AS RELAÇÕES DE PRIMEIRA-ORDEM EM TAREFAS DE PROPORÇÃO: UMA OUTRA EXPLICAÇÃO QUANTO ÀS DIFICULDADES DAS CRIANÇAS[1]

Alina Galvão Spinillo[2]
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO - Problemas de proporção são considerados muito difíceis para crianças, sendo esta dificuldade explicada em termos da incapacidade em estabelecer relações de segunda-ordem. Este artigo evidencia que a causa das dificuldades reside muitas vezes, nas relações iniciais de primeira-ordem e que quando estas são fáceis as crianças são capazes de estruturar as relações de segunda-ordem. Ambos os tipos de relações são detalhadamente considerados na análise dos resultados de várias investigações, bem como a natureza das relações de primeira-ordem (parte-parte e parte-todo) e das dimensões (complementares e não-complementares) envolvidas nos problemas. As discussões apontam a existência de diferentes níveis de compreensão por parte das crianças acerca do conceito de proporção. Implicações educacionais, metodológicas e quanto ao desenvolvimento cognitivo são apresentadas.

Palavras-chave: proporção, relações de primeira-ordem, dificuldades das crianças, relações parte-parte/parte-todo.

THE FIRST-ORDER RELATIONS IN PROPORTIONALTASKS: ANOTHER VIEW ON CHILDREN'S DIFFICULTIES WITH PROPORTION

ABSTRACT - Proportions proved to be extremelly difficult for children due to their inability in dealing with the second-order relations in proportional problems. This paper demonstrates that the cause of the difficulties may reside in the first-order relations and that children can solve some proportional problems when the first-order relations are accessible to them. Our analysis takes into account the first and the second-order relations in several research studies about proportions; the nature of the first-order relations (part-part and part-whole) and of the dimensions involved (complementary and non-complementary). The discussions show that there are different leveis of understanding by the part of young children about this

1 Agradeço a Peter Bryant, do Department of Experimental Psychology, University of Oxford - Inglaterra, por sua inestimável contribuição nas discussões sobre o tema e à CAPES pela bolsa concedida para a realização de um estudo mais amplo que originou o presente artigo.
2 Endereço: R. Antonio de Sá Leitão, 108, casa N-7, 51020 Recife, PE.

concept. Educational, methodological and developmental implications are presented.

Key-words: proportion, first-order relations, childrer's difficulties, part-part/part-whole relations.

O conceito de proporção desempenha papel importante nas situações de vida diária. Uma pessoa precisa, por exemplo, usar proporções para determinar o custo relativo de dois produtos à venda em diferentes quantidades, ou para descobrir a distância entre dois lugares representados em um mapa, ou para calcular a quantidade de ingredientes em uma receita para um certo número de pessoas, ou ainda para decidir qual, dentre dois carros é o mais rápido.

Em educação, o conceito de proporção é relevante em programas de matemática e ciências, sendo a base para o ensino, compreensão e aplicação de conceitos elementares e complexos que requerem o reconhecimento de similaridades estruturais entre duas situações diferentes.

Em psicologia, o conceito de proporcionalidade está relacionado ao desenvolvimento cognitivo, consistindo em um dos esquemas do pensamento formal. A aquisição deste conceito tem sido tratada como um fenômeno tudo-ou-nada: crianças não possuem pensamento proporcional, enquanto adolescentes o possuem. Devido a isto, a maioria das pesquisas na área tem se concentrado na investigação do pensamento proporcional em adolescentes, e pouco se sabe acerca das noções iniciais que a criança tem sobre proporções, negligenciando-se em parte, outras possíveis manifestações do pensamento proporcional a níveis mais elementares.

Entretanto, é possível conceber uma abordagem diferente da tradicionalmente adotada, e investigar a possibilidade de que as crianças apresentem diferentes níveis de compreensão quando solucionam tarefas simples, que requerem delas julgamentos proporcionais. Subjacente a esta perspectiva encontra-se a idéia de que nem todos os julgamentos proporcionais são inacessíveis às crianças, e que alguns deles podem ser mais fáceis que outros. O foco de interesse do presente artigo refere-se a questões de caráter epistemológico, quanto à natureza, origem e desenvolvimento do pensamento proporcional e às causas (obstáculos epistemológicos) das dificuldades experimentadas pelas crianças. Como poderá ser notado ao longo deste trabalho, em alguns pontos de nossa análise concordamos com a perspectiva teórica de Piaget; em outros, nos distanciamos dela, levantando possibilidades outras acerca do desenvolvimento e aquisição deste conceito.

Antes de abordarmos estas questões, é necessário compreender o que vem a ser pensamento proporcional, os tipos de tarefas usados e as dimensões envolvidas nos problemas.

O QUE É PENSAMENTO PROPORCIONAL?

