A IMPORTÂNCIA DO REFERENCIAL DE "METADE" E O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE PROPORÇÃO[1]

Alina Galvão Spinillo
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO - O presente artigo versa sobre a importância do referencial de "metade" na compreensão inicial da criança sobre proporções. O desempenho de crianças é analisado em diversas investigações documentadas na literatura, revelando que o referencial de "metade" tem sido estratégia frequente em julgamentos sobre proporção. Tal fato, entretanto, tem passado desapercebido pela maioria dos pesquisadores e só recentemente é que este tópico tem sido explorado (Spinillo, 1987, 1990; Spinillo & Bryant, 1989,1990,1991). O uso dos limites de "metade" como estratégia para determinar as similaridades e dissimilaridades estruturais entre razões é ainda relacionado ao uso de códigos relativos e aos resultados encontrados em estudos na área de categorias perceptuais. Implicações para pesquisas futuras são sugeridas para se testar a extensão e aplicabilidade desta estratégia em problemas de proporção.

Palavras-chave: proporção, desenvolvimento, referencial de metade, estratégia.

THE IMPORTANCE OF "HALF" IN THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF PROPORTION

ABSTRACT - This paper focuses on the importance of "halt" in children's initial understanding of proportion. Children's performance was analised in several well-documented studies and it revealed that "half" is an important and frequent strategy in children's proportional judgements. This issue, however, has been negleted in the literature about proportions, and only recently it has been studied empirically (Spinillo, 1987, 1990; Spinillo & Bryant, 1989, 1990, 1991). The "half" boundary is a strategy

[1] A autora agradece a Peter Bryant do Department of Experimental Psychology, University of Oxford, Inglaterra, por sua inestimável contribuição nas discussões sobre o tema e à CAPES pela bolsa concedida para a realização deste estudo.
Endereço: CFCH - 8° andar, Cidade Universitária, 50739 Recife PE.

that children use to infer the structural similarities and dissimilarities between ratios. This is related to the use of relative codes and also to the results found in categorical perception. Future researches are suggested in order to explore more about the "ha/f" boundary in proportional judgements.

Key-words: Proportion, development, "half" boundary, strategy,

Spinillo (submetido), em recente estudo teórico acerca do desenvolvimento do conceito de proporção, demonstrou que as dificuldades experimentadas pelas crianças na solução de problemas de proporção reside na dificuldade em estruturar as relações de primeira ordem mais do que na impossibilidade em estabelecer as relações de segunda ordem, como postulado por Piaget e colaboradores (Inhelder & Piaget, 1958; Piaget & Inhelder, 1975).

Neste estudo a autora analisa e interpreta o desempenho de crianças em diversas tarefas de proporção à luz da distinção entre as relações de primeira e de segunda ordem, examinando a natureza das relações de primeira ordem em tarefas de proporção que envolvem dimensões complementares.[2] Esta análise revelou que as relações de primeira ordem tanto podem ser estabelecidas através de *comparações parte-parte* domo através de *comparações parte-todo,* e que as crianças são capazes de resolver problemas de proporção quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte.

Entretanto, ficou em aberto a questão de se as crianças são capazes de estruturar relações de segunda ordem sempre que as relações de primeira ordem envolvem relações parte-parte, ou se algumas relações de segunda ordem são difíceis de serem estruturadas mesmo quando as relações de primeira ordem envolvem relações parte-parte.

Como documentado em literatura recente (Spinillo, 1987, 1990; Spinillo & Bryant, 1988, 1989, 1990, 1991) as crianças estabelecem relações de segunda ordem entre algumas relações parte-parte, mas não entre outras. Este aspecto e as razões para isto serão abordados no presente trabalho, bem como a importância do conceito de "metade" na compreensão inicial que a criança tem sobre proporções.

Como proporções requerem comparações entre relações, *é* importante saber que relações as crianças são capazes de estabelecer desde muito cedo.

[2] Dimensões complementares consistem em partes complementares de um mesmo todo. Como exemplo temos a tarefa de quantificação de probabilidades (Piaget & Inhelder, 1975) onde as dimensões complementares são cartas com e sem cruzes em cada monte. Dimensões não-compiementares podem ser exemplificadas na tarefa de equilíbrio da balança (Inhelder & Piaget, 1958) onde peso e distância são dimensões independentes que não consistem em partes de um mesmo todo, referindo-se a unidades diferentes.

