



Physicae Organum

Instituto de Física - Universidade de Brasília

2024

Vol. 9

Número 1

Editor Gerente: Olavo Leopoldino da Silva Filho

Editor da Revista: Marcello Ferreira

Editor Associado: Antonio Marques dos Santos

Editores Juniores:

Carine Zary Durães Fróes

Amanda Ribeiro Caiana

Silas Gomes Neto

Apresentação

Apresentamos mais um número da *Physicae Organum*, reunindo artigos cujos temas vão desde as propriedades de redes cristalinas e as sutilezas do espalhamento caótico até análises do problema dos dois corpos — um dos pilares conceituais da mecânica clássica. Além disso, integra esta coletânea um curso introdutório sobre escrita científica, voltado à formação de novos pesquisadores e à consolidação de boas práticas de comunicação acadêmica.

Esperamos que os textos aqui apresentados contribuam para o aprofundamento teórico, para o diálogo interdisciplinar e para o fortalecimento da cultura científica entre estudantes, docentes e entusiastas da Física.

Corpo Editorial

Editor gerente

Olavo Leopoldino da Silva Filho

Editor da revista

Marcello Ferreira

Editor associado

Antonio Marques dos Santos

Editores juniores

Carine Zary Durães Fróes

Amanda Ribeiro Caiana

Silas Gomes Neto

Composição final

Leonardo Luiz e Castro

Agradecimento

Agradecemos à Biblioteca Central da Universidade de Brasília (BCE/UnB) pelo apoio na configuração e no registro do DOI da revista, em especial à bibliotecária Luísa Chaves Café.

Sumário

1	Estudo analítico do comportamento eletrônico em rede cristalina unidimensional sob campos elétricos DC-AC	1
2	CURSO DE ESCRITA CIENTÍFICA NA SEMANA UNIVERSITÁRIA DA UNB	27
3	Espalhamento caótico por potenciais atrativos clássicos	41
4	Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler	53
5	Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler	76



Estudo analítico do comportamento eletrônico em rede cristalina 1D sob campos elétricos DC/AC

Analytical study of electronic behavior in 1D crystalline network under DC/AC electric fields

HUDSON RODRIGUES ARMANDO¹ CARLOS DERLI ALMEIDA CORNÉLIO¹

¹Instituto de Física, Universidade de Brasília.

Resumo

O presente artigo tem por objetivo principal descrever analiticamente as características do comportamento eletrônico variando a forma das condições iniciais da amplitude de Wannier. O estudo incluiu duas condições iniciais: uma função Delta de Dirac e uma função gaussiana como amplitude de Wannier. Os resultados mostraram que o desvio quadrático médio da amplitude de Wannier em forma de função Delta de Dirac é uma função periódica dependente do tempo, enquanto que para a função gaussiana, a análise foi realizada através de imagens geradas pelo software gráfico Gnuplot. Os resultados aqui discutidos confirmam os dados previamente obtidos por métodos puramente numéricos. Por fim, apresentamos uma breve análise dos resultados obtidos após variar os parâmetros da fase κ e desvio padrão σ da módulo ao quadrado da amplitude de Wannier.

Palavras-chave: Oscilações de Bloch. Amplitude de Wannier. Método tight-binding. Função de onda

Abstract

The main objective of this article is to analytically describe the characteristics of electronic behavior by varying the initial conditions of the Wannier amplitude. The study included two initial conditions: a Dirac Delta function and a Gaussian function as the Wannier amplitude. The results showed that the mean square deviation of the Wannier amplitude in the form of a Dirac Delta function is a periodic function dependent on time, while for the Gaussian function, the analysis was performed through images generated by the graphical software Gnuplot. The results discussed here confirm the data previously obtained by purely numerical methods. Finally, we present a brief analysis of the results obtained after varying the parameters of the phase κ and standard deviation σ of the squared modulus of the Wannier amplitude.

Keywords: Bloch oscillations. Wannier amplitude. Tight-binding method. Wave function.

