficha da fila=6 da extremidade do arranjo,  $6-1=5$ ).

3° *Nível*- interpretação baseada na afirmativa da conservação da quantidade total dos elementos presentes, mas evocando a configuração obtida.

A conservação da quantidade total baseia-se ainda nessa configuração e o sujeito nada afirma sobre a alteração quantitativa das coleções que compõem esse total, sendo-lhe difícil entendê-lo como divisível em partes quantitativamente diferentes e alteráveis, sem que o todo se altere.

2° trio: **Joc**: "Agora ficou a mesma coisa, só que ficou um quadrado e um negócio assim." (aponta fila=2, ao lado das filas=6 e fila=9).

4° *Nível*- de interpretações que versam sobre as quantidades das diferentes coleções presentes e que foram alteradas.

Por exemplo, no caso das modificações de coleções em outras de quantidades quaisquer, essas interpretações assim ordenam-se: as que contém o reconhecimento de uma realidade a nominar com numerais, conforme a sequência destes, independentemente da quantidade presente; as que contém identificação de quantidades existentes, mas somente das menores; e as que envolvem identificação das quantidades, com elementos de quantificação mais elaborados (evocação de diferenças pelos quantificadores mais/menos, como consequência das alterações efetuadas).

1° trio: Exp: "Tirando de um lugar e pondo no outro, o que aconteceu então?";

**Tat**: "Aí aqui fica menos (aponta lado das filas com menos fichas)"... e lá fica com mais." (aponta lado das filas com mais fichas).

Esses níveis sinalizam uma progressão da ausência de explicações para explicações centradas nos aspectos figurativos, chegando àquelas fundadas em aspectos quantitativos.

### Estratégias cognitivas de notação

As estratégias de notação, da segunda parte da situação de aprendizagem, colocam-se nos níveis seguintes:

1º Nível - notações contendo elementos que em nada parecem aproximar-se da proposição das tarefas.

É o desenho de coisas, objetos, que seriam alheios ao que foi realizado.

2º trio: **Rod** (desenha um foguete e o sol). **Joc** (desenha uma casa e um navio).

2ª Nível - notações com a marca da apreensão de resultados figurativos das realizações.

O sujeito traça a figura resultante de suas ações anteriores, e apenas com perguntas do adulto é que aparece a quantidade na contagem automatizada dos elementos desenhados que compõem a figura produzida.

1º trio: **Adr** (desenha fichas emendadas, aponta fila com várias): "Eu tô na fila do oito." (desenha mais fichas emendadas).

3º Nível - notações com diferentes expressões de quantificação.

Mostram em subníveis o movimento progressivo da idéia de quotidade para a de quantidade, com a evocação de diversos aspectos da noção:

notação da operação de adição segundo o modo escolar, as "continhas".

Representando uma compreensão mais elaborada da composição de quantidade pela adição, essa notação pode parecer avançada. Mas, o exame cuidadoso das circunstâncias de sua produção mostra a presença forte do modo automático de realizar adições, apesar de o sujeito mostrar ter entendido suas realizações como algo ligado àquela composição. Por tais razões colocamos essa notação como a menos avançada dentre as do terceiro nível.

2º trio: **Joc** (arma conta  $5+5=10$ ): "Péra aí, é com cinco com cinco, lógico, quem não sabe, dez; cinco e cinco dez." (depois, arma conta de  $2+5=7$ ).

- notação de um conjunto de elementos, centrada no seu total, o qual é controlado durante a grafia. A preocupação com essa totalização sugere que o sujeito não "vê" ali a possibilidade de repartir esse todo em composições de quantidades diferentes.

2º trio: **Rod** (desenha filas=1, =2 fichas, aponta-as com a caneta; desenha filas=3, =4, =5, aponta-as, desenha outra fila=5, aponta com a caneta todas as fichas desenhadas e escreve 12 ao lado, com círculo em torno do algarismo).