As tarefas de proporção variam desde problemas diretos, envolvendo comparações entre quantidades relativas de líquido em diferentes recipientes (Bruner & Kenney, 1966; Siegler & Vago, 1978) até problemas complexos, envolvendo leis físicas (Inhelder & Piaget, 1958; Siegler, 1976; 1978) que requerem a coordenação de diferentes dimensões. Todos esses problemas, entretanto, tem um aspecto em comum: para resolvê-los é preciso estabelecer-se relações de segunda-ordem, ou, usando os termos de Piaget e Inhelder (1975), relações entre relações *(rapports de rapports).*

As relações de *segunda-ordem* consistem no estabelecimento de uma relação entre duas (ou mais) relações de primeira-ordem. A importância das relações de segunda-ordem para o pensamento proporcional tem sido amplamente reconhecida, mas raramente tem-se atentado para a relevância do ponto de partida destas relações: *as relações de primeira-ordem.* É sobretudo acerca dessas relações que versa o presente trabalho, onde a distinção entre relações de primeira e de segunda-ordem é considerada em diversos tipos de tarefas usados nas pesquisas sobre proporção.

TAREFAS TÍPICAS ENVOLVENDO PROPORÇÃO

Karplus, Pulos e Stage (1983), Tourniaire e Pulos (1985) e Lesh, Post e Behr (1988) classificam as tarefas de proporção em dois tipos: *tarefas de comparação e de incógnita.*

Tarefas de Comparação

Estas são definidas em termos de A:B = C:D ou A:B = C:D, onde os quatro valores são dados e o sujeito tem que determinar se existe ou não uma equivalência entre o primeiro e o segundo par de valores. Para resolver essas tarefas é preciso estabelecer uma relação de primeira-ordem no primeiro par de valores (A:B) e uma outra relação de primeira-ordem no segundo par (C:D). Estas relações de primeira-ordem são comparadas, a fim de determinar se são equivalentes ou não. A relação estabelecida entre as duas relações iniciais de primeira-ordem consiste na relação de segunda-ordem (relações entre relações).

Tarefas de Incógnita

Estas são definidas em termos de A:B = C:X, onde os três primeiros valores são dados e o sujeito tem que determinar o valor do termo desconhecido "X" de forma a manter no segundo par de valores, a mesma relação proporcional identificada no primeiro par. Para a solução é necessário determinar a relação de primeira-ordem no primeiro par (A:B) e inferir a outra relação de primeira-ordem (C:X). Esta inferência envolve uma relação de segunda-ordem, onde o sujeito compara ambas relações de primeira-ordem. Este tipo de tarefa tem sido amplamente utilizado no ensino de proporções através do algoritmo da *Regra de Três* (Carraher, 1986; Carraher, Carraher & Schliemann, 1986; Carraher, Carraher, Schliemann & Ruiz, 1986).

Para compreendermos como tarefas de proporção são resolvidas, precisamos examinar também a natureza das dimensões usadas nos problemas.

AS DIMENSÕES EM TAREFAS DE PROPORÇÃO

Na literatura na área, verificamos que as dimensões (quantidades discretas ou contínuas) em uma tarefa de proporção podem ser: *complementares e não-complementares.*

Dimensões Complementares

Estas referem-se a partes complementares de um todo. São assim chamadas porque uma vez que uma das quantidades aumenta a outra diminui e vice-versa. Nas tarefas de proporção com dimensões complementares, o sujeito tem que lidar com relações entre duas (ou mais) parles de um mesmo todo, como no estudo de Piaget e Inhelder (1975) com cartas com e sem cruzes em um monte de cartas, onde as partes (cartas com e sem cruzes) se complementam para formar um mesmo todo (monte de cartas).

Dimensões Não-Complementares

Estas referem-se a unidades distintas que não fazem parte de um mesmo todo, como em problemas de velocidade em que as dimensões não-complementares são distância e tempo; na tarefa de equilíbrio da balança (Inhelder & Piaget, 1958; Siegler, 1976; 1978) que exige a coordenação entre distância e peso. Dimensões não-complementares foram usadas em diversos estudos (e.g., Siegler, 1976; Wilkening & Anderson, 1990; Karplus & Peterson, 1970; Karplus & Karplus, 1972; Tourniaire, 1986), alguns deles sobre o uso de estratégias aditivas na solução de problemas de proporção (e.g., Hart, 1981, 1984; Carraher, Carraher, Schlieman & Ruiz, 1986; Carraher, Carraher & Schliemann, 1986; Carraher, 1986).

As relações estabelecidas entre as dimensões em um problema de proporção dizem respeito às relações de primeira-ordem cuja natureza e relevância para o pensamento proporcional serão analisadas a seguir.

AS RELAÇÕES DE PRIMEIRA-ORDEM EM PROBLEMAS DE PROPORÇÃO

As relações de primeira-ordem podem ser estabelecidas em duas direções: (1) entre valores de um mesmo par (e.g., A:B e C:D); ou (2) entre o primeiro valor de cada par (A:C) e entre o segundo valor de cada par (B:D). Estas duas formas de lidar com as relações de primeira-ordem foram cuidadosamente examinadas por Noelting (1980a; 1980b) e consideradas estratégias na solução de problemas de proporção. A direção (1), corresponde a uma estratégia *Within* (A:B e C:D); e a direção (2) é uma estratégia *Between* (A:C e B:D).

Essas estratégias refletem a maneira como o sujeito estabelece as relações de primeira-ordem. Entretanto, pouca atenção tem sido dada ao papel desempenhado por essas relações na solução de problemas de proporção. A abordagem de Piaget é um exemplo disso, onde o esquema de proporcionalidade é fundamentalmente analisado à luz das relações de segunda-ordem.