I. INTRODUÇÃO

I. Modelo de Drude

Em 1900 o físico P. Drude propôs um modelo teórico para descrever o comportamento dos elétrons nos metais com o intuito de tentar entender fenômenos como a condução elétrica e a condutividade térmica em estruturas metálicas. Porém, a sua proposta foi concebida apenas três anos após a descoberta do elétron feita por J.J. Thomson (TABACNIKS, 2005) e, nessa época, as únicas teorias físicas existentes para sustentar seus argumentos eram a Mecânica Newtoniana e a Termodinâmica, ou seja, teorias clássicas que concebiam os elétrons como partículas sólidas com comportamento semelhante ao dos gases (MERMIN; ASHCROFT, 2006).

Em sua teoria, Drude levou em consideração que deveria existir um tipo de partícula muito mais pesada que o elétron com carga positiva para compensar a carga negativa associada a ele. Dessa forma, quando os átomos de um elemento metálico são reunidos para formar um metal, os elétrons das camadas mais externas se desprendem dos seus átomos de origem e passam a vagar livremente pela cadeia atômica, enquanto os íons positivos permanecem imóveis e inalterados. Dessa forma, os elétrons que se movem nas camadas mais externas tem seu comportamento influenciado pela presença de um campo eletromagnético externo. Essa dinâmica pode ser descrita pela equação diferencial

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = e \left(E + \frac{\vec{v}}{c} \times B \right) + m \frac{\vec{v}}{\tau}$$

onde o termo τ representa o *tempo de relaxação*, ou seja, um amortecimento por atrito resultante das colisões com outras partículas.

No caso em que não há campo magnético, a velocidade v do elétron é dada por

$$v = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(v_0 + \frac{e\tau}{m} E \right) - \frac{e\tau}{m} E$$

com densidade de corrente j (para o caso de tempos muito longos, ou seja, sem o termo transiente) dada por

$$j = -nev = \sigma E$$

onde n é a mobilidade eletrônica $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ e a equação $j = \sigma E$ é a também conhecida *Lei de Ohm*.

O estudo da dinâmica eletrônica é feito com base numa série de premissas restritivas; despreza-se o fenômeno do espalhamento dos elétrons causado pelas oscilações dos íons na rede cristalina, bem como a formação de *pólaron*s resultantes do acoplamento das vibrações da rede. Outra premissa irreal é a consideração de que os íons da rede são imóveis. Estas e as várias outras limitações impostas ao modelo, possibilitam um certo grau de compreensão sobre muitos aspectos da dinâmica eletrônica.

Nesse artigo não faremos uma descrição detalhada do modelo de Drude, mas vale ressaltar que, por conta do seu considerável sucesso na época em que foi proposto, até hoje ele é utilizado por ser uma forma prática de descrever propriedades cuja compreensão mais

precisa demandaria uma análise com relevante grau de complexidade. Um dos principais avanços da teoria proposta por Drude foi justamente mostrar a ineficiência e limitação das abordagens clássicas para descrever propriedades do universo sub-atômico e, assim, enfatizar a necessidade de uma formulação quântica para tratar tais problemas.

II. Teoria Semi-Clássica da Condução Eletrônica

A ideia principal da descrição semi-clássica é analisar quanticamente a interação entre o elétron e a rede cristalina através do cálculo da banda de energia $\epsilon_n(k)$ (obtida por meio da solução da equação de Schrödinger com um potencial periódico), enquanto que a interação do elétron com o campo eletromagnético é tratada classicamente. Essa dupla abordagem é que motiva o nome “semi-clássica” na denominação da teoria. Em seu desenvolvimento teórico encontramos uma série de ferramentas que nos auxiliam a entender o comportamento do elétron na presença de campos eletromagnéticos externos, tais como as funções de Bloch e as funções de Wannier. Essas funções são conceitos fundamentais na teoria dos sólidos cristalinos e estão diretamente relacionadas à descrição quântica dos elétrons em um potencial periódico.

As funções de Bloch $\psi_k(r)$ descrevem os estados estacionários em um potencial periódico (SUZUKI; SUZUKI, 2006). Seus vetores de onda $\vec{k}$ são bem definidos e satisfazem ao princípio da incerteza de Heisenberg, pois a incerteza em sua posição é total enquanto que a incerteza no vetor de onda é nula. Isso se deve ao fato de que na teoria proposta por Bloch, a probabilidade de se encontrar o elétron em qualquer ponto da rede cristalina é a mesma; e isso confere ao vetor $\vec{k}$ uma natureza deslocalizada no espaço.