A HABILIDADE DAS CRIANÇAS EM ESTABELECER RELAÇÕES E O USO DE CÓDIGOS RELATIVOS

Diversos estudos examinaram a habilidade das crianças em estabelecer relações (e. g., Lawrenson & Bryant, 1972; Wohlwill, 1960, 1963), comparando o desempenho de sujeitos entre 4 e 6 anos em tarefas de discriminação de tamanhos e quantidades através de códigos absolutos e relativos. Os resultados mostraram que as crianças obtiveram um desempenho significativamente melhor nas tarefas que envolviam códigos relativos do que em tarefas que envolviam códigos absolutos. Os resultados desses estudos estão em acordo com a perspectiva de Bryant (1974), demonstrando que julgamentos de tamanhos e de quantidades são inicialmente estabelecidos através de códigos relativos, enquanto que os códigos absolutos só são usados posteriormente. A principal conclusão foi que crianças desde 4 anos compreendem relações simples como "maior/menor do que", sendo capazes de discriminar qual dentre dois tamanhos ou quantidades (desde que números pequenos) é o maior ou o menor, podendo ainda considerar e usar tais valores relativos em tarefas subsequentes.

Estes resultados sugerem que as crianças podem fazer julgamentos proporcionais entre razões quando as relações de primeira ordem envolvem relações simples como "maior/menor do que", "igual a".

DIFERENTES NÍVEIS DE COMPLEXIDADE DAS COMPARAÇÕES ENTRE RELAÇÕES PARTE-PARTE

Proporção requer estruturar relações entre relações (relações de segunda ordem) que envolvem comparações entre duas (ou mais) relações de primeira ordem. As relações de primeira ordem podem ser parte-todo ou parte-parte,[3] sendo essas últimas mais fáceis que as primeiras. Comparações entre duas relações parte-parte podem ser de dois tipos: iguais ou diferentes.

Tomemos como exemplo uma tarefa de proporção em que as dimensões (A e B) são complementares e representadas não-numericamente. A dimensão A corresponde à parte pintada em azul de um retângulo e a dimensão B corresponde à parte pintada em branco deste mesmo retângulo. A criança é solicitada a comparar dois retângulos que variam apenas quanto à razão A:B, para então, determinar qual deles está representado em um pequeno cartão que contém a mesma razão A:B que um dos retângulos. As comparações iniciais estabelecidas entre A e B em cada retângulo são as relações de primeira ordem ($A>B$ - azul maior que branco; $A<B$ - azul menor que branco; $A=B$ - azul igual a branco). Diversas situações podem ser apresentadas à criança: (1) um retângulo tem $A>B$ e o outro $A<B$; (2) um retângulo tem $A>B$ (ou

[3] Relações parte-todo consistem em comparações entre uma classe e uma de suas subclasses, como na tarefa piagetiana de inclusão de classes (rosas x flores). Em termos matemáticos referem-se a fração. Relações parte-parte envolvem comparações entre duas subclasses (rosas x margaridas) que juntas formam a classe das flores. Em termos matemáticos referem-se a razão.

A<B) e o outro A'=B'; (3) um retângulo tem A>B e o outro A'>B'; (4) um retângulo tem A<B e o outro A'<B'.

As duas primeiras comparações (A>B vs. A'<B' e A>B vs. A'=B') são fáceis de ser estabelecidas porque envolvem duas relações de primeira ordem diferentes. Neste caso, a criança seria capaz de estruturar as relações de sepunda ordem quando as relações de primeira ordem são diferentes. Entretanto, esta mesma criança pode ter dificuldades em estabelecer comparações entre duas relações de primeira ordem iguais, como aquelas apresentadas nos exemplos (3) e (4) acima descritos (A>B vs. A'>B' ou A<B vs. A'<B'). A dificu'dade decorreria do fato de que a relação entre as duas quantidades (A e B) seria a mesma nas duas relações de primeira ordem.

Assim, podemos supor que existem diferentes níveis de complexidade quanto ao estabelecimento de relações de segunda ordem, mesmo quando as relações de primeira ordem envolvem comparações parte-parte. Esta complexidade depende de se as relações de primeira ordem são iguais ou diferentes.

Isto ocorre porque entre relações de primeira ordem diferentes, a criança pode fazer julgamentos proporcionais usando códigos relativos (e. g., "maior do que" vs. "menor do que", "maior/menor do que" vs. "igual a"): enquanto que entre relações de primeira ordem semelhantes a criança precisa usar códigos absolutos que são mais sofisticados que os códigos relativos. Os códigos relativos nas comparações do tipo A>B vs. A'>B' são insuficientes, pois apenas através dos códigos absolutos (o quanto A é maior que B em cada retângulo) é que a criança poderá solucionar a tarefa. Como demonstrado em diversos estudos (Bryant, 1974; Lawrenson & Bryant, 1972; Wohlwill, 1960, 1963), as crianças compreendem e discriminam mais facilmente relações entre quantidades usando códigos relativos do que quando têm que usar códigos absolutos.

