PÓLEMOS

SOBRE A INCOMENSURABILIDADE, O CONTÍNUO E AS LINHAS INSECÁVEIS EM ARISTÓTELES*

Luiz Henrique de Lacerda Abrahão
Doutorando em Filosofia pela Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

RESUMO
Nosso estudo busca expor a prova aritmética da incomensurabilidade entre os valores correspondentes aos catetos e a hipotenusa de um triângulo reto e o decorrente impacto do conhecimento dos números irracionais entre os gregos. Em seguida, a partir da *Física* discutimos as implicações destas inovações para a análise de Aristóteles acerca da possibilidade da divisibilidade infinita da matéria e a existência de grandezas físicas lineares contínuas. Por fim, recorremos ao raro tratado aristotélico *Sobre as Linhas Insecáveis* para complementar esta recusa da existência de entidades atômicas indivisíveis discretas.
Palavras-chave: Incomensurabilidade, Contínuo, Linhas Insecáveis, Aristóteles.

ABSTRACT
This work aim at to expose the arithmetic proof of incommensurability between the values to the legs and hypotenuse of a right triangle and the resulting impact of knowledge of irrational numbers among the Greeks. Then, we show the implications of these innovations to the analysis Aristotle's *Physics* concerning the possibility of infinite divisibility of matter and the existence of linear continuous physical quantities. Thirdly, we use the rare Aristotelian treatise *On the Indivisible Lines* to complement this denial of the existence of discrete indivisible atomic entities.
Key-words: Incommensurability, Continuous, Indivisible lines, Aristotle.

I – A descoberta da incomensurabilidade

O estudo de Max Dehn (1943) acerca dos conhecimentos matemáticos disponíveis entre os gregos nos séculos VI e IV a.c. revela, apesar da escassez de fontes doxográficas, a enorme influência que o contato com as culturas babilônica e egípcia exerceu na formação do conhecimento algébrico e geométrico helênico. O estudioso assinala que um dos maiores achados daquele período consistiu na descoberta das raízes irracionais[1] a partir da notação da impossibilidade de encontrar uma medida comum em termos de valores numéricos inteiros para o lado e a diagonal de um quadrado, ou os catetos e a hipotenusa de um triângulo reto. O enorme impacto trazido por tal novidade matemática repousa, em parte, no fato de que a ocorrência dessa *incomensurabilidade*[2] solapa a compreensão realista segundo a qual as

* O autor agradece aos *referees* anônimos da revista pelas críticas e sugestões feitas, e a Dilhermando Ferreira Campos pelos prévios esclarecimentos históricos e conceituais.
[1] Sobre essa denominação e suas origens arábicas e latinas, ver Gandz (1926).
[2] As fontes doxográficas mostram que originalmente a palavra *incomensurabilidade* era utilizada para descrever a impossibilidade de medir a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados correspondem a uma polegada (o equivalente a 2,75 centímetros) usando números inteiros ou frações decimais finitas. As raízes desse termo, cujo

entidades numéricas representam medidas (inteiras ou fracionadas) empiricamente verificáveis. Com efeito, embora não haja consenso em relação à datação e à atribuição de autoria daquele achado, é possível sugerir que esse evento se reporta ao século V a.C. e sua descoberta tenha vínculos com as investigações empreendidas pela escola pitagórica.[3]

A demonstração matemática da incomensurabilidade matemática dos lados com a diagonal do quadrado (amplamente conhecida no campo matemático, mas fator de incertezas em outras áreas) pede a recuperação de princípios matemáticos fundamentais e, em princípio, pode ser didática e estrategicamente dividida em quatro etapas: (1) a demonstração do Teorema de Pitágoras, (2) a definição matemática para "comensurável", (3) a contradição da suposição do valor racional da fração $a/b=\sqrt{2}$ e (4) a demonstração do valor irracional da $\sqrt{2}$.[4]