Em contraste com as funções de Bloch, as funções de Wannier (WANNIER, 1937; WANNIER, 1962) são localizadas no espaço real e não possuem a propriedade de unicidade, fato este que nos permite otimizar a sua localização. As funções eletrônicas de Bloch são autofunções comuns do operador de translação e do Hamiltoniano que são escolhidos como funções periódicas no espaço recíproco. Então, considerando-se a normalização, existe uma bijeção entre a posição de cada função de Bloch e o valor assumido pelo argumento, tornando possível adicionar uma fase dependente apenas do vetor de onda. No entanto, a relação mais notável entre as funções de Bloch e as funções de Wannier é que, devido à periodicidade, a função de Bloch de cada banda pode ser representada por uma série de Fourier cujos coeficientes são dados pelas funções de Wannier da respectiva banda.

Em 1959, o físico Walter Kohn publicou um artigo mostrando o resultado de suas pesquisas sobre o caso de um elétron num cristal unidimensional com simetria de inversão (KOHN, 1959). Nesse estudo ele demonstrou que é possível escolher convenientemente a fase das funções de Bloch de tal forma que se obtenha funções de Wannier reais simétricas ou anti-simétricas e exponencialmente localizadas. Embora não sejam nada triviais, as equações que levam a máxima localização das funções de Wannier permitem encontrar soluções analíticas para o problema.

As funções de Bloch da banda j e do vetor de onda k com período $L = \frac{2\pi}{a}$ podem ser expressas em uma série de Fourier:

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_n w_{j,n} e^{ikna} \quad (1)$$

Assim, o n -ésimo coeficiente de Fourier dessa função é dado por

$$w_{j,n}(x) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} e^{-ikna} \psi_{j,k}(x) dk \quad (2)$$

A função $w_{j,n}(x)$ da expressão (2) nada mais é do que a **Função de Wannier** da j -ésima banda e n -ésima célula.

Assim, podemos dizer que na teoria semi-clássica da condução eletrônica, as funções de Bloch fornecem uma base conveniente para descrever os estados eletrônicos em sólidos, enquanto as funções de Wannier fornecem uma representação mais localizada desses estados. A partir dessas representações, é possível desenvolver descrições semi-clássicas dos elétrons em sólidos, levando a uma compreensão mais intuitiva do transporte eletrônico e outras propriedades físicas.

Outra característica importante da teoria semi-clássica consiste na determinação simultânea da posição / *momentum* do elétron que não viola o princípio da incerteza. Isso é possível graças a um certo grau de imprecisão, ou seja, definindo a posição do elétron em relação a comprimento de onda λ dos campos externos aplicados, ao passo em que se define o vetor de onda $\vec{k}$ em comparação às dimensões da zona de Brillouin.

Embora não seja o escopo do nosso estudo fazer uma análise detalhada do modelo semi-clássico, vale ressaltar alguns aspectos matemáticos dessa teoria que serão úteis aos desenvolvimentos que se seguem. Para dar início à nossa discussão, vamos considerar uma partícula sob a influência de um campo elétrico DC com um hamiltoniano dado por

$$H = H_k - eEna \quad (3)$$

sendo H_k o termo que satisfaz a periodicidade de Bloch da zona de Brillouin e a o parâmetro da rede.

Utilizando o operador de evolução temporal (GRIFFITHS; QUÂNTICA, 2011) dado por

$$\Psi(a, t) = e^{-i(H_k - eEna)\frac{t}{\hbar}} \Psi(a, 0) \quad (4)$$

onde o estado inicial $\Psi(a, 0)$ da vetor de onda $|k\rangle$ é expresso por

$$\Psi(a, 0) = e^{ika} \phi_k(a) \quad (5)$$

tal que a função ϕ_k também seja periódica, ou seja, $\phi_k(a) = \phi_k(a + r)$, sendo r um vetor da rede cristalina.