Outro aspecto precisa ser mencionado acerca das relações de primeira ordem estabelecidas através de relações parte-parte. No caso (1) um dos retângulos tem, por exemplo, "menos que metade" em azul (A<B) e o outro tem "mais que metade" em azul (A'>B'). No caso (2) um dos retângulos tem "mais/menos que metade" em azul (A>B ou A<B) e o outro "metade azul e metade branco" (A'=B'). No caso (3) ambos os retângulos têm "mais que metade" em azul (A>B vs. A'>B') e no caso (4) ambos os retângulos têm "menos que metade" em azul (A<B vs. A'<B'). Abordando a questão desta forma, é possível verificar que no caso (1) as comparações entre as relações atravessam o limite do referencial de "metade"; no caso (2) as comparações explicitamente envolvem este referencial. Entretanto, nos casos (3) e (4), as comparações ocorrem dentro dos limites do referencial de "metade".

Evidencia-se assim, a importância dos limites do referencial de "metade" em julgamentos sobre proporção. As crianças fazem julgamentos sobre proporção quando as comparações atravessam os limites de "metade" (e. g., "maior do que metade" vs. "menor do que metade") ou explicitamente envolvem este referencial (e. g., "maior/menor do que metade" vs. "igual a metade"); mas têm dificuldade quando as comparações não atravessam este referencial (e. g., "maior do que" vs. "maior do que", ou "menor do que" vs. "menor do que").

Essas afirmações, no entanto, não são simples especulações, pois se baseiam em evidências empíricas que consistentemente apontam para a relevância do referencial de "metade" como estratégia que a criança usa para estabelecer julgamentos proporcionais, como veremos a seguir.

A IMPORTÂNCIA DO REFERENCIAL DE "METADE" EM JULGAMENTOS SOBRE PROPORÇÕES: ALGUMAS EVIDÊNCIAS

Dois aspectos precisam ser considerados quanto ao uso deste referencial por parte de crianças. Um é que as crianças podem usar os limites entre "mais que metade", "menos que metade" e "igual a metade" ao comparar dimensões complementares nas relações de primeira ordem. O outro é que as crianças tratam "metade" inicialmente em termos de relações parte-parte antes de fazê-lo em termos de relações parte-todo. Existe na literatura evidências que apoiam esses dois aspectos.

O Uso dos Limites do Referencial de "Metade"

O uso do referencial "metade" em julgamentos sobre Droporção tem sido documentado na literatura de maneira indireta (Noelting, 1980a, b; Siegler & Vago, 1978) e de forma mais explícita (Spinillo, 1987, 1990; Spinillo & Bryant$_t$ 1991 e Woodruff & Premack, 1981) em diversas investigações.

Siegler e Vago (1978) utilizaram uma versão da tarefa de Bruner e Kenney (1966) em uma série de experimentos. Nesta versão os recipientes apresentavam 1/4, 1/2, 3/4 de água e cheios até o topo. Em um desses experimentos (Experimento 6) as crianças (7 e 10 anos) foram ensinadas a empregar corretamente os termos "quarto", "metade", "três quartos" e "completamente cheio" e a usá-los em comparações entre os copos (pp. 390-391). Durante o treinamento o experimentador enfatizava a relevância do espaço vazio e do espaço com água em cada copo, explorando ainda expressões como: "menos que metade", "mais que metade", "metade" e "todo cheio". O pós-teste indicou que após o treinamento 80 e 90 por cento das explicações das crianças de *7 e de* 10 anos de idade, respectivamente, envolviam julgamentos proporcionais adequados, enquanto que no pré-teste anterior ao procedimento as crianças de 7 anos não emitiam julgamentos proporcionais e as de 10 anos o faziam raramente. Concluiu-se que a dificuldade em adotar julgamentos proporcionais devia-se a incapacidade em integrar as dimensões (água e espaço vazio) em uma única estratégia e que as crianças de 7 anos podem ser ensinadas a estabelecer relações de segunda ordem.

Dois comentários precisam ser feitos sobre este estudo. Primeiro, é que o uso dos termos "metade" e "mais/menos que metade" pode ter encorajado a criança a tratar as relações de primeira ordem como comparações parte-parte (água e espaço vazio) sem necessitar estabelecer comparações parte-todo (água e volume total do copo) que são mais complexas que as primeiras. Segundo, é que esses termos referem-se ao conceito de "metade", o qual foi usado para estabelecer as relações de primeira ordem. Uma vez lidando com as relações de primeira ordem através do referencial de "metade" não era um problema para a criança estruturar as relações de segunda ordem essenciais para julgamentos proporcionais.