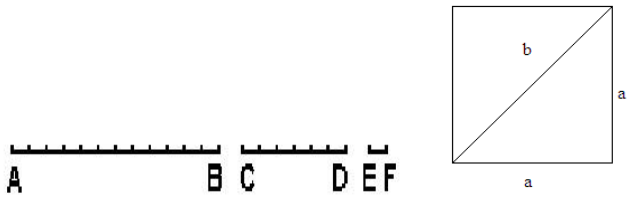
O conceito matemático de *comensurabilidade* se relaciona à possibilidade de encontrarmos segmentos geométricos múltiplos de certas grandezas espaciais (volumes, áreas ou comprimentos). Sejam, então, os segmentos de reta AB, CD e EF representados na figura abaixo. Se atribuirmos ao segmento EF os valores *m* e *n*, sendo tais valores números inteiros ou fracionados, então se conclui que AB=*m*.EF e que CD=*n*.EF. Ou seja, podemos encontrar o segmento EF *m* vezes no segmento AB e *n* vezes no segmento CD. Especificamente, AB=12, EF e CD=6.EF, de modo que a proporção entre CD/AB é de 6EF/12EF. Mas essa *não é uma fração irredutível*, isto é, ela não é composta por *números primos* (tais como 2 e 15, 5 e 13, 8 e 21 etc.) os quais são divisíveis em comum apenas pelo número 1. Por seu turno, a fração 6EF/12EF é *redutível* porque pode ser dividida por 2. Assim, efetuando a operação,

---

original é *asýmmetron*, reportam-se às inaugurais reflexões aritméticas pitagóricas. Essa lição etimológica pode ser confirmada através da consulta ao verbete *asýmmetron* em Peters (1996). *Comensurabilidade* não era a palavra que os pensadores gregos empregaram para descrever a impossibilidade de medir a diagonal de um quadrado com os números racionais, mas a opção latina de tradução para termos como *metreton* e *symmetros.* Na *Metafísica* (II, 2, 983a 19-23) a expressão aristotélica *ten aitían* ("a razão") foi traduzida para o latim como *non mensuratur*, e o trecho *genoito he diâmetros metreté* ("o diâmetro poder ser medido") tornou-se *diameter commensurabilis fiat.* Também na *Metafísica* (XI, 3, 1061) as posições recíprocas *symmetrías kaì asymmetrías* ("com medida e sem medida") foram latinizadas por *commensurationes et incomensurationes.* Nos *Primeiros Analíticos* (I, 23, 41a 25-30), quando o estagirita emprega *asýmmetros* para descrever a impossibilidade de medir a diagonal do quadrado, novamente vemos a opção *incommensurabilis.* Platão também utiliza *metreton te kaì amétron* (*Leis* 820d) para se referir à descoberta pitagórica. Os vocábulos *metreton* e *symmetros* compartilham o mesmo radical *metr-* e a compilação do léxico grego de Liddell & Scott (1996, p. 1122) instrui-nos que esta partícula possui ocorrências variadas. De forma ordinária, *metr-* refere-se à conveniência, justeza, proporção, compensação, etc. de uma ação. No *Górgias* (525a), o filósofo ateniense aplicou *asýmmetría* às causas psicológicas de ações reprováveis. No entanto, há também o emprego "técnico" do vocábulo. Na *Metafísica* (1061b) o termo *asýmmetría* expressa a "medida" em termos espaciais, temporais ou numerais. Portanto, partindo de Chantraine (1968, p. 691) depreendemos que a inclusão do alfa privativo e do prefixo de conjunção àquele radical – composição que gera o supracitado *asýmmetron* – permite-nos transitar por um campo semântico o qual inclui expressões como: "sem medida comum", "em desacordo com", "desproporcional", "desajustado", "assimétrico". Todas essas opções podem ser utilizadas como sinônimas a "incomensurabilidade".

[3] Para uma discussão dessa natureza, recomenda-se o ótimo estudo de Von Fritz (1945).
[4] Vale também consultar a exposição técnica oferecida por Knnor (1998).

chegamos à fração elementar 1/2, um valor numérico preciso para a proporção entre os segmentos AB e CD, tendo por medida o segmento EF. Logo, EF é um segmento que pode ser usado para estabelecer a *medição* ou a *mensuração* de AB e CD.