- notação de coleções de quantidades diferentes: a) desenho de quantidades diversas, com representação gráfica em numeral daquelas quantidades, segundo algoritmos escolares (o que traz dúvidas sobre ser o numeral ali entendido na sua função de código representativo); b) desenho da série de coleções antes composta, controlando sua quantidade a cada "acrécimo" (cada ficha desenhada), com verbalização das quantidades durante e após a notação; c) desenho de diferentes quantidades fora da ordem da série, sem emprego de algoritmos escolares, com grafia do numeral correspondente à quantidade de cada coleção.

2° trio: **Joc** (desenha 11 fichas, aponta-as): "Um, dois, três... dez, onze (enlaza fichas)...como é que é o onze mesmo? (para Ru)...é o um"; Ru: "É o um e o dois."; Joc: "É o um e o um?" (para Ru e Rod); Rod: "Onze é o um, ...onze? Então é o um e o um."; Joc: "Este aqui é o onze (escrevendo 11 abaixo das fichas enlaçadas, faz traço embaixo).

1° trio: **Fab** (desenha filas=1, =2, =3, =4 fichas): "O cinco... (desenha fila=5 fichas), quatro cinco... (desenha fila= 6), seis... (desenha fila=7), sete."

De notações em princípio alheias às tarefas, passam elas a representações do produto das mesmas em termos da configuração obtida e, enfim, a notações relativas à quantificação ou à composição/decomposição de quantidades. Estas denotam formas de compreensão mais livres dos aspectos figurativos, pois centradas nas ações de composição e decomposição. Porém, a ênfase em cada uma dessas ações e não em suas combinações indica ausência ainda de compreensão mais avançada da relação entre aquelas operações.

#### Estratégias cognitivas de explicação das notações

A análise dessas estratégias mostrou que elas podem ser colocadas em dois níveis:

1° Nível- descrições do que foi graficamente representado, assim hierarquizadas:

- descrição de figuras desenhadas não relativas às tarefas. Com o pedido de explicação, mesmo tendo havido algum motivo para desenhar aquelas coisas, este motivo não é expresso, resumindo-se a resposta na descrição do desenhado.

2° trio: **Joc** (apontando desenho da casa): "Fiz uma casa (aponta navio desenhado)...fiz um navio."; **Rod** (apontando sol desenhado): "Eu fiz o sol."

- descrição de configurações relativas às tarefas. O predomínio de aspectos figurativos na interpretação dos sujeitos corresponde à notação produzida com essas marcas. Somente provocado ou induzido pelo adulto é que o sujeito evoca quantidades. Mas estas se referem à simples contagem dos elementos, vistos como componentes da figura representada; portanto, uma quantificação que se reporta à configuração produzida.

3° trio: **Ad**: "Um muro..."; **Aud**: "Eu fiz metade de um muro... e fiz uma escada porque aquela hora tinha dado uma escada."; Ser: "Um muro."; Aud (apontando parte das fichas desenhadas): "...um, dois, três, quatro, cinco em cima."; Aud: "Três em cima... aqui é o meu, dois em cima (apontando parte das fichas que desenhou).

- descrição das adições anotadas de forma escolar tradicional (as "continhas"), com esquecimento do sujeito das razões para tê-las anotadas. Este dado reforça a idéia do caráter mecânico dessa notação, embora se refira ela à adição, um dos focos das tarefas.

2° trio: **Joc** (apontando conta  $5+5=10$ ): "...fiz continha (aponta conta  $5+2=7$ ) ...fiz continha."; exp: "Por que você fez continha?"; Joc: "Ai! Eu se esqueci."

### *Aprendizagem construtivista*

2° Nível- de explicações, propriamente ditas, da produção gráfica, e que se apresentam segundo a hierarquia seguinte:

- explicações apoiadas na experiência escolar dos sujeitos em aritmética e que parecem expressar interpretações dessas experiências nos termos seguintes: a) as "continhas", porque facilitam a obtenção de um resultado. É algo verdadeiro, mas revela a preocupação dos sujeitos com tais resultados, provavelmente na busca segura do correto; b) a casa desenhada evoca a idéia de valor-lugar relativa aos numerais, conforme a própria analogia da tradição escolar: os numerais justificam-se em certas posições porque ali são "suas casas".