Agora, transladando o vetor pela rede através do operador de translação, temos

$$T(r) = \Psi(a, t) = \Psi(a, t) e^{i(k + \frac{eEt}{\hbar})a} \quad (6)$$

Isso indica que a função de onda evolui no tempo, mas com um vetor cuja dependência temporal é da forma

$$k(t) = k + \frac{eEt}{\hbar} \quad (7)$$

A equação (7) também é conhecida como **Relação de Peierls**, e por meio da sua derivada

em relação ao tempo, obtemos a segunda lei de Newton

$$\hbar \frac{dk}{dt} = eE \quad (8)$$

que também é chamada de *Equação do Movimento do Elétron* (ASHCROFT; MERMIN, 2022). A equação (8) informa que a taxa de variação do *momentum* k é dada por $eE/\hbar$ que, por sua vez, pode ser identificado como $\frac{2\pi}{a}/T_B$. É por isso que o período das oscilações de Bloch pode ser expresso por

$$T_B = \frac{h}{eEa} \quad (9)$$

Em uma rede 1D no sistema *tight-binding* a relação de dispersão tem a seguinte estrutura

$$\epsilon(k) = -2|W| \cos(ka)$$

que será deduzida em detalhes mais adiante no presente artigo.

Aplicando as relações expressas em (9) e (7) na equação que descreve a *velocidade de grupo* (KITTEL; HOLBROW, 1963) dada por

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon}{dk}$$

obtemos

$$v(k) = \frac{2|W|a}{\hbar} \sin(k(t)a) = \frac{2|W|a}{\hbar} \sin\left(k_0a + \frac{eEat}{\hbar}\right)$$

$$v(t) = \frac{2|W|a}{\hbar} \left(\sin(k_0a) \cos\left(\frac{eEat}{\hbar}\right) + \sin\left(\frac{eEat}{\hbar}\right) \cos(k_0a) \right)$$

A partir da equação acima, é possível obter a evolução temporal da posição da onda integrando a velocidade $v(t)$ em relação ao tempo, assumindo $k_0 = 0$ como condição inicial:

$$s - s_0 = \frac{2|W|}{eE} (1 - \cos(\Omega t)) \quad (10)$$

Onde a frequência de Bloch foi representada por Ω , ou seja

$$\Omega = \frac{eEa}{\hbar} \quad (11)$$

Dessa forma, fica demonstrado que é possível obter, através da teoria semi-clássica, algumas respostas obtidas por meio da mecânica quântica.

II. Dinâmica Eletrônica em Sólidos Cristalinos

A dinâmica eletrônica em sólidos cristalinos é o ramo da física que estuda o comportamento dinâmico dos elétrons em um cristal, incluindo fenômenos como a resposta dos elétrons a campos elétricos e magnéticos externos, bem como o transporte de elétrons em resposta a uma perturbação (SALINAS, 1999).

Dentre as abordagens teóricas usadas para estudar a dinâmica eletrônica em sólidos cristalinos, uma das ferramenta mais valiosas para modelar esses sistemas é conhecida como método *tight-binding*. Este método fornece uma descrição eficaz e computacionalmente eficiente das propriedades eletrônicas em sólidos cristalinos, pois seu princípio mais elementar consiste na ideia de que os elétrons em um sólido têm forte interação apenas com os átomos mais próximos (SUTTON et al., 1988). Vejamos com um pouco mais de detalhe a formulação matemática desse método.

I. Método *tight binding*

O método *tigh binding* (ligação forte, em português) consiste em considerar que os átomos de uma cadeia atômica estão afastados o suficiente para que as interações entre si possam ser desprezadas e, dessa forma, a função de onda nas proximidades de cada átomo é essencialmente determinada pelo seu potencial (RIBEIRO, 2010).

Assim, de acordo com esse método, podemos obter uma boa aproximação para a função de onda de um conjunto atômico através da combinação linear dos orbitais de cada um desses átomos. Por essa razão, uma outra denominação desse método é **LCAO** (*linear combination of atomic orbitals*).

Para ilustrar uma aplicação do método *tight binding*, seja $\psi(x)$ a função de onda que descreve o comportamento do elétron situado no orbital eletrônico s de um átomo isolado, pois a simetria esférica desse orbital torna mais simples a argumentação matemática envolvida nos cálculos que seguirão.