Partindo da doxografia disponível descobrimos que os filósofos pitagóricos abraçavam a possibilidade de medição de qualquer espaço partindo de números inteiros ou fracionais. "[O]s chamados pitagóricos", relatou Aristóteles, "consagraram-se pela primeira vez às matemáticas, fazendo-as progredir, e, penetrados por estas disciplinas, julgaram que os princípios delas fossem os princípios de todos os seres" (*Met.*, I-5, 985b). Eles afirmavam, com efeito, existir um elemento de realidade para cada valor numérico. A descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos – primeiramente da $\sqrt{2}$ – derivou do exercício de medir a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados possuem o mesmo valor.[5]

O quadrado ilustrado acima tem lados com o valor "a" e diagonal com valor "b". Por conseguinte, o triângulo retângulo interno à figura possui catetos de valor "a" e hipotenusa de valor "b". Se fosse construído um outro quadrado, tendo a diagonal "b" como lado, então sua área seria medida pela equação $b^2=a^2+a^2$, ou somente $b^2=2a^2$. Este é o conteúdo do célebre *Teorema de Pitágoras*. Ele estabelece que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo equivale à soma dos quadrados dos catetos. Agora, se dividirmos $b^2=2a^2$ por a^2, então teremos $b^2/a^2=2a^2/a^2$. Cortando os elementos comuns da fração, chegamos a $b^2/a^2=2$. Também podemos elevar a fração ao quadrado, chegando a $(b/a)^2=2$. Como a raiz quadrada de qualquer número é o próprio número, então se tirarmos a raiz quadrada de $(b/a)^2=2$ teremos que $b/a=\sqrt{2}$. Essa demonstração corresponde à aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo cujos lados são "a" e cuja hipotenusa vale "b". Da mesma forma que o resultado da $\sqrt{25}$

5 No *Teeteto* (147d-148b) Platão atribui a Teodoro de Cirene a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$.

consiste na multiplicação de dois números racionais iguais (no caso: 5.5=25), a proporção b/a=√2 deveria revelar um número racional que resulte em 2 quando multiplicado por ele mesmo. Tal seria o valor real da hipotenusa do quadrado triângulo interno ao primeiro quadrado proposto.

Isso posto, convém indagar: qual a relação de proporção que número racional que multiplicado por ele mesmo resulta em 2 experimenta com a diagonal de um quadrado cujos lados possuem o mesmo valor? Ou, para empregar uma simbologia moderna, qual o valor racional de √2?

A prova da *incomensurabilidade* se relaciona exatamente com a impossibilidade de representar a proporção b/a através de um número racional. Vamos supor que a quantidade da fração b/a=√2 seja expressa por uma *fração irredutível.* Assim, √2 será expressa pela razão de dois números primos entre si, que podemos chamar de m e n. Assim, b/a=m/n=√2. Efetuando a multiplicação cruzada da fração irredutível m/n=√2, conclui-se que m=n.√2. Se os membros da equação m=n.√2 forem elevados ao quadrado, então teremos que m^2=n^2.2. Com base na propriedade aritmética [i] segundo a qual o dobro de qualquer número é um número *par*, então descobrimos que: se m^2 =x.2, então m^2 é *par*. E, com base na propriedade aritmética [ii] segundo a qual se o quadrado de um número é par, logo o número também será par, donde descobrimos que: se m^2 é par, então m será par. Sabe-se que qualquer número par pode ser descrito através da multiplicação Z.2. Portanto, m=z.2. Onde tínhamos m^2=n^2.2, temos agora (z.2)^2= n^2.2 ou ainda Z^2.4=$n^2$2. Dividindo os dois lados da equação por 2, teremos Z^2.2=n^2. Ou: n^2=Z^2.2. Vimos acima que m^2 *e* m são valores pares, por causa das propriedades aritméticas [i] e [ii]. Assim, dado que n^2=Z^2.2, conclui-se que, também por causa de [i], n^2 é *par*. Do mesmo modo, [ii] nos faz perceber que n também é *par*. Contudo, havíamos suposto que a quantidade da fração b/a=m/n=√2 acima era expressa por uma *fração irredutível*, isto é, era composta por números primos (divisíveis apenas por eles mesmos e por 1). Mas, ao contrário disso, a demonstração do valor de √2 revelou m e n são pares, logo divisíveis também por 2. Diante dessa contradição, conclui-se: *não há uma razão para representar através de números racionais a proporção entre a diagonal do triângulo retângulo de valor é √2 e de catetos de valor unitário*. Não há como *mensurar* em bases comuns a diagonal do quadrado partindo dos valores de seus lados.