De acordo com Siegler e Vago (1978), as crianças passaram efetivamente a fornecer julgamentos proporcionais porque foram ensinadas a estabelecer relações de segunda ordem. Em nossa perspectiva, entretanto, o que de fato o treinamento fez foi tornar as relações de primeira ordem acessíveis para a criança, que estava agora habilitada a relacionar essas relações entre si (relações de segunda ordem), usando para isso o referencial "metade". O uso deste referencial parece ser uma estratégia relevante na compreensão inicial da criança sobre proporções em tarefas com dimensões complementares. Esta é, sem dúvida, uma nova forma de conceber o pensamento proporcional em crianças.

O uso do referencial de "metade" também foi observado no desempenho das crianças nos estudos de Noelting (1980a, b), onde os sujeitos tinham que determinar qual dentre duas bebidas (feitas de copos de água e de copos de suco de laranja) ti-

Tabela 1 - Frequência ordenada de sucesso na tarefa do Suco de Laranja (baseada nos dados apresentados por Noelting, 1980a; p. 228)

ITEM	COMPOSIÇÃO DOS ITENS	FREQUÊNCIA DE ACERTOS*	TIPO DE COMPARAÇÃO"
2	(4:1 vs. 1:4)	319	T1
4	(1:2 vs. 2:1)	319	71
6	(3:1 vs. 2:2)	319	T2
1	(1:0 vs. 1:1)	311	T2
3	(1:2 vs. 1:5)	307	T3
5	(1:1 vs. 1:2)	305	T?
8	(2:3 vs. 1:1)	295	T2
13	(2:1 vs. 3:3)	291	T2
10	(2:2 vs. 3:4)	287	T2
9	(2:2 vs. 3:3)	251	T2
11	(1:1 vs. 3:3)	244	T2
7	(1:1 vs. 2:2)	231	T2
12	(1:2 vs. 2:4)	186	T3
15	(4:2 vs. 2:1)	156	T3
16	(2:1 vs. 4:3)	141	T3
17	(1:3 vs. 2:5)	131	T3
14	(2:3 vs. 1:2)	107	T3
18	(2:1 vs. 3:2)	88	T3
20	(6:3 vs. 5:2)	87	T3
22	(4:2 vs. 5:3)	71	T3
19	(2:3 vs. 3:4)	65	T3
21	(3:2 vs. 4:3)	59	T3
23	(5:2 vs. 7:3)	51	T3
24	(3:5 vs. 5:8)	0	T3
25	(5:7 vs. 3:5)	0	T3

* Número máximo de acertos = 321

** Tipo 1(T1) -- Atravessando Metade; Tipo 2 (T2) - Metade; e Tipo 3 (T3) - Não atravessa Metade.

nha um gosto mais forte de laranja, ou se o sabor era igual nas duas. As escolhas eram justificadas. Diversas razões entre suco: água foram comparadas (exemplos: 4:1 vs. 1:4; 1:2 vs. 1:5; 2:1 vs.3:3).

A frequência de sucesso em cada item ê apresentada na Tabela 1. Com base na composição dos itens, podemos classificá-los em três tipos de razões suco:água: (1) *comparações que atravessam o referencial "metade"* (e. g., "mais suco que água" vs. "mais água que suco", como nos itens 2 e 4); (2) *comparações que explicitamente envolvem o referencial "metade" (e.* g., "metade de água e metade de suco" em uma das bebidas ou em ambas, como nos itens 5, 6, 7, 8, 9, 11 e 13); (3) *comparações que não atravessam este referencial* (i. e., ambas as bebidas têm "mais suco que água" ou "mais água que suco", como nos itens 15,17, 19, 23, 24 e 25).

A porcentagem de respostas corretas em comparações que atravessam o referencial de "metade" (tipo 1) era muito alta (99,4 por cento), assim como comparações entre razões que explicitamente envolviam "metade" (tipo 2), cuja porcentagem de respostas corretas variava de 72 a 96,7 por cento. Os itens mais difíceis (16 a 48,6 por cento de acertos) consistiam em comparações entre razões que não atravessavam "metade" (tipo 3). Assim, algumas comparações entre razões são mais fáceis que outras, podendo ser resolvidas por crianças desde os 8 anos.