A evolução temporal da função ψ pode ser analisada a partir da equação de Schrödinger dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = \epsilon\psi(x) \quad (12)$$

Assim, um cristal unidimensional formado por N átomos semelhantes ao descrito acima, dispostos periodicamente a uma distância interatômica a , terá um Hamiltoniano da forma

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_n V(x - na) \quad (13)$$

Cujas autofunções satisfazem a condição de periodicidade das funções de Bloch. Dessa forma, considerando a combinação linear dessas N autofunções, temos

$$\Phi_k(x) = \sum_n e^{ikna} \psi(x - na) \quad (14)$$

As funções de Bloch (14) podem ser combinadas para gerar uma autofunção Φ do hamiltoniano (13). Assim, temos

$$\Phi(x) = \sum_n \alpha_n \Phi_k(x) = \sum_n \alpha_n e^{ikna} \psi(x - na) \quad (15)$$

Assim como orbitais moleculares localizados, as funções de Wannier podem ser escolhidas de várias maneiras diferentes (MARZARI et al., 2012). Porém, na física do estado sólido,

há uma definição que é considerada a “original” (WANNIER, 1937). De acordo com essa referida definição, as funções de Wannier consistem no conjunto de funções usadas para expressar $\Phi(x)$ da equação (15) como uma combinação linear, onde k representa o vetor de onda.

Podemos calcular o valor esperado da energia para estabelecer a relação entre o vetor de onda k e a energia. Para isso, basta calcular a integral (sobre a zona de Brillouin) da equação de autovalores multiplicada pelo conjugado da função de onda, ou seja:

$$\int \psi^*(x) \hat{H} \psi(x) dx = \int \psi^*(x) E(k) \psi(x) dx \quad (16)$$

Agora, substituindo a expressão (15) em (16) e levando em consideração que $V(x + na) \approx 0$ e que ψ é normalizada, podemos reduzir a expressão (16) a

$$E(k) - \epsilon = \sum_{n \neq 0} \int \psi^*(x) (H - H(x)) e^{ikna} \psi(x - na) dx \quad (17)$$

Levando em conta que o alcance da função ψ está restrito aos seus primeiros vizinhos, a equação anterior pode ser escrita da forma

$$E(k) - \epsilon = e^{ika} \int \psi^*(x) \psi(x - a) dx + e^{-ika} \int \psi^*(x) \psi(x + a) dx \quad (18)$$

E, além disso, pela simetria esférica do orbital que a função ψ ocupa, podemos assumir que $\psi(x - a) = \psi(x + a)$, portanto

$$E(k) - \epsilon = (e^{ika} + e^{-ika}) \int \psi^*(x) \psi(x + a) dx$$

$$E(k) = \epsilon + 2\alpha \cos(ka) \int \psi^*(x) \psi(x + a) dx \quad (19)$$

Onde o coeficiente α é o termo que preserva a coerência dimensional da *integral de hopping* que aparece no lado direito da equação acima. Esta integral é assim chamada por representar a probabilidade de salto do elétron entre sítios adjacentes da rede cristalina.

III. Funções de Onda livres da ação de campos elétricos

Ao estudar as funções de Bloch, concluímos que é fisicamente razoável supor que em um potencial que satisfaça a condição de periodicidade de Bloch, com parâmetro de rede a , dada por

$$V(x) = V(x + a)$$

a função de onda estacionária $\psi(x)$ satisfaça a seguinte condição:

$$|\psi(x)|^2 = |\psi(x + a)|^2$$

Ou seja, realizar uma translação de comprimento a na rede cristalina equivale a introduzir uma fator de fase na função de onda expressa por $e^{ik\vec{a}}$. Essas considerações culminam na

formulação matemática do Teorema de Bloch dada pela equação

$$T(a)\phi(x) = e^{i\vec{k}a}\phi(x)$$

onde $T(a)$ representa o operador de translação da rede com parâmetro a .

Utilizando os limites da zona de Brillouin como condições de contorno, acabamos por identificar os valores de $\vec{k}$ com a quantidade de sítios da rede, fato este que motiva a inserção do índice $\vec{k}$ na função de onda $\phi_{\mathbf{k}}(x)$, que também pode ser expressa de forma mais sucinta na notação de Dirac como $|k\rangle$ (GRIFFITHS; QUÂNTICA, 2011).