II – Sobre a ideia mesma de uma grandeza linear contínua em Aristóteles

A proporção do impacto que a descoberta pitagórica dos números irracionais e da incomensurabilidade ocasionou no pensamento matemático grego pode ser apreciado, por exemplo, a partir do trecho 820d das *Leis* de Platão.[6] Nessa passagem o filósofo ateniense comenta a importância de ensiná-la aos jovens e inclui tal conteúdo no seu "programa pedagógico".[7] O mesmo espanto foi expresso por Aristóteles na *Metafísica* A (11): "[P]arece, de fato, maravilhoso para todos que haja uma quantidade não comensurável pela mais pequena que se quiser". Ele ainda comenta esse fato em outros dois momentos do mesmo livro (II, 2, 983a 19-23; XI, 3, 1061), além de também se referir ao assunto nos *Primeiros Analíticos* (A, 23, 41a 25-30) e no *De Anima* (III, 430a31). A propósito, o interessante posicionamento de Aristóteles frente à estrutura e ao estatuto gnosiológico das ciências matemáticas tem sido alvo de muitas discussões e aprofundados estudos.[8] Na *Metafísica* (A, 1-3, 1053b) ele rejeita a concepção realista das entidades matemáticas (corrente entre os membros da Academia platônica) e sustenta que a Unidade não é uma substância ou um objeto abstrato, mas tão-somente um padrão de medição de coisas contáveis. Há, ainda, outros aspectos críticos que, na *Física* (B2, 193b23), Aristóteles tributa aos platonistas, como a separação em pensamento dos atributos materiais dos objetos de suas formas.[9] Mas isso não implica que, para Aristóteles, as ciências matemáticas (que estudam superfícies, volumes, pontos e tamanhos dos corpos) sejam inválidas ou falsas. Na *Metafísica* (M3, 1077b18) o autor insistiu que o matemático trabalha *como se* os atributos materiais pudessem ser separados das coisas elas mesmas, tirando daí sua legitimidade epistêmica.[10] Não obstante, em parte por causa das dúvidas em torno de sua autoria, o tratado aristotélico *De Lineis Insecabilibus* em geral não consta entre as fontes consideradas para explicitar a posição do pensador sobre as matemáticas.[11] De nossa parte, porém, ainda que a reflexão acerca da existência de indivisíveis seja exaustivamente tratada na *Física* e da *Metafísica*, consideramos interessante perpassar por esse escarpado manuscrito peripatético – que parece discutir diretamente com a definição de "comensurabilidade" presente no Livro X dos *Elementos* de Euclides[12] – dedicado à refutação da teoria segundo a qual toda linha é uma grandeza discreta que possui uma "unidade indivisível" a qual tornaria todas as medidas comensuráveis. Ainda

[6] Sobre a influência dessa descoberta em Teeteto, Eudoxo e Euclides, ver Knorr (1998, p. 421).
[7] Com relação a esse ponto, o projeto das *Leis* distingue-se daquele indicado na *República* VII (522).
[8] Por exemplo, Lear (1982).
[9] Ver essa análise em Annas (1975).
[10] Cf. uma exposição desse ponto em Berti (2002, p. 43-59).
[11] Temos em mente os referidos textos de Annas (1975), Lear (1982), Berti (2002).
[12] Nas *Definições* que abrem o Livro X dos *Elementos* de Euclides encontramos a seguinte explicação: "Diz-se *comensuráveis* aquelas grandezas que são medidas pela mesma medida, e *incomensuráveis* aquelas para as quais não se pode produzir qualquer medida comum".

que o referido tratado não acrescente inovações substanciais quanto às as noções físicas aristotélicas, esse passo nos permite apreciar uma ligação entre a *Física* e escritos menos conhecidos e apreciar, para além de trechos como a *Física* 237b ou a *Metafísica* 1091b33, o posicionamento de Aristóteles quanto à natureza contínua da linha.