2° trio: **Joc** (para a casa que desenhou): "E a casa também pode precisar da dezena e da unidade... (desenhando sinal) ...esse aqui é a casa da dezena." (para Ru): "Como é que é a casa da unidade?"; Ru: "Eu ainda não sei."; Joc (desenhando sinal): "A casa da unidade é assim, oh!".

- explicações circulares diretamente referentes à produção das coleções de 1 a 10 elementos, interpretadas em termos quantitativos globais: todo o "joguinho" totaliza todos os elementos antes acrescentados na ação, agora acrescentados em desenho. Essas explicações sugerem uma centração na ação de pôr muitos elementos e uma não-diferenciação quantitativa das coleções. Fariam a transição entre a compreensão mais globalizada da composição grafada e uma compreensão das possibilidades de composições de quantidades diferentes.

2° trio: Ru (apontando filas de fichas desenhadas): "Fiz aqueles lá, baralhos do joguinho, ...aqueles lá, todos baralhos que a gente tava fazendo".

- explicações sobre as quantificações parciais que as coleções desenhadas expressam: centradas nas quantidades reais das diversas coleções e, mais avançadas, na diferença quantitativa entre as coleções. Mas, em certos aspectos, tais explicações ainda são circulares: seu conteúdo evoca as diversas quantidades que, desenhadas, representam as que antes foram compostas.

1° trio: **Fab**: "Eu fiz um, dois, três ...oito." (apontando no ar filas desenhadas com aquelas quantidades de fichas); ...Tat: "Eu fiz, óh! Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete..." (marcando com a mão cada fila desenhada com aquelas quantidades de fichas).

Interpretamos essas explicações conforme dois eixos: o primeiro, da ausência ou da presença de explicações propriamente ditas; o segundo, referente às explicações, com conteúdos pertinentes ou não pertinentes à noção focalizada, com interpretações centradas nos aspectos figurativos até sua progressão a aspectos propriamente quantitativos.

Tomando o segundo eixo, vemos certa correspondência entre as explicações das notações e as próprias notações. Em parte dos casos, o sujeito faz a representação gráfica da realização anterior e, depois a explica, referindo-se ao conteúdo da representação.

Contudo, interessa destacar a ausência de correspondência total entre explicações e notações, sugerindo assimetrias esperadas entre elas. Assim, em um mesmo sujeito, se há um avanço no grafismo, nem sempre este é explicado conforme o que contém ou sugere como sinal de compreensão mais avançada; mas, aparece uma explicação mais adiantada de uma representação gráfica que foi produzida de modo menos adiantado.

### DISCUSSÃO

A análise das estratégias cognitivas de nossos sujeitos na primeira situação de aprendizagem do sistema da adição/subtração, do que apresentamos apenas um recorte, coloca-nos de início questões como: que significado têm essas estratégias? Que revelam elas sobre a compreensão da noção focalizada?

Uma primeira qualificação atribuível às estratégias é a de serem elas marcadas, em geral, por características pré-operatórias, revelando noções ou quase estruturas numéricas específicas à construção do número, segundo a literatura (Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960; Gréco & Morf, 1962).

Para as diversas tarefas propostas, no plano da realização prática como no da sua explicação ou notação, as soluções dos sujeitos colocam-se em um patamar inicial marcado pelos aspectos figurativos. O patamar seguinte caracteriza-se pela presença da noção de quotidade e, depois, há uma patamar com indícios preliminares da noção de quantidade numérica.

O primeiro desses patamares se define pela tendência de os sujeitos guiarem sua composição de coleções pela busca de uma "boa forma", visando obter determinada configuração. O patamar seguinte guarda a marca da noção de quotidade: a uma coleção qualquer de elementos pode ser atribuído um número, entendido enquanto "denominador" da coleção. Esse número ou identidade numérica se conserva como qualidade atribuída à coleção (em geral, pela contagem), mas não como quantidade (Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960; Gréco & Morf, 1962).