Independentemente da ênfase (se nas relações de primeira ou de segunda-ordem), pesquisas mostram que tarefas de proporção são particularmente difíceis para crianças. É possível delinear duas possíveis razões para as causas de tal dificuldade. Uma, é que a dificuldade decorre da incapacidade da criança em estabelecer relações de segunda-ordem. Esta é a explicação mais frequentemente adotada e é, sem dúvida, uma possibilidade. Outra razão, entretanto, é que a criança tem dificuldade em estabelecer as relações iniciais de primeira-ordem. Esta segunda possibilidade será aqui considerada.

Assim, podemos perguntar o que possivelmente dificulta as relações de primeira-ordem. Para responder a esta questão precisamos analisar a natureza do ponto de partida do pensamento proporcional: *as relações de primeira-ordem.*

A natureza das relações de primeira-ordem: relações parte-parte e relações parte-todo

Nas tarefas de comparação com dimensões complementares as relações de primeira-ordem podem ser estabelecidas através de *relações parte-parte* e de *relações parte-todo.* As primeiras consistem em partes diretamente comparáveis (e.g., número de cartas com cruz e número de cartas sem cruz), enquanto que nas relações parte-todo, a parte e o todo não são diretamente comparáveis, embora tenham que ser simultaneamente considerados (e.g., número de cartas com cruz e número total de cartas no monte).

Mas qual dessas duas relações é a mais fácil? Dentro da teoria piagetiana existem evidências de que as crianças têm dificuldade em estabelecer comparações entre a parte e o todo como demonstram os estudos sobre inclusão de classes (Piaget, 1952; Inhelder& Piaget, 1964).

Observa-se, entretanto, que a maioria das tarefas de proporção leva a criança a tratar as relações de primeira-ordem em termos parte-todo. Podemos citar como exemplos tarefas em que se pergunta à criança qual de dois recipientes é o mais cheio (e.g., Bruner & Kenney, 1966; Siegler & Vago, 1978), ou acerca do sabor de uma bebida (e.g., Noelting, 1976; 1980a; 1980b), ou sobre a probabilidade de conseguir um tipo de conta ou uma carta com cruz (Chapman, 1975; Piaget & Inhelder, 1975). Apesar desta ênfase, alguns estudos envolvem relações de primeira-ordem do tipo parte-parte (e.g., Múller, 1978; 1979; Spinillo, 1987; 1990; Spinillo & Bryant, 1988; 1989; 1990; 1991).

Esta distinção entre relações parte-parte e relações parte-todo é de crucial importância para a abordagem desenvolvida neste artigo. Entretanto, ela se aplica apenas a tarefas com dimensões complementares que consistem em partes de um mesmo todo.

PRINCIPAIS ESTUDOS SOBRE PROPORÇÃO À LUZ DA DISTINÇÃO ENTRE RELAÇÕES PARTE-PARTE E RELAÇÕES PARTE-TODO.

Uma análise dos principais resultados obtidos em alguns estudos demonstra que bem antes do período das operações formais as crianças são capazes de estabelecer relações de segunda-ordem em alguns problemas de proporção quando estabelecem as relações de primeira-ordem em termos parte-parte. Esta análise sugere que as dificuldades experimentadas decorrem de dificuldades em lidar com as relações de primeira-ordem, mais do que com as relações de segunda-ordem apenas.

Piaget e colaboradores (Piaget & Inhelder, 1975; Inhelder & Piaget, 1958; Piaget, Grize, Szeminska & Bang, 1968) realizaram diversos estudos sobre o desenvolvimento do esquema de proporcionalidade, explorando tarefas com dimensões complementares (problemas de comparação) e dimensões não-complementares (problemas de comparação - equilíbrio da balança e projeção de sombras; e de incógnita - experimento das enguias).

No primeiro grupo de tarefas podemos citar a tarefa de quantificação de probabilidades (Piaget & Inhelder, 1975), onde a criança tinha que estabelecer relações de primeira-ordem através de relações parte-todo, comparando o número de casos favoráveis (cartas com cruz) com o número de possibilidades (número total de cartas em cada monte). As relações de segunda-ordem envolviam comparações entre duas relações de primeira-ordem parte-todo.

Em algumas passagens desta tarefa, as respostas das crianças mostram que as relações de primeira-ordem eram tratadas como problemas de razão (parte-parte: cruz vs sem cruz) e não como problemas de fração (parte-todo: cruz vs total de cartas no monte). Exemplos:

> 2/3 vs. 1/2 (Estagio IIA) - "Este aqui (2/3); ganharei duas vezes e perco apenas uma. Lá (1/2), ganharei uma e perco uma." (p.152)
>
> 1/2 vs. 2/4 (Estagio IIB) - "Nós dois. As chances e os riscos são os mesmos. É o mesmo." (p.155)

A desproporção no primeiro exemplo e a proporcionalidade no segundo, foram reconhecidas a partir de comparações parte-parte (casos favoráveis e não-favoráveis) sem referência às relações parte-todo (casos favoráveis e casos possíveis). Isto sugere que algumas tarefas de proporção podem ser adequadamente resolvidas através de relações parte-parte.