A defesa da existência de naturezas indivisíveis pode ser consagrada a diversas fontes. Demócrito de Abdera defendeu, a partir da proposição originária do atomismo, a existência de entidades mínimas: "Os átomos não são divisíveis, e não há divisão até o ilimitado" (Frag. 4).[13] Ainda que fenomenologicamente imperceptível, o átomo valeria como elemento básico constitutivo da realidade. Por outro lado, Zenão de Eléia negou a existência de corpos sem extensão, massa ou grandeza, pois dizia que entidades existentes apresentam uma dimensão espacial. Conforme o relato de Aristóteles na *Metafísica* (1001b), ele asseverava: "[S]e a grandeza [é] espacial, então é corpóreo, pois o corpóreo existe em todas as suas dimensões". Sua negação da existência do múltiplo e do infinito, afinada à própria tendência do eleatismo, insistia na composição do Todo a partir de partes discretas, finitas, indivisíveis. Daí Zenão concluir, em um dos seus paradoxos mais famosos, que uma flecha se deslocando no espaço estaria na verdade imóvel porque estaria parada em cada instante do tempo.[14]

Note-se que essa defesa da existência de grandezas indivisíveis implica a própria *negação* da incomensurabilidade – afinal, sempre haveria a possibilidade de adicionar à figura geométrica mais uma unidade básica, o que completaria a medição. A esse propósito, é válido citar o comentário de Von Fritz (1954, p. 244) segundo o qual "dificilmente existirá alguma dúvida de que […] deve ter havido uma conexão entre alguns dos famosos argumentos de Zenão contra o movimento e a descoberta da incomensurabilidade". As negações da divisibilidade infinita sustentam que há um limite para esse processo, que existe uma unidade indivisível para toda grandeza. Portanto, *linhas seriam compostas por unidades indivisíveis que não são da mesma natureza que a totalidade*. Essas unidades elementares são grandezas sem partes quem apresentam um primado sobre o composto,ou, como lemos na passagem 968a5 do tratado peripatético, as "linhas insecáveis" seriam unidades prioritárias e indivisíveis de um corpo discreto. No que concerne à questão da medição dos valores de uma grandeza geométrica, podemos ver o seguinte:

> "Ademais, assim como as linhas construídas a partir da unidade de medição são todas compostas de unidades sem partes, assim também devem ser aquelas que

[13] Citamos os trechos dos pré-socráticos a partir das traduções disponíveis em Bornheim (1998).

[14] Os paradoxos de Zenão são apresentados na *Física* (VI, 9, 239b) de Aristóteles.

> são uma vez medidas por ela. O mesmo acontecerá com as figuras planas; pois todos os quadrados em linhas racionais são comensuráveis com os outros, de forma que a unidade de medição deles também não terá partes" (*De Lineis*…, 968a13-17).

Uma oposição aberta à concepção sintetizada foi apresentada por Aristóteles em sua *Física*. Consoante o capítulo VI desse texto, existem ao menos três razões para aceitarmos a existência do infinito: (1) o fato de que o tempo não tem início nem fim, (2) a admissão da divisibilidade infinita (embora potencial) dos corpos e (3) a impossibilidade de reconhecer um limite para a série dos números naturais. As coisas entendidas dessa forma, então, são tratadas como *contínuas* – sua estrutura permite que eles sejam *infinitamente divididas* em qualquer ponto ou intervalo sem nenhuma alteração em suas propriedades (232b25); e, no caso de contínuos lineares extensos, sabe-se que suas partes não se distinguem em razão de sua dimensão (231b6). Porém, Aristóteles esclareceu em 206a de sua *Física* que nenhuma grandeza pode ser efetivamente divisível ao infinito, mas apenas noeticamente, isto é, através de uma operação mental. Afinal, não é possível perceber materialmente o infinito: não existe corpo físico que seja infinitamente largo ou ínfimo. Assim, não há uma divisão que chega, por exemplo, a uma magnitude indivisível, um *átomo*. Contra os pensadores que afirmavam divisibilidade infinita, o Estagirita sustentou que somente faz sentido aceitar a existência do infinito se não tratarmos essa possibilidade como algo *atual*.[15] Como vemos na*Física* (III, 6207a20-25), não há o *apeiron*, o ilimitado, em ato, sendo um grande equívoco – no qual muitos pensadores incorreram – não diferenciar a divisibilidade *física* ou *atual* de um corpo de sua desagregação matemática, ou potencial.