O terceiro patamar define-se como de transição entre a noção de quotidade e a de quantidade numérica, quando o número passa de "denominador" a "numerador" das coleções. Essa transição é atestada pela presença dos primeiros sinais de compreensão, no caso de quantidades menores, de que é mediante a iteração ainda limitada de (+1) (-1) elementos que as coleções alteram-se em sua natureza propriamente quantitativa.

Entendemos que, ao revelarem realizações nesses diferentes patamares, nossos sujeitos colocam-se em geral no primeiro dos planos evolutivos da iteração, o da *iteração construtiva*, segundo Gréco: parecem empregar a ação de acrescentar (+1) como técnica instrumental para compor por aproximações os diversos cardinais na sua sucessão e até certos limites. Identificam uma quantidade numérica mais pela sua posição ordinal; só quando provocados, reconhecem a diferença aritmética entre termos próximos.

As estratégias mais adiantadas de algumas categorias sugerem a presença da *iteração qualitativa*, a forma evolutiva seguinte. É quando alguns sujeitos decompõem/compõem coleções, trocando um elemento de lugar, fazendo alternadamente



(+1) (-1), aproveitando os já presentes. Essas ações estão sendo executadas em seu duplo sentido inverso; mas esta execução ou sua explicação pela criança nada indicam sobre ter agora essa construção algum caráter recursivo, com os números naturais formados mediante coordenações parciais entre a cardinalidade e a ordinalidade (Gréco, in Greco, Inhelder, Matalon & Piaget, 1963).

Contudo, durante as tarefas, vemos nas diversas categorias de estratégias, sinais claros de uma progressão entre os três patamares definidos: ocorre uma diminuição progressiva de estratégias marcadas pelos aspectos figurativos, a favor daquelas onde melhor se organizam as ações iterativas e mais são elas levadas em conta nas explicações infantis. Houve portanto, para nossos sujeitos, algum avanço entre aqueles patamares de compreensão.

Em suma, os sujeitos revelaram, no máximo, poder realizar a adição/subtração na composição numérica mediante ações com apoio concreto, ocorrentes em cada um de seus sentidos - do acrescentar/aumentar para o de retirar/diminuir - mas sem compreender ainda as relações numéricas reversíveis que definem aquelas operações como sistema de transformações.

Logo, a situação de aprendizagem parece ter oferecido uma experiência com o objeto que provocou nos sujeitos esquemas, soluções próprias envolvidas na sua construção, permitindo-lhes algum avanço na reestruturação desses esquemas.

Entretanto, por que houve a expressão dessas realizações das crianças? Como e por quê certos avanços de construção da noção surgiram? Devemos melhor examinar as peculiaridades da passagem entre os diferentes níveis e subníveis da construção da noção, para melhor compreender o que ali ocorreu.

A respeito, a análise das estratégias torna evidente o papel da alternância entre as tarefas de execução e as tarefas de explicação do executado em toda a situação, oportunidades de os sujeitos comporem concretamente coleções numéricas e refletirem sobre suas ações e sobre o que delas resulta.

Não foi por acaso que essa alternância ocorreu. Ao planejarmos as tarefas, guiamo-nos por essa diretriz por razões teóricas evidentes: a idéia de Piaget (1974a; 1974b) de que a progressão cognitiva ocorre em uma sequência psicogenética da ação para sua conceitualização, por abstração refletidora e mediante a tomada de consciência das ações e de seus resultados, levando àquela conceitualização e a novas ações. É a proposição, para a relação sujeito-objeto, de um modelo de reação circular em que o sujeito só conhece agindo sobre os objetos e estes só se tornam conhecíveis por causa do progresso das ações sobre eles exercidas pelo sujeito.

Assim, após cada ciclo de realizações práticas, havia pedidos de explicação aos sujeitos, e provocações para suas previsões e identificações. E, na segunda parte, a produção de notações sobre aquelas realizações foi seguida de sua explicação.

Como demonstrar o papel daquela alternância entre as tarefas na relativa progressão das estratégias?