Piaget extraiu diversas conclusões acerca das dificuldades apresentadas pelas crianças. A principal delas é que as dificuldades se devem, basicamente, à incapacidade em estabelecer relações de segunda-ordem, que são o cerne do pensamento proporcional. De modo geral, a teoria de Piaget evidencia que a grande mudança no desenvolvimento do esquema de proporcionalidade ocorre de uma não-compreensão para a compreensão das relações de segunda-ordem.

Apesar da ênfase nas relações de segunda-ordem, Piaget também acredita que alguma dificuldade poderia decorrer das relações de primeira-ordem que envolviam comparações parte-todo. Sua análise, entretanto, não vai além desta menção (Piaget & Inhelder, 1975, p. 156-157) e esta segunda possibilidade não é claramente abordada em sua teoria.

A pergunta crucial que se coloca é: seriam as dificuldades das crianças com as relações de segunda-ordem ou com as relações iniciais de primeira-ordem?

Se a dificuldade reside nas relações parte-todo, então o conceito de proporção concerne às operações concretas, uma vez que tais relações podem ser estabelecidas por crianças que dominem o conceito de inclusão de classe que é uma aquisição própria do período das operações concretas. Se, no entanto, a dificuldade reside nas relações de segunda-ordem, então proporção é uma aquisição do período das operações formais.

Concordamos com Piaget quanto às dificuldades que a criança tem com as comparações parte-todo nas relações de primeira-ordem; mas discordamos dele quanto à ênfase na dificuldade com as relações de segunda-ordem. Seriam as crianças, ainda no período das operações concretas, capazes de estabelecer relações de segunda-ordem quando as relações de primeira-ordem são acessíveis a sua compreensão, como por exemplo relações do tipo parte-parte?

A idéia de que as dificuldades da criança com proporção não decorrem apenas com as relações de segunda-ordem, mas com as de primeira-ordem foi considerada por Brown e Muller (1976) e por Spinillo e Bryant (1991).

De acordo com Brown e Muller (1976) a dificuldade pode não ser devido as razões postuladas por Piaget, mas decorrer da inabilidade da criança em estabelecer as relações de primeira-ordem. Apesar de não analisarem as razões da dificuldade com as relações de primeira-ordem (como o fizeram Spinillo e Bryant, 1991), Brown e Muller alertaram para o importante papel desempenhado por estas relações no pensamento proporcional. Tal análise está em acordo com nossas críticas sobre a ambiguidade da posição de Piaget acerca das dificuldades com problemas de proporção.

Bruner e Kenney (1966) investigaram o desenvolvimento da noção de proporcionalidade em crianças de 5 a 11 anos. A tarefa consistia em determinar qual, dentre dois recipientes (em tamanhos diversos e com quantidades diferentes de água) era o mais cheio ou se ambos estavam igualmente cheios. Justificativas eram solicitadas em cada item.

Diversas comparações entre pares de recipientes foram exploradas. Em geral, os itens que envolviam a comparação entre recipientes de alturas e diâmetro diferentes (exemplo: um alto e fino vs um baixo e largo) cheios de água até a metade eram os mais difíceis; enquanto que os itens mais fáceis eram aqueles em que os dois recipientes eram exatamente iguais com quantidades diferentes de água.

Os resultados mostraram que as crianças mais novas consideram em seus julgamentos apenas um atributo por vez (a quantidade de água); enquanto as mais velhas atentavam para a importância dos dois atributos (espaço cheio e vazio). Só por volta dos 11 anos é que relacionavam ambos os atributos a uma terceira variável: o volume do recipiente. De acordo com os autores, apenas quando essas três variáveis estão relacionadas é que podemos dizer que o conceito de proporção foi adquirido. Neste caso a criança considera o volume de água e o espaço vazio em relação ao volume total do recipiente.

Importante salientar que esta tarefa envolvia relações de primeira-ordem do tipo parte-todo (água/espaço vazio vs. volume total do recipiente). De acordo com nossa análise, as dificuldades decorriam da impossibilidade em lidar com tais tipos de relações de primeira-ordem.

Poderíamos supor, por exemplo, que os difíceis itens Tipo I seriam mais facilmente resolvidos caso a criança adotasse relações parte-parte ao invés de parte-todo nas relações de primeira-ordem. Provavelmente a equivalência entre dois recipientes poderia ser reconhecida simplesmente considerando que ambos continham 'metade de água' e 'metade de espaço vazio'. Neste caso, itens Tipo I e Tipo IV apresentariam o mesmo grau de complexidade, e o tamanho absoluto dos recipientes seria irrelevante uma vez que a criança poderia estabelecer comparações parte-parte.

Subjacente à análise das respostas das crianças e ao conceito de proporção adotado por Bruner e Kenney, encontra-se uma ênfase nas relações de segunda-ordem do tipo parte-todo.