Alguns estudiosos afirmam que a ocorrência filosófica originária da existência do contínuo se encontra preludiada na passagem do poema de Parmênides onde se diz que o Ser na sua totalidade é homogêneo (*homoion*) e conectado (*synechés*) como um todo.[16] O Frag. 8 enumera e revela os atributos do Ser: "[N]ão sendo gerado, é também imperecível; possui, com efeito, uma estrutura inteira […] todo inteiro, uno, contínuo". Todavia, se, de um lado, essa ocorrência origina a concepção de coisas contínuas (reflexão expansiva às linhas, magnitudes, tempo etc.), cumpre ressaltar, no entanto, que o Ser parmenídico não pode ser fragmentado, pois ele é Uno.

[15] Essa questão foi detalhada pelo estudo de Bostock (2006, pp. 116-118).
[16] Essa interpretação pode ser encontrada em Feyerabend (1991, pp. 259-288).

> "[O Ser] não é divisível, pois é completamente idêntico. E não poderia ser acrescido, o que impediria a sua coesão, nem diminuído; muito mais, é pleno de ser; por isso, é todo contínuo, porque o ser é contíguo ao ser" (Frag. 8).

Assim, apesar do aparente legado eleático, cumpre considerar que a mencionada homogeneidade do Ser se difere da continuidade das grandezas extensas. Nesse caso, as partes são idênticas entre si, ao passo que naquele a própria divisibilidade é impedida. É por isso que na *Física* (VI, 6-8) o filósofo insiste que grandezas contínuas devem ser *isométricas*: todas as partes do contínuo devem apresentar exatamente a mesma estrutura. Em outros termos, *a parte seccionada do contínuo é idêntica ao todo*, não havendo a superveniência entre elas que encontramos na concepção que defende o primado da unidade indivisível sobre o conjunto. Um segmento de reta AC interno a uma linha e sua matriz AB trazem exatamente as mesmas características.

Na *Física* (206b7, 14-25) Aristóteles argumenta que a infinitude da linha decorre tanto de sua potencial divisibilidade interna quanto por extensividade espacial. Não se trata de uma magnitude potencialmente infinita apenas pela adição de novas proporções. Como o tempo e o movimento, a grandeza linear também é divisível em um número infinito de partes (VI, 237a30) e não seria razoável buscar estabelecer a porção originária dessa extensão (VI, 236b20-25). Todavia, a reflexão aristotélica acerca do caráter contínuo da linha (que em certos momentos somente pode ser compreendido por analogia com o tempo e o movimento) apresentada na *Física* não é isenta de críticas.[17]

III – Argumentos peripatéticos adicionais contra as linhas insecáveis

O tratado peripatético *De Lineis Insecabilibus* é valioso não apenas por sua profunda pesquisa matemática e conceitual. Nele também há uma retomada das críticas de Aristóteles à filosofia de Zenão e um aprofundamento da rejeição aristotélica à concepção platônica acerca das entidades numéricas. Além disso, o manuscrito traz interessantes pontos de consonância com o tratado da *Física* no que concerne à defesa da continuidade das grandezas lineares, ajudando-nos a refinar a exposição acima. Porém, o texto em questão, distintamente da *Física* ou da *Metafísica*, desenvolve mais de uma quinzena de argumentos contra a noção de

[17] Por exemplo, Bostock (2006, p. 117) diz que "nenhuma parte da discussão precedente possui qualquer tendência para mostrar que uma linha não pode ser realmente infinita por divisão e nenhuma parte da divisão a seguir parece oferecer qualquer *argumento* para essa afirmação. No fim, penso que isso simplesmente é uma lacuna no relato de Aristóteles, e uma lacuna de suma importância […]".

unidades primárias indivisíveis em uma linha. Vamos apenas apresentar um apanhado desses aspectos que nos parecem ser mais contundentes e propositivos. No entanto, é essencial notar que o posicionamento explicitado no tratado deriva não apenas de análises terminológicas, mas também de acuradas demonstrações geométricas.