Tomando, primeiro, os resultados da análise das estratégias de explicação dos sujeitos sobre suas composições, verificamos que na tarefa A predominam as estratégias com marcas figurativas e as relativas à noção de quantidade, com alguma correspondência entre essas estratégias e as suas respectivas de composição.

Porém, já ao compor as coleções da tarefa A e, mais intensamente nas tarefas seguintes, os sujeitos passam a controlar suas ações de acrescentar/retirar e com mais

### *Aprendizagem construtivista*

Logo, vemos ter sentido o argumento clássico de que ocorre, muitas vezes, uma execução mais organizada no plano da ação sem que o sujeito, possa, de imediato, pela abstração reflétidora, retirar das ações relações interpretativas de ordem superior. Mas, a esse argumento acrescentamos outro: além de haver momentos claros em que explicações parecem mais adiantadas que realizações práticas, estas só se tornam mais adiantadas a partir de explicações de tarefas anteriores. Estas são menos adiantadas, então, apenas em relação às realizações práticas da mesma tarefa.

Quanto às notações das realizações e suas explicações, observamos também na progressão das estratégias, o quanto a alternância da ação e de sua interpretação se revela relevante.

Lembrando ser a notação, um modo de interpretar as ações práticas, vimos que suas manifestações têm também alguma assimetria em relação àquelas realizações da tarefa F: de imediato, agora, os sujeitos não grafam em níveis mais adiantados do que nas realizações anteriores.

A interpretação das realizações parece trazer aos sujeitos dificuldades novas de construção que, no plano prático das composições/decomposições anteriores, pareciam superadas. Porém, a análise mostra também que a assimetria apontada é, às vezes, fragilizada pela presença de grafismos indicando interpretações mais avançadas, inferências pertinentes ao antes realizado.

De seu lado, o exame da relação das explicações das notações com as próprias notações também permite destacar o papel daquela alternância "ação x interpretação": a maioria das explicações ou evoca a configuração produzida antes ou reporta-se circularmente às realizações anteriores, guardando seu caráter descritivo. Enquanto reelaboração da representação gráfica das realizações anteriores, as explicações surgem então sobretudo como menos avançadas que as notações, mostrando a assimetria dessa relação.

Porém, esboçam-se explicações quantificadas, e algumas notações, somente quando interpretadas, assumem sentido relativo às tarefas. Embora tímida, aquela assimetria aparece às vezes a favor das explicações, sugerindo o movimento pendular entre a notação e sua explicação. Este movimento atesta novamente o papel da relação circular da ação e de sua conceitualização, via tomada de consciência das ações e de seus resultados, relação inerente à dinâmica cognitiva do sujeito em função da equilibrção.

O exame das estratégias mostra ainda, entre outras realizações das crianças, a evolução das formas de controle dos acréscimos/decrécimos iterativos (+1) (-1): há controle posterior à realização, muitas vezes provocado pelo adulto, e levando a retiradas de elementos ou à destruição da coleção para iniciar outra; após, vem o controle durante e após a realização; e, por fim, o controle anterior, prevendo a quantidade a compor. Verificando as quantidades numéricas presentes, os sujeitos fazem antecipações, planejam suas ações (+1) (-1). Pedidos do adulto ou de outro sujeito para identificar coleções têm então um papel provocador fundamental. Assim, a necessidade de verificar mais e mais se sistematiza, mesmo quando critérios figurativos ainda dirigem as ações. Cresce a objetividade no trato das coleções, algo relevante às reelaborações infantis sobre sua dimensão numérica, pois que também enfraquece as marcas do aprendizado escolar mecanizado (a recitação dos numerais, por exemplo).

eficiência. A necessidade de verificar, depois de antecipar, planejar suas ações e composições intensifica-se, mostrando a preocupação em atribuir às coleções um numeral denominador correto (a quotidade).

Assim, na tarefa B as explicações dos sujeitos para as alterações nas composições pelos acréscimos efetuados já evocam as ações de acrescentar. Em C, as explicações partem de configurações, mas referem-se à ação de retirar e às suas consequências, com o uso de quantificadores "mais/menos".