Por exemplo, no Estágio HA[4] (8a 1m) a igualdade ou desigualdade das bebidas era reconhecida com base no número de copos com suco e de copos com água em cada bebida e no referencial de "metade". Exemplos (Noelting, 1980a):

(1:1 vs. 2:2) "Porque na esquerda tem metade suco e metade água, e no outro também metade suco e metade água." (p. 242);

(2:2 vs. 3:4) (Na esquerda tem metade de água e metade de suco e na direita tem mais água que suco." (p. 244);

(1:2 vs. 2:1) "Na direita tem mais suco que água, enquanto na esquerda é o contrário." (p. 239);

(4:2 vs. 2:1) "Nos dois tem metade de água e metade de suco." (p. 240).

Segundo nossa análise as crianças, tanto no estudo de Noelting como no de Sigler & Vago (1978), usavam os limites entre "mais que metade" e "menos que metade" como estratégia para fazer julgamentos de proporção. Entretanto, o uso de "metade" como estratégia em julgamentos proporcionais foi apenas experimentalmente examinado por Spinillo (Spinillo, 1987, 1990; Spinillo & Bryant, 1988, 1989, 1991), em uma série de investigações com crianças entre 4 e 8 anos de idade, onde se testou a hipótese de que "metade" é uma categoria limite importante nos julgamentos iniciais que as crianças fazem sobre proporção.

Nesses estudos o sujeito tinha que escolher entre duas alternativas, aquela que representava o modelo. As alternativas consistiam em duas caixas de madeira com blocos (azuis e brancos) também em madeira. Os blocos eram arranjados de modo a formar uma parte azul (A) e outra branca (B). O modelo era um cartão retanguiar (consideravelmente menor que as caixas) também dividido em partes azul e

[4] Os sujeitos neste estudo foram classificados em estágios quanto à compreensão que apresentavam sobre proporção.

branca. As quantidades de azul exploradas eram: 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8 e 7/8). Justificativas eram solicitadas para a resposta de cada item.

Os resultados claramente revelam que os julgamentos proporcionais entre relações de primeira ordem que atravessam o limite de "metade" (e. g., 3/8 (menos que metade) vs. 5/8 (mais que metade)) e aquelas que explicitamente envolvem o limite de "metade" (e. g., 2/8 (menos que metade) vs. 4/8 (metade) ou 6/8 (mais que metade) vs. 4/8)) são mais fáceis que aqueles entre comparações que não atravessam e nem explicitamente envolvem "metade" (e. g., 3/8 vs. 1/8 ou 5/8 vs.7/8). As justificativas fornecidas confirmaram que as crianças de fato estabeleciam relações de segunda ordem em termos de comparações parte-parte usando o referencial de "metade" em seus julgamentos. Resultado semelhante foi encontrado mesmo quando o tamanho absoluto dos objetos nas alternativas era diferente; e ainda quando a criança tinha que fazer julgamentos proporcionais entre quantidades contínuas e discretas.

A principal conclusão foi que a partir de 6 anos de idade a criança apresenta uma noção sobre proporção e que "metade" é um referencial importante nesses julgamentos iniciais. As justificativas claramente indicaram que as crianças estabeleciam relações de segunda ordem usando este referencial em termos de relação parte-parte, como pode ser exemplificado a seguir:

2/8 vs. 4/8 nas caixas e 2/8 no cartão: "Esse (2/8) é igual a esse (cartão) porque os dois têm menos que metade azul e mais que metade branco. Nesse de cá (4/8) tem metade azul e metade branco."

4/8 vs. 6/8 vs. caixas e 4/8 no cartão: "Metade e metade (cartão): metade e metade (4/8). Neste a quantidade não é mais a mesma porque tem mais que metade azul e menos que metade branco (6/8)."

É possível verificar que o referencial de "metade" é aqui usado como padrão de quantificação e de comparação entre as relações.

A investigação conduzida por Woodruff e Premack (1981) fornece evidências de que chimpanzés também são capazes de fazer julgamentos proporcionais quando o referencial de "metade" está envolvido. Quatro chimpanzés jovens e um adulto tinham que escolher dentre duas alternativas (alimentos e discos de madeira) aquela que combinava com um modelo (recipiente com líquido). Tanto as escolhas como o modelo eram apresentados em diferentes proporções (1/2, 1/4, 3/4 e um objeto todo). O modelo e as alternativas eram completamente diferentes na aparência, mas o modelo era idêntico a uma das alternativas quanto à proporcionalidade que apresentava. As seguintes comparações foram usadas: 1/4 vs. 1/2; 1/2 vs. 3/4 e 3/4 vs. 1.

O desempenho dos chimpanzés jovens foi marcado por escolhas ao acaso; enquanto que as escolhas de Sarah, o chimpanzé adulto, foram corretas em todos os itens. Concluiu-se que apenas Sarah era capaz de combinar os estímulos em termos de proporção. Este resultado sugere a existência de conceitos proporcionais simples em chimpanzés.