Em 970b10-15 encontramos a definição de que uma linha é uma grandeza que pode ser dividida em infinitas partes. Sendo assim, [1] não faz sentido afirmar que existe uma "linha indivisível" que, por definição, pode ser dividida ao infinito (968a4). Além disso, dado que uma grandeza pode ser dividida infinitamente, as suas partes – que apresentam *uma isometria* com a totalidade – também o podem. Assim, [2] é uma contradição defender que apenas a grandeza seja divisível em apenas em uma de suas afeições (969a10). Os defensores das "linhas insecáveis" também se equivocam ao pensar que a [3] divisibilidade em termos noéticos possui uma contraparte material, "pois o movimento do intelecto não ocorre como o movimento dos corpos em deslocamento em uma matéria contínua". É importante salientar que, conforme o texto, os próprios matemáticos *não trabalham* com a noção de unidades indivisíveis ou de linhas comensuráveis. Desse modo, [4] a defesa das linhas insecáveis não seria nem algo adotado pelos próprios matemáticos nem mesmo um procedimento útil entre eles. Em termos conceituais, uma "linha" ou uma "linha reta" se caracterizam como uma grandeza entre dois pontos (970a3). Uma "linha indivisível" deveria, portanto, ser uma linha *sem extensão* para escapar à divisibilidade própria a tudo o que é limitada em suas extremidades – [5] o que *não é* o caso. Também é inadequado defender a existência linhas inseccionáveis em termos geométricos em razão de absurdos matemáticos. Considere, para efeito de ilustração,um triângulo equilátero ABC composto por "linhas indivisíveis" e trace uma reta perpendicular AD que faz a bisseção do segmento BC. [6] Ou concluímos em favor da impossibilidade de que uma bissetriz possa dividir um segmento de reta em duas partes ou admitimos o absurdo de que existam linhas indivisíveis (970a9-13). E, dado que, como vimos, uma linha é uma grandeza limitada em seus extremos por dois pontos, então [7]: (7.1) ou uma linha indivisível não possui extensão, sendo, pois, um ponto; ou (7.2) a linha indivisível possui extremidades e, logo, não é um ponto e é divisível (970b10-15).

IV – Conclusão

A descoberta dos números irracionais parece ter sido motivada pela descoberta da impossibilidade de estabelecer uma medida comum entre os lados e a diagonal de um quadrado a partir de números inteiros racionais. Essa novidade matemática repercutiu não apenas no campo da geometria e da teoria dos números, mas alterou inclusive concepções filosóficas (especialmente junto ao pitagorismo) acerca da natureza das entidades matemáticas. A defesa de uma divisibilidade finita (especialmente Zenão) de uma grandeza linear permite o estabelecimento de unidades insecáveis as quais tornam comensuráveis todas as retas e magnitudes.[18] Essa discussão extrapola o campo restrito das ciências especiais em questão e requer uma ampla abordagem filosófica. Com efeito, na *Física*, Aristóteles desenvolve uma detalhada análise acerca do contínuo e do discreto, explicitando os pressupostos de cada uma dessas ideias. Nesse passo, através da demonstração dos inconvenientes lógicos e paradoxos implicados na posição segundo a qual o tempo, o movimento e os corpos extensos não são divisíveis, o Estagirita tende à defesa da existência do infinito em termos potenciais. Em síntese, *não existe a divisibilidade infinita em termos materiais.* Contudo, considerando especialmente o Livro VI da *Física*, percebemos que o debate em torno da continuidade da linha (grandeza linear extensa) é feito, sobretudo, em termos de analogia com as demais entidades contínuas (tais como o movimento e a sucessão temporal). Daí considerarmos válido recorrer ao tratado *De Lineis Insecabilibus* para compreendermos com mais ajuste as críticas peripatéticas aos defensores das linhas insecáveis e comensuráveis. O manuscrito, embora não de Aristóteles em sentido próprio, revela consequências conceituais e matemáticas absurdas ligadas à admissão da finitude da secção de magnitudes. No mais, é interessante reconhecer que esse difícil texto guarda similaridades estilísticas e conteudísticas com a *Física*, ainda que *não utilize* os termos cunhados pelo Estagirita. O modelo argumentativo peripatético utilizado em 969b30 do *De Lineis…*, que pretende demonstrar os absurdos das decorrências das teses do opositor apresentando argumentos inexistentes na *Física*, é muito parecido àquelas teses que (a exemplo de trechos como o 236b35) predominam na *Física.* De resto, a defesa da continuidade da linha é comum às passagens 970a18 e 237b8, do *De Lineis…* e da *Física*, respectivamente; e, mais interessante, na passagem 971b2do manuscrito está presente o referido "princípio de isometria" entre as partes e o todo do contínuo, importante noção elaborada na *Física* (VI, 6). As consonâncias poderiam ser multiplicadas – como no caso da recusa, visível em *De Lineis…* 971a15-20 e *Física* 237a12-16, de que o tempo consiste em uma sucessão de instantes. Com efeito, indicamos que a defesa aristotélica da continuidade da grandeza linear, tanto aquela esboçada na *Física* como a editada no *De Lineis…*, tem o importante saldo de não apelar à artificiosa proposição de "linhas insecáveis" para escapar à descoberta da