Se nas tarefas A e B, alguma correspondência evolutiva entre as estratégias de realização/composição prática e as de explicação dessas realizações se delinea, vemos mais claramente em C diminuir essa correspondência, na medida em que, as de realização parecem adiantar-se às suas respectivas estratégias de explicação. Essa leve assimetria pode ser devida ao que as explicações relativas às tarefas anteriores trouxeram às realizações em termos de planejamento das ações dos sujeitos, de antecipação mais clara dos resultados dessas ações.

Nas tarefas D e E, o mesmo ciclo se repete em linhas gerais: nas realizações práticas crescem a verificação (por contagem e correspondência termo a termo mais eficientes) e o planejamento das ações; nas explicações, o emprego de quantificadores e a evocação das ações de acrescentar/retirar intensificam-se e afinam-se, sinais de que o sujeito passa a avaliar as coleções como composições quantitativas resultantes daquelas ações.

Mas, em D e E, avançando a quantificação pela contagem, diminui a assimetria a favor das estratégias de realização prática, sendo apontadas, nas explicações, diferenças quantitativas entre coleções diversas. Há uma leve assimetria favorável a essas explicações, que em D mais se referem às ações de retirar/acrescentar como responsáveis pelas coleções.

No entanto, se as realizações práticas da tarefa E revelam novamente a força dos critérios figurativos, é curioso ali mesmo observar como, de realizações baseadas naqueles critérios, vem a necessidade do controle das ações de acrescentar elementos via contagem, entendidas as alterações das coleções como resultado de ações iterativas de retirar/acrescentar.

Enfim, na tarefa F, as realizações práticas são mais adiantadas: os aspectos transformacionais das ações ficam mais nítidos, com emprego mais elaborado das formas de controle para verificar e prever as composições. Porém, as explicações das coleções guardam marcas figurativas, e são menos adiantadas que as realizações, atestando novamente a assimetria a favor destas.

A destacar que, em comparação com o que houve na tarefa A, equivalente a esta tarefa F, aparece uma pequena regressão nas explicações dos sujeitos. A que atribuir esse fato?

A explicação nos vem da combinação das seguintes idéias: da pregnância, nos sujeitos, da "boa forma" da série de coleções de 1 a 10 como critério ("boa forma" agora novamente diante dos sujeitos) em confronto com explicações pela quantificação ainda recentes e, portanto, instáveis; da inadequação de certas perguntas do experimentador na ocasião, chamando a atenção dos sujeitos para aspectos figurativos da série de coleções.

Entretanto, apesar dessa regressão, as explicações de F se confirmam, em geral, como mais avançadas que as de A.

Em síntese, da análise das estratégias cognitivas de nossos sujeitos vemos as possibilidades infantis de empregar certos esquemas pertinentes à construção focalizada, de superar esses esquemas descobrindo outros a partir das oportunidades das tarefas. Para essa progressão, destacamos o papel da alternância entre tarefas de realização prática e tarefas de explicação.

Em princípio, nossas tarefas podem ser vistas como desafios adequados às crianças nos vários momentos daquela progressão, embora a cada utilização devam sofrer reformulações e mostrar novas possibilidades de melhor favorecer a construção da noção.

A discussão aponta para a natureza dinâmica dos progressos obtidos pelos sujeitos durante a aprendizagem. Ainda que limitados a um patamar pré-operatório, vemos esses avanços como construtivos, pois partiram das próprias elaborações infantis sobre as propostas, os desafios oferecidos na situação, fazendo-as avançar até onde assimilações significativas puderam ocorrer.

Da oferta de novos desafios pelo mundo cultural, avanços de conceitualização são esperados com a tomada de consciência pelas crianças dos resultados de suas ações iterativas (+1) (-1), e da organização reversível dessas ações como meio de obter quantidades. É o que verificaremos na continuidade da análise dos resultados de nossa pesquisa sobre as estratégias cognitivas nas demais situações de aprendizagem oferecidas aos sujeitos.