De acordo com nossa perspectiva, Sarah discriminou as proporções usando os limites do referencial de "metade" em suas escolhas: "mais que metade" (3/4), "menos que metade" (1/4) e "metade" (1/2). Este é sem dúvida um resultado interessante, pois demonstra que o referencial de "metade" é bastante evidente mesmo entre chimpanzés, e que pode ser usado para discriminar similaridades e dissímilaridades estruturais entre objetos.

As Crianças Tratam "Metade" em Termos Parte-Parte Antes de Fazê-lo em Termos Parte-Todo

O referencial de "metade" pode ser estabelecido tanto em termos de relações parte-parte (razão: "metade azul e metade branco", "mais que metade em azul e menos que metade em branco") como em termos de relações parte-todo (fração: "metade do retângulo tem azul"). Entretanto, existem evidências de que as crianças usam "metade" em termos parte-parte antes de usarem este conceito em termos de parte-todo, como demonstrado por Parrat-Dayan (1982) e por Spinillo (Spinillo, 1990: Spinillo & Bryant, 1991).

Nesta investigação Parrat-Dayan explorou o conceito de metade em crianças de 4 a 12 anos de idade. A tarefa consistia na comparação de quantidade de líquido em recipientes de diferentes formas e tamanhos. Quatro recipientes eram apresentados: *A* e *A',* de mesmo tamanho; *E* que era mais fino e alto que os dois primeiros e L, mais baixo e mais largo que os dois primeiros. Dois outros recipientes (3 e *B)* foram colocados à disposição da criança, caso quisesse usá-los como medida durante a tarefa.

O recipiente *A* continha um líquido vermelho e a criança tinha que encher o recipiente *A'* com um líquido verde na mesma quantidade que *A.* C nível do líquido era marcado no próprio recipiente, e a criança era então solicitada a despejar metade do conteúdo de *A* em *E* e metade de *A'* em *L.* Após este procedimento era solicitada a comparar a quantidade de líquido em *E* e *L,* explicando quanto líquido tinha em cada um, justificando porque o nível de líquido era diferente, uma vez que, eles tinham a mesma quantidade de líquido para beber. Os sujeitos foram classificados em quatro níveis de acordo com a noção de metade que possuíam:

Nível I (4-5 anos) - "Metade" significa uma parte pequena de uma quantidade maior.

Nível II (5-7 anos) - "Metade" é estabelecida em termos de duas partes iguais sem fazer referência ao volume total de líquido no recipiente original. Para obter "metade", a criança igualava a quantidade de líquido nos dois recipientes (e. g., *em A e E* ou em A e L).

Nível III (8-10 anos) - "Metade" é definida em relação ao volume total de líquido nos dois recipientes originais (parte-todo). A criança mencionava a parte (metade) e o todo (volume do líquido nos recipientes originais). O conceito é relacionado ao objeto do qual a "metade" foi extraída.

Nível IV (11 anos em diante) - "Metade" é compreendida em termos parte-todo, e o sujeito reconhece a equivalência das duas frações apesar de diferenças nos níveis de líquido.

Os resultados revelam que entre 5 e 7 anos a criança inicialmente expressa o conceito de "metade" em termos parte-parte e posteriormente (8-10 anos) em termos parte-todo. As crianças mais novas tendiam a fazer comparações diretas entre o líquido nos dois recipientes (E e *L),* tentando igualar um com o outro. As crianças mais velhas, entretanto, tentavam resolver o problema em termos da quantidade total de líquido no recipiente original às vezes, usando *B* e *B'* como medidas. A principal conclusão da autora foi que a criança apresenta diferentes níveis na compreensão do conceito de "metade" ao longo do desenvolvimento.

Dois comentários podem ser feitos a partir dos dados revelados por Parrat-Dayan. Primeiro, é que a idéia de "metade" pode ser estruturada tanto em termos de relação parte-parte como de relação parte-todo. "Metade" pode ser estabelecida sem referência ao todo, apenas em termos de relações entre duas partes complementares. Esta é uma nova perspectiva de se conceber tal conceito. Segundo, o conceito de "metade" parece ser inicialmente compreendido em termos de parte-parte (5-7 anos) antes que seja expresso em termos de uma relação parte-todo (8-10 anos).

Relacionando esses dados a julgamentos proporcionais, podemos supor que as crianças inicialmente usam "metade" em termos parte-parte em seus julgamentos sobre proporções antes mesmo de compreenderem "metade" em termos de relações parte-todo.