[18] Talvez seja possível estabelecer uma ligação entre a emergência do atomismo na antiguidade e a discussão sobre unidades básicas de medição. Cf. Von Fritz (1954, p. 244, n. 11).

incomensurabilidade e sua consequência aritmética: os números irracionais. Discutir filosoficamente a natureza divisível ou discreta de uma entidade matemática ou de uma figura geométrica pode, pois, revelar traços críticos ou dogmáticos de uma concepção – e, ao menos no que concerne a um dos mais frutíferos avanços que a teoria matemática grega experimentou entre os séculos VI e IV, a defesa de "unidades indivisíveis" tendia a uma posição bastante tradicionalista.

Referências bibliográficas

ANNAS, Julia. (1975), *Aristotle, Number and Time*. In: The Philosophical Quarterly, Vol. 25, No. 99 (Apr.), 1975, pp. 97-113.

ARISTÓTELES. *Física.* Tradução e notas de Ute Schmidt Osnanczik. México: Universidad Nacional Autonoma del México, 2001.

ARISTÓTELES. *Metafísica.* Tradução de Vizenzo Cocco. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

BERTI, Enrico. *As Razões de Aristóteles.* São Paulo: Edições Loyola, 2002.

BORNHEIM, Gerd.*Os Filósofos Pré-socráticos.*São Paulo: Editora CULTRIX, 1998.

BOSTOCK, David. Space, Time, Matter, and Form: *Essays on Aristotle's Physics.* Oxford: Oxford University Press, 2006.

CHANTRAINE, PIERRE. *Dictionnaire Étymologique de la Langue Grecque*: Histoire des Mots. Paris: Éditons Klincksieck, 1968.

DEHN,Max. Mathematics, 600 B.C-400 B.C. In: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 50, N. 6 (Jun.-Jul), 1945, pp. 357-360.

FEYERABEND, Paul. Alguns Comentários à Teoria da Matemática e do Contínuo de Aristóteles, In: *Adeus à Razão.* Lisboa: Edições 70, 1991, pp. 259-288.

GANDZ, Solomon. On the Origin of the Term "Root". In: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 33, N. 5 (May), 1926, pp. 261-265.

PETERS, Francis. *Termos Filosóficos Gregos*: Um Léxico Histórico. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1996.

KNNOR, Wilbur. "Rational Diameters" and the Discovery of Incommensurability. In: *The American Mathematical Monthly*, Vol. 105, N. 5 (May), 1998, pp. 421-429.

LEAR, Jonathan. Aristotle's Philosophy of Mathematics. In: *The Philosophical Review*, Vol. 91, No. 2 (Apr.), 1982, pp. 161-192.

LIDDELL, Henry & SCOTT, ROBERT. *A Greek-English Lexicon.* Oxford: Clarendon Press, 1996.

VON FRITZ, Kurt. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. In: *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 46. No. 2 (Apr.), 1945, pp. 242-264.