Este experimento é similar à tarefa de probabilidade de Piaget e Inhelder (1975), onde o volume de água corresponde às cartas com cruz, o espaço vazio às cartas sem cruz, e o volume total dos recipientes corresponde ao número total de cartas em cada monte. Em ambas as tarefas as relações de primeira-ordem podem ser estabelecidas através de: (1) relações parte-todo (cartas com cruz vs. número total de cartas em cada monte; e volume de água vs. volume total do recipiente); ou através de (2) relações parte-parte (cartas com cruz vs. cartas sem cruz; e volume de água vs. espaço vazio). Nas duas tarefas, entretanto, a criança era solicitada a estabelecer as difíceis comparações parte-todo nas relações de primeira-ordem. Podemos argumentar que as dificuldades se deviam às complexas relações de primeira-ordem (parte-todo) e não necessariamente à incapacidade em estabelecer relações de segunda-ordem, possibilidade esta não considerada nesses estudos.

Noelting (1976, 1980a, 1980b) investigou o desenvolvimento do conceito de proporção em crianças de 3 a 16 anos, através de um experimento conhecido como a *Tarefa do Suco de Laranja* que consistia em determinar qual dentre duas bebidas, preparadas com copos de água e de suco de laranja, tinha um gosto mais forte de laranja ou se o sabor era igual nas duas. Justificativas foram solicitadas.

Diversos pares de bebidas (razões) foram comparados. O primeiro termo de cada par referia-se ao número de copos com suco de laranja e o segundo ao número de copos com água (exemplos: 4:1 vs. 1:4; 1:2 vs. 1:5; 2:1 vs. 3:3). Os sujeitos foram agrupados em diferentes estágios que são descritos e exemplificados a seguir (Noelting, 1980a):

Nos **Estágios IA** (idade de acesso 3a 6m) e **IB** (idade de acesso 6a 4m) a criança tende a considerar apenas a quantidade de copos com suco de laranja. Exemplo:

> (4:1 vs. 1:4)-(Escolha: 4:1) "Porque um tem 4 copos de suco e o outro tem um só." (p. 236)
>
> (2:1 vs. 3:3) - (Escolha: 2:1) "No lado direito tem a mesma quantidade de água e de suco, enquanto que no lado esquerdo tem mais suco do que água." (p. 240)

Nos **Estágios** HA (idade de acesso 8a 1m) e **IIB** (idade de acesso 10a 5m), descobre a equivalência mesmo quando as razões diferem em quantidade. Exemplos:

> (2:2 vs. 3:3) - "Nos dois existe a mesma quantidade de água e de suco." (p. 240) (HA).
>
> (4:2 vs. 2:1) - "Nos dois tem o dobro de água do que tem de suco (p. 240) (IIB).

Nos **Estágios IIIA** (idade de acesso 12a 2m) e **IIIB** (idade de acesso 15a 10m) resolve itens complexos. Exemplos:

> (1:3 vs. 2:5) - (Escolha: 2:5) "Tem dois copos e meio de água para um copo de suco, e no outro tem três copos de água para um de suco." (p.246) (IIIA)
>
> (5:2 vs. 7:3) - (Escolha: 5:2) "Tem menos água para cada copo de suco do que no outro lado." (p.247) (IIIB)

A principal conclusão foi que até os 10 anos (Estágio IIB) as crianças não mostram uma compreensão efetiva de proporção.

Comentários precisam ser feitos acerca da performance das crianças. Primeiro, parece pertinente analisar como a criança estabelece as relações de primeira-ordem.

Neste estudo, estas podiam ser estabelecidas tanto através de: (1) *relações parte-parte* entre as duas bebidas (suco-suco ou água-água) ou em cada bebida (suco-água); (2) *relações parte-todo* - número de copos de suco vs. número total de copos em cada bebida. Nos protocolos apresentados por Noelting (1980a; 1980b) verifica-se que já no Estágio IC (7a) as crianças adequadamente solucionam alguns itens, adotando relações simples como 'mais suco do que água' e 'menos suco do que água', evidenciando o uso de comparações parte-parte (suco-água) nas relações de primeira-ordem.

Segundo, há indicadores de que as crianças estabeleciam relações de segunda-ordem. Isto ocorre quando: (a) uma das bebidas tem 'mais suco do que água' e a outra tem 'menos suco do que água', escolhendo a bebida que tem 'mais suco do que água'; e (b) uma ou ambas as bebidas tem 'metade água e metade suco'. Assim, podemos dizer que desde os 7 anos (Estágio IC) é possível estabelecer relações de segunda-ordem usando comparações parte-parte (suco: água) nas relações de primeira-ordem (bebidas).

Existem similaridades entre os resultados de Noelting (1980a) e o de Bruner e Kenney (1966), que demonstram que as crianças mais novas tendem a considerar uma variável de cada vez (água ou espaço vazio; água ou suco) e só posteriormente consideram dois atributos simultaneamente. Também mostram que só as crianças mais velhas (no início das operações formais) relacionavam essas variáveis a uma terceira (o todo): número total de copos em cada bebida (Noelting) e volume total do recipiente (Bruner & Kenney).

Seriam as crianças mais bem sucedidas caso tivessem que resolver versões destas tarefas onde as relações de primeira-ordem fossem estabelecidas através de comparações parte-parte?

Múller (1978; 1979) foi o primeiro a investigar empiricamente a conexão entre as relações de primeira e de segunda-ordem.