Entretanto, não apenas dentro da literatura sobre proporções encontramos evidências quanto ao uso de um referencial, ou categoria limite, que é adotado como estratégia para discriminar quantidades e estímulos. Análogo ao referencial de "metade" existe na literatura sobre categorias perceptuais fenómeno semelhante quanto à percepção de cores e sons por parte de adultos e bebês.

O REFERENCIAL DE METADE COMO UMA CATEGORIA LIMITE E OS ESTUDOS NA ÁREA DE CATEGORIAS PERCEPTUAIS

Existe na literatura na área de *"Categorica! Perception"* um número considerável de estudos (e. g., Eimas, Siqueland, Jusczyk & Vigorito, 1971; Harnad, 1987; Liberman, Harris, Hoffman & Griffith, 1957) que demonstram a existência de categorias limites *("category boundaries")* que permitem a discriminação de estímulos perceptuais, como cores e sons. Estes estudos evidenciam que quando dois estímulos encontram-se dentro dos limites de uma determinada linha imaginária ao longo de um contínuo, eles não são discriminados pelo sujeito (adulto ou criança). Entretanto quando um desses estímulos localiza-se em *um ponto anterior* e o outro estímulo localiza-se em *um ponto posterior* a esta linha imaginária nesse contínuo, o sujeito pode então discriminar os dois estímulos, mesmo que a diferença absoluta entre ambos seja a mesma (i. e., a diferença é a mesma tanto ehtre estímulos localizados dentro do limite como entre aqueles que atravessavam o limite da linha imaginária). Em resumo, a discriminação entre estímulos sonoros ou visuais só é percebida se estes são colocados em lados opostos, atravessando um determinado referencial (e. g., um é menor que a linha limite e o outro maior que ela). Se os estímulos não atravessam este limite (i. e., ambos maior ou menor que este limite) a discriminação não ocorre.

De forma análoga podemos dizer que o mesmo fenómeno ocorre com os limites de "metade", onde duas quantidades "menores que metade" (e.g., 3/8 em azul vs. 1/8 em azul ou 5/8 vs. 7/8) não são proporcionalmente discriminadas visto que não atravessam o referencial de "metade". Entretanto, comparações entre quantidades que atravessam este limite referencial (e. g., 3/8 vs. 5/8) podem ser facilmente discriminadas visto que uma quantidade é "menor que metade" e a outra "maior que metade". Neste exemplo, como na teoria de categorias perceptuais, as quantidades guardam entre si a mesma diferença absoluta (2/8).

Assim, parece que o efeito de categorias limites não se aplica apenas aos fenómenos perceptuais mais simples, e que este efeito pode ser encontrado igualmente em outros domínios. É possível, em certo sentido, integrar os efeitos de categorias perceptuais ao desenvolvimento cognitivo, como quanto ao efeito dos limites de "metade" encontrado nos estudos apresentados neste trabalho. O efeito dos limites de "metade", por exemplo, parece ser uma categoria limite consistente em relação a fenómenos cognitivos, como o conceito de proporção. É relevante salientar que o referencial de "metade" parece ser o primeiro exemplo de uma categoria cognitiva análoga às categorias de caráter sensorial, como afirmado por Spinillo (1990) e Spinillo e Bryant (1991).

DISCUSSÃO

Podemos concluir que o referencial de "metade" consiste em uma categoria limite que desempenha papel crucial na emergência do raciocínio proporcional em crianças. Este referencial pode ser relacionado ao uso de códigos relativos por parte de sujeitos infantis quando comparando quantidades simples e fazendo inferências proporcionais, como apontado por Bryant (1974).

O fato de que crianças emitem julgamentos proporcionais em termos de códigos relativos como "maior do que", "menor do que"e "igual a" sugere que a compreensão inicial sobre o conceito de proporção envolve também habilidades perceptuais e não apenas habilidades de computação numérica.

Pesquisas precisam ser conduzidas para testar a importância deste referencial em diversas tarefas de proporção e em outras áreas do raciocínio matemático em crianças. Spinillo e Bryant (1990) verificaram que crianças entre 6 e 8 anos de idade também usam o referencial de "metade" em julgamentos proporcionais acerca de quantidades numéricas. Entretanto, é necessário saber-se mais acerca da extensão e aplicabilidade desta estratégia em problemas de proporção.

Versões de tarefas de proporção podem ainda ser investigadas, explorando-se os limites "metade", "mais que metade" e "menos que metade" em tarefas como aquelas utilizadas por Bruner e Kenney (1966) e Noelting (1980a, b). A predição é que, como obtido no estudo de Spinillo e Bryant (1991), as crianças se sairiam melhor em comparações entre razões que atravessam a "metade" e que explicitamente envolvem "metade" de que em comparações entre razões que não atravessam este referencial.