#### REFERÊNCIAS

- Brun, J. & Schubauer-Leoni, M. L. (1981). *Recherches sur les activités de codage d'opérations additives en situation d'interaction sociale et de communication*. IMAG. Grenoble: Université de Grenoble.
- Coll, C. (1983). As contribuições da psicologia para a educação: teoria genética e aprendizagem escolar. Em L. B. Leite & A. A. Medeiros (Orgs.). *Piaget e a Escola de Genebra* (pp. 164-97). Tradução de A. A. Medeiros. São Paulo: Cortez, 1987.
- Greco, P., Grize, J.B., Papert, S. & Piaget, J. (1960). *Problemes de la construction du nombre*. Etudes d'Epistémologie Génétique, vol.XI, Paris, PUF.
- Greco, P., Inhelder, B., Matalon, B. & Piaget, J. (1963). *La formation des raisonnements récurrentiels*. Etudes d' Epistémologie Génétique, vol. XVII, Paris, PUF.
- Greco, P. & Morf, A. (1962). *Les structures numériques élémentaires*. Etudes d'Epistémologie Génétique, vol. XIII, Paris, PUF.
- Kamii, C. K. & De Clark, G. (1985). *Young children reinvent arithmetic: implication of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.
- Moro, M. L. F. ; Branco, V. & Col. (1990). *A aprendizagem construtivista no início da escola elementar e o papel da interação social das crianças*. Relatório preliminar de pesquisa. Curitiba: UFPR/CNPq (mimeo).
- Moro, M. L. F. ; Branco, V. & Col. (1992). *A aprendizagem construtivista no início da escola elementar e o papel da interação social das crianças*. As estratégias

*Aprendizagem construtivista*

cognitivas das primeiras situações de aprendizagem. Relatório de pesquisa. Curitiba: UFPR/CNPq (mimeo).

- Piaget, J. (1964). Development and learning. *Journal of Research on Science Teaching*. XI (3): 176-86.
- Piaget, J. (1974a). *Laprise de conscience*. Paris: PUF.
- Piaget, J. (1974b). *Fazer e compreender*. Tradução do francês de C. L. P. Leite. São Paulo: EDUSP/Melhoramentos, 1978.
- Piaget, J. (1974c). *Recherches sur la contradiction*. Etudes d'Epistémologie Génétique, vols. XXXI e XXXII. Paris, PUF.
- Piaget, J. & Greco, P. (1959). *Aprendizagem e conhecimento*. Estudos de Epistemologia Genética, vol. VII. Tradução da equipe da Livraria Freitas Bastos. Rio, Freitas Bastos, 1974.
- Schubauer-Leoni, M. L. & Perret-Clermont, A. N. (1980). Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Neuchâtel/Geneve, 1-3, p. 297-350.
- Schubauer-Leoni, M. L. & Perret-Clermont, A. N. (1984). Construction sociales d'écritures symboliques en deuxième primaire (opérations additives). *Interactions Didactiques*, 4, Geneve/Neuchâtel, Universités de Geneve et de Neuchâtel.
- Sinclair, A. (1988a). A notação numérica na criança. In H. Sinclair (org.). *A produção de notações na criança* (pp. 71-96). Tradução do francês por M. L. Moro. São Paulo, Cortez, 1990.
- Sinclair, H. (1988b). *Learning: the Interactive re-creation of knowledge*. Communication in the International Congress of Mathematics Teaching. Budapest, (mimeo).
- Sinclair, H. (1988c). Introdução. Em H. Sinclair (org.). *A produção de notações na criança* (pp. 13-18). Tradução do francês por M. L. Moro. São Paulo, Cortez, 1989.
- Sinclair, H. & Sinclair, A. (1986). Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In J. Hiebert (Org.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 59-74). London/Hillsdale: Lawrence Erlbaum. Pp.59-74.
- Vergnaud, G. (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 3e. ed. Berne: Peter Lang.

Recebido em 01.09.1992

Aceito em 30.09.1993