Em um de seus estudos Múller (1979) examinou o efeito de treinamento na habilidade de crianças (7-10 anos) em fazer julgamentos proporcionais. Um pré-teste foi aplicado a todos os sujeitos que foram a seguir divididos em três grupos: *grupo controle* (sem *feedback ou* explicação); *grupo de feedback* (informações sobre o acerto e erro) e *grupo de explicação (feedback* e explicação sobre os princípios conceituais de suas escolhas). Após estes procedimentos um pós-teste foi aplicado. Não foram encontradas diferenças significativas entre os três grupos no pré-teste. Entretanto, após treinamento, o *grupo de explicação* deu significativamente mais respostas proporcionais que os outros dois grupos. O *grupo de feedback* deu mais respostas proporcionais que o *controle.*

Os resultados demonstram que a partir dos 7 anos as crianças podem ser ensinadas a dar julgamentos proporcionais quando *feedbacke* explicações são fornecidas, e que explicações baseadas no princípio conceituai são mais efetivas do que *feedback* apenas.

Analisando o treinamento com explicação, verifica-se que o experimentador chamou a atenção para as relações de primeira-ordem do tipo parte-parte, tomando-as fáceis para as crianças que, já aos 7 anos estabeleciam as relações de segunda-ordem. Este resultado confirma a idéia de que as dificuldades da criança com proporção residem nas relações de primeira-ordem mais do que nas de segunda-ordem e que julgamentos proporcionais podem ser estabelecidos através de relações parte-parte.

Resultado semelhante foi encontrado por Siegler e Vago (1978), onde crianças de 7 anos usavam Regras de Proporcionalidade após treinamento que também explicitava as relações de primeira-ordem em termos parte-parte.

Tanto o estudo de Múller (1979) como o de Siegler e Vago (1978) apontam para a existência de noções sobre proporção em um período anterior ao das operações formais e que as relações de primeira-ordem do tipo parte-parte facilitam o aparecimento de respostas proporcionais em crianças.

A perspectiva de Múller difere daquela de Piaget ao afirmar que a criança possui noções sobre proporção, podendo ser ensinada a fazer julgamentos proporcionais quando o princípio subjacente ao conceito é focalizado. Difere ainda, ao enfatizar o importante papel das relações de primeira-ordem na solução de problemas de proporção. Diferentemente de Piaget que enfatiza a quantificação numérica, Múller salienta a relevância das habilidades perceptuais no início do desenvolvimento deste conceito, posição esta que se aproxima da perspectiva de Bryant (1974) quanto à importância da percepção no desenvolvimento e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Recentemente uma série de estudos foi conduzida acerca do desenvolvimento do conceito de proporções em crianças de 4 a 8 anos de idade (Spinillo, 1987; 1990; Spinillo & Bryant, 1988; 1989; 1990; 1991), onde foram explorados julgamentos parte-parte nas relações de primeira-ordem em tarefas não-numéricas.

Em um desses estudos (Spinillo & Bryant, 1991), o experimentador mostrava à criança duas caixas divididas em duas partes iguais ou diferentes: uma azul e outra branca; e um pequeno cartão também dividido em partes azul e branca (iguais ou diferentes) (Figura 1). A criança era solicitada a dizer qual das duas caixas estava representada no cartão, justificando suas escolhas. As justificativas foram classificadas em uma escala ordinal que refletia diferentes níveis de compreensão quanto ao conceito de proporção.

Nesta tarefa as crianças estabeleciam relações de segunda-ordem, baseando seus julgamentos em relações de primeira-ordem de natureza parte-parte (azul vs. branco) sem a necessidade de relacionar a parte azul com a caixa toda (ou cartão todo).

Três experimentos foram conduzidos nesta investigação. O *Experimento 1* (Figura 1) envolvia comparações entre caixas onde uma tinha 'mais azul que branco' (5/8 azul) e a outra 'mais branco que azul' (3/8 azul) - *Comparação Atravessa Metade.* Em outras comparações ambas as caixas tinham 'mais azul que branco' (5/8 azul vs. 7/8 azul) ou ambas tinham 'menos azul que branco' (1/8 azul vs. 3/8 azul) - *Comparação Não-Atravessa Metade.*

As *Comparações Atravessa Metade* eram muito mais fáceis do que as que *Não-Atravessa Metade.* Desde os 6 anos foram encontradas justificativas proporcionais. As crianças de 6 anos forneciam apenas um tipo de justificativa proporcional, enquanto as de 7 anos forneciam dois tipos, os quais variavam em função do tipo de comparação entre as razões (se atravessavam ou não atravessavam a metade).

Resultado semelhante foi observado no *Experimento 2* que explorou *Comparação Não-Atravessa Metade* (e. g., 1/8 vs. 3/8 e 5/8 vs. 7/8) e *Comparações Metade* (e.g., 2/8 azul vs. 4/8 azul; 4/8 azul vs. 6/8 azul).