Estudos de treinamento também podem ser desenvolvidos para investigar relações causais entre o conceito de "metade" e a aquisição de conceitos proporcionais, fornecendo informações relevantes acerca da capacidade da criança em aprender sobre proporções. Seria interessante investigar as relações causais entre o uso de "metade" em termos parte-parte e o uso de "metade" em termos parte-todo com respeito a julgamentos proporcionais. Neste estudo de intervenção, seria dada à criança experiência concentrada em comparações parte-parte que atravessassem e que explicitamente envolvessem o referencial de "metade" (estudo em andamento).

Muito mais precisa ser explorado acerca desta categoria limite que é, sem dúvide grande relevância para a compreensão da emergência do pensamento proporcional. Entretanto, a descoberta de que são capazes de estruturar relações de segunda ordem usando o referencial de "metade" fornece uma nova perspectiva à compreensão da lógica da criança no período das operações concretas.

REFERÊNCIAS

Bruner, J. S. & Kenney, H. (1966). On relational concepts. Em J. S. Bruner, R. R. Olver and P. M. Greenfield (Orgs.), *Studies in cognitive growth* (pp 168-182). New York: John Willey and Sons.

Bryant, P. E. (1974). *Perception and understanding in young children: An experimental approach.* London: Methuen.

Eimas, P. D., Siqueland, E. R., Jusczyk, P. & Vigorito, J. (1971). Speech perception in infants. *Science, 171,* 303-306.

Harnad, S. (1987). *Categórica! perception. The groundwork of cognition.* Cambridge: Cambridge University Press.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* London: Routledge and Kegan Paul.

Lawrenson, W. & Bryant, P. E. (1972). Absolute and relative codes in children. *Journal of Child Psychiatry, 13,* 25-25.

Liberman, A. M., Harris, K. S., Hoffman, H. S. & Griffith, B. C. (1957). The discrimination of speech sounds within and across phonemic boundaries. *Journal of Experimental Psychology, 61,* 379-388.

Noelting, R. (1980a). 1 ne development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I - Differentiation of stages. *Educátional Studies in Mathematics, 11,* 217-253.

Noelting, R. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II - Problem-structure at sucessive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educátional Studies in Mathematics, 11,* 331-363.

Parrat-Dayan, S. (1982). De la fraction (moitie) sur Fobjet a la fraction (moite) relationnelle. *Revue Suisse de Psychologie Puré et Appliquee, 2,* 139-153.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* New York: W. Norton.

Siegler, R. S. & Vago, S. (1987). The development of proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology, 25,* 371-395.

Spinillo. A. G. (1978). The development of proportional reasoning in young children. *15th Annual Conference of the British Psychological Society - Developmental Section (Resumos),* York, U. K.

Spinillo, A. G. (1990). *The development of the concept of proportion in young children.* Tese de Doutoramento não publicada. University of Oxford, Oxford, U. K.

Spiniilo, A. G. (submetido). As relações de primeira ordem em tarefas de proporção: Uma outra explicação quanto as dificuldades das crianças.

Spiniilo, A. G. & Bryant, P. E. (1988). The importance of "half" in children's proportional judgements. *3rd European Conference on Developmental Psychology (Resumos),* Budapest.

Spiniilo, A. G. & Bryant, P. E. (1989). The initial understanding of ratio and proportion. 1*3th International Conference for The Psychology of Mathematics Education*

Spiniilo, A. G. & Bryant, P. E. (1989). The initial understanding of ratio and proportion. *13th International Conference for The Psychology of Mathematics Education (Resumos),* Paris.

Spiniilo, A. G. & Bryant, P. E. (1990). Ratio and proportion: Judging discrete and continuous quantities. *4th European Conference on Developmental Psychology (Resumos),* Stirling, U. K.

Spiniilo, A. G. & Bryant, P. E. (1991). Children's proportional judgements: The importance of "half". *Child Development, 62,* 427-440.

Wohlwill, J. F. (1960). Absolute vs. relational discrimination on the dimension of number. *Journal of Genetic Psychology, 96,* 353-363.

Wohlwill, J. F. (1963). The learning of absolute and relational number discriminations by children. *Journal of Genetic Psychology, 101,* 217-228.

Woodruff, G. & Premack, D. (1981). Primitive mathematical concepts in the chimpanzee: Proportionality and numerosity. *Nature, 293,* 568-570.

Recebido em 20.06.1991.
Aceito em 31.08.1992.