Novamente as crianças tiveram dificuldades com *Comparações Não-Atravessa Metade,* resolvendo com sucesso *Comparações Metade.* Em ambos os estudos as

Estes experimentos mostram que já aos 6 anos as crianças estabelecem relações de segunda-ordem quando as relações de primeira-ordem envolvem comparações parte-parte e que o referencial 'metade' é uma estratégia que a criança usa para fazer julgamentos proporcionais. De maneira geral, os resultados dessas investigações revelaram uma progressão quanto ao desenvolvimento do conceito de proporção:

(1) aos de 4-5 anos as crianças não conseguem estabelecer relações entre relações mesmo quando as relações de primeira-ordem são fáceis. Elas compreendem as relações de primeira-ordem mas não aplicam estas relações a julgamentos proporcionais;

(2) aos 6 anos estabelecem relações entre relações. Esta habilidade, entretanto, emerge de maneira global: as crianças fornecem um mesmo tipo de julgamento proporcional para diferentes tipos de comparações entre razões; e

(3) aos 7-8 anos as crianças adotam julgamentos proporcionais mais específicos que variam em função dos diferentes tipos de comparações entre razões. Isto sugere um pensamento proporcional mais elaborado do que aos 6 anos.

Os resultados demonstram que a causa das dificuldades reside mais nas relações de primeira-ordem do que nas de segunda-ordem. Quando as relações de primeira-ordem são fáceis (parte-parte) a criança estrutura as relações de segunda-ordem.

DISCUSSÃO

A partir do exposto neste artigo, é possível extraírem-se conclusões relevantes quanto ao conceito de proporção; quanto à importância das relações de primeira-ordem e quanto à causa das dificuldades das crianças com problemas de proporção.

Apesar de julgamentos proporcionais encontrarem-se fortemente associados às relações parte-todo, estes podem ser estabelecidos através de relações parte-parte que são mais fáceis. Maior ênfase precisa ser dada à natureza das relações de primeira-ordem para uma compreensão das causas das dificuldades que parecem estar associadas a dificuldades com as relações de primeira-ordem e não apenas com as de segunda-ordem. Esta nova forma de encarar as causas dessas dificuldades promove um nível de reflexão bem diferente daquele tradicionalmente adotado pela literatura, levando-nos a questionar se o conceito de proporção é, de fato, uma aquisição exclusiva das operações formais. Implicações diversas podem ser extraídas em função desta linha de argumentação.

Implicações Educacionais

Os estudos de treinamentos conduzidos por Müller (1979) e por Siegler e Vago (1978) demonstram que as crianças a partir de 7 anos podem ser ensinadas a fazer

3 A importância do referencial 'metade' em julgamentos proporcionais em crianças é tratada em detalhes por Spinillo (1992).

julgamentos proporcionais quando os treinamentos favorecem a compreensão do princípio conceituai subjacente às respostas proporcionais. Esses resultados tem fortes implicações educacionais, pois indicam que nesta idade a criança seria capaz de compreender proporções. Em nossas escolas, entretanto, o ensino de proporção ocorre por volta dos 11-12 anos, enfatizando o uso do algoritmo da *Regra de Três.* Caberia nos questionarmos se crianças mais novas não se beneficiariam da instrução sobre proporção se fossem oferecidas experiências perceptuais diversas. Nestas experiências a criança exploraria situações em que tivesse que reconhecer e refletir acerca da equivalência estrutural entre duas quantidades representadas em tamanhos e formas diferentes. Brink e Streefland (1978) apresentam exemplos de situações no contexto de sala de aula com crianças entre 6-8 anos de idade, demonstrando que razão e proporção podem ser ensinadas a crianças dessa faixa etária.

Poderíamos ainda supor que o ensino introdutório sobre proporção deveria enfatizar a distinção entre relações de primeira e de segunda-ordem, sendo exploradas tarefas com dimensões complementares comparadas em termos parte-parte. Essas relações de primeira-ordem poderiam envolver quantidades 'menor que metade', 'igual a metade' e 'maior que metade', onde o referencial de 'metade' pudesse servir como estratégia para a solução de problemas simples com proporção.

Implicações Metodológicas

Algumas sugestões metodológicas precisam ser consideradas nas investigações sobre proporção em crianças. Primeiro, o paradigma experimental usado por Spinillo e Bryant (1991) e por Muller (1978; 1979) parece ser um recurso metodológico valioso. O fato da criança ter que escolher a alternativa que combina com um modelo evita que as relações de primeira-ordem sejam tratadas exclusivamente em termos parte-todo; como ocorre nas tarefas de Piaget, Bruner e Kenney e Noelting. As discussões e evidências apresentadas neste artigo levam a predição de que as crianças seriam mais bem sucedidas se pudessem resolver problemas de proporção com base em relações de primeira-ordem que envolvessem relações parte-parte (razão) e não parte-todo (fração).

Segundo, menor ênfase deveria ser dada às quantificações numéricas, principalmente quando se trata de crianças que ainda não dominam habilidades de cálculos. Tarefas não-numéricas, como aquelas oferecidas por Muller (1979) e Spinillo e Bryant (1991), podem auxiliar na investigação das noções iniciais que a criança tem sobre proporção.

Apesar dos pontos cruciais discutidos quanto à aquisição e desenvolvimento do conceito de proporção, muito ainda precisa ser investigado. Pesquisas poderiam ser conduzidas no sentido de comparar o desempenho de (1) diferentes grupos de crianças resolvendo os mesmos problemas, onde a variável de interesse seria os aspectos cognitivos que influenciam o desempenho; e (2) mesmos sujeitos resolvendo problemas diferentes, onde a variável de interesse seria a estrutura dos problemas. De modo geral, é relevante explorar as noções iniciais que a criança possui sobre proporção, ao invés da frequente ênfase naquilo que ela não pode fazer. Esta abordagem poderia contribuir para uma melhor compreensão sobre como o pensamento proporcional se desenvolve.

REFERÊNCIAS

Brink, J. van den & Streefland, L. (1978). Young children (6-8) ratio and proportion. *Proceedings of the 2nd. International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Osnabruck.

Brown, G. & Müller, D.J. (1976). Studies investigating the development of the concept of proportion. Em S. Modgil & G. Modgil (Eds.), *Piagetian research: Compilation and commentary, Vol. 3* (pp. 66-67). Windsor: NFER-Nelson Publishing Company.

Bruner, J.S. & Kenney, H. (1966). On relational concepts. Em J.S. Bruner; R.R. Olver & P.M. Greenfield (Eds.), *Studies in cognitive growth* (pp. 168-182). New York: John Willey & Sons.

Bryant, P.E. (1974). *Perception and understanding in young children: An experimental approach.* London: Methuen.

Carraher, T.N. (1986). From drawings to buildings; working with mathematical scales. *International Journal of Behavioral Development, 9,* 527-544.

Carraher, T.N.; Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática, III: Desenvolvimento cognitivo e aprendizagem. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos,* 67(157), 586-602.

Carraher, T.N.; Carraher, D.W.; Schliemann, A.D. & Ruiz, E.L. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática, I: Quantidades medidas por razões. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos,* 67(155), 93-107.

Chapman, R. (1975). The development ofchildren's understanding of proportions. *Child Development, 46,* 141-148.

Hart, K.M. (1981). Ratio and proportions. Em K.M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London: John Murray.

Hart, K.M. (1984). *Ratios: Childrer's strategies and errors.* Windsor: NFER-Nelson Publishing Company.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* London: Routledge and Kegan Paul.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1964). *The early growth of logicin the child.* New York: Harper.

Karplus, R. & Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. *School-Science and Mathematics,* 70 (9), 813-820.

Karplus, R. & Karplus, E.F. (1972). Intellectual development beyond elementary school III: Ratio, a longitudinal survey. *School-Science and Mathematics, 72(3),* 813-820.

Karplus, R.; Pulos, S. & Stage, E.K. (1983). Proportional reasoning in early adolescents. Em R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Em J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Reasearch agenda for mathematics education. Number, concepts and operations in the middle grades. Vol.2* (pp. 93-118). Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics.

Müller, D.J. (1978). ChildrerTs concepts of proportion: An investigation into the claims of Bryant & Piaget. *British Journal of Educational Psychology, 48,* 29-35

Múller, D.J. (1979). Perceptual reasoning and proportion. *Mathematics Teaching, 87,* 20-22.

Noelting, R. (1976). Stages and mechanisms in the development of the concept of proportion in children and adolescents. Em M.A. Poulsen e colaboradores. (Eds.), *Piagetian theory and the helping professions: 5th Annual Conference.* Los Angeles, California.

Noelting, R. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Diff erentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11,*217-253.

Noelting, R. (1980b). The development of proportional reasonig and the ratio concept Part II - Problem-structure at sucessive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 331-363.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number.* London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* New York: W.Norton.

Piaget, J., Grize, J.B., Szeminska, A. & Bang, V. (1968). *Epistemologie et psichologie de la fonction.* Paris: Presses Universitaires de France.

Siegler, R.S. (1976). Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology, 8,* 481-520.

Siegler, R.S. (1978). The origin of scientific reasoning. Em R.S. Siegler (Ed.) *Children's thinking: What develops?* (pp. 109-149). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegler, R.S. & Vago, S. (1978). The development of proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology, 25,* 371-395,

Spinillo, A.G. (1987). The development of proportional reasoning in young children. Trabalho apresentado e publicado nos *Resumos da 15a. Annual Conference of the British Psychological Society - Developmental Section,* York, U.K.

Spinillo, A.G. (1990). *The development of the concept of proportion in young children.* Tese de Doutorado não publicada. University of Oxford, Oxford, U.K.

Spinillo, A.G. (1992). A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 8(3),* 305-317.

Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1988). The importance of 'half in children's proportional judgements. 3rd. European Conference on Developmental Psychology, (Resumos). Budapest, Hungary.

Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1989). The initial understanding of ratio and proportion. 13th. *International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (Resumos) Paris, France.

Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1990). Ratio and proportion: Judging discrete and continuous quantities. 4th *European Conference on Developmental Psychology* (Resumos). Stirling, U.K.

Spinillo, A.G. & Bryant, P.E. (1991). Children's proportional judgements: The importance of 'half. *Child Development,* 62, 427-440.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics,* 77,401-412.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,*181 -204.

Wilkening, F. & Anderson, N.H. (1990). Representation and diagnosis of knowledge structures in developmental psychology. Em N.H. Anderson (Ed.), *Contributions to information integration theory* (pp. 1-30). Hillsdale, N.J.: Lawrence **Erlbaum** Associates.

Recebido em 20.06.1991

Aceito em 30.09.1993