Portanto, quando os estados estacionários satisfazem a equação de autovalores

$$H|k\rangle = E|k\rangle$$

Onde o operador H é o hamiltoniano do sistema que, na teoria tight-binding, pode ser expresso da forma

$$H = -w \sum_n |n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|$$

onde w representa o termo *hopping* de energia.

Então, usando o hamiltoniano *tight-binding* na equação de autovalores, obtemos:

$$\begin{aligned} & -w \left(\sum_n |n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1| \right) |k\rangle = \epsilon(k)|k\rangle \\ & -w \left(\sum_n e^{-ikna} |n+1\rangle + e^{-ik(n+1)a} |n\rangle \right) |k\rangle = \epsilon(k)|k\rangle \\ & -w \left(\sum_n e^{ik(n-1)a} |n\rangle + e^{-ik(n+1)a} |n\rangle \right) |k\rangle = \epsilon(k)|k\rangle \\ & -w \left(e^{ika} + e^{-ika} \right) \sum_n e^{-ikna} |n\rangle = \epsilon(k)|k\rangle \\ & -2w \cos(ka) |k\rangle = \epsilon(k)|k\rangle \end{aligned}$$

Portanto, o termo de dispersão, ou energia $\epsilon(k)$, do elétron numa rede cristalina isenta da ação de algum campo elétrico é dada por

$$\epsilon(k) = -2|w| \cos(ka) \quad (20)$$

que é uma função de período $2\pi/a$ no espaço dos k 's, cujos valores pertencem ao domínio da Zona de Brillouin.

Podemos admitir a expansão das autofunções nos estados de Wannier dada por

$$\phi_{\mathbf{k}}(x) = \sum_n g(k, n) w_n(x)$$

sendo o termo $w_n(x)$ o estado de Wannier localizado sobre o sítio n , que também pode ser

representado na notação de Dirac como $\langle x|n\rangle$.

Se a função escolhida para assumir a forma da amplitude de Wannier $g(k, n)$ for a expressão que representa a mudança de fase de uma rede cristalina periódica, ou seja, $g(k, n) = e^{ikna}$, então o teorema de Bloch é satisfeito e $w(x) = w(x + a)$.

Assim, reescrevendo a equação de autovalores fazendo $\phi_{\mathbf{k}}(x) = g(k, n)$, que é a função da amplitude de Wannier nas proximidades do sítio n , e limitando o somatório aos primeiros vizinhos de n , obtemos a expressão:

$$E(k)g(k, n) = \epsilon_n g(k, n) + w [g(k, n + 1) + g(k, n - 1)] \quad (21)$$

onde, graças à periodicidade da rede, podemos afirmar que $\epsilon_n = \epsilon_0$. Assim temos

$$E(k)g(k, n) = \epsilon_0 g(k, n) + w \left(e^{ik(n+1)a} + e^{ik(n-1)a} \right)$$

$$E(k)g(k, n) = \epsilon_0 g(k, n) + wg(k, n) \left(e^{ika} + e^{-ika} \right)$$

$$E(k)g(k, n) = \epsilon_0 g(k, n) + 2wg(k, n) \cos(ka)$$

Portanto

$$E(k) = \epsilon_0 + 2w \cos(ka) \quad (22)$$

Essa *Relação de Dispersão* expressa acima é uma função no espaços dos k 's com periodicidade igual à de uma zona de Brillouin, ou seja, $2\pi/a$.

IV. Funções de Onda sob a ação de um campo elétrico

Ainda nos primórdios da mecânica quântica, os estudos inovadores de Bloch mostraram que o vetor *quasi-momentum* caracteriza um estado translacional em um cristal perfeito representado por $\vec{k}$, que varia com o tempo de acordo com a equação clássica do movimento sob a ação de um campo elétrico $\vec{E}$. Dessa forma, restringindo-se a uma única banda de energia, o estado de Bloch com vetor de onda $\vec{k}_0$ pode evoluir no tempo ao longo dessa banda energética específica, tornando-se o estado de Bloch correspondente à evolução temporal de $\vec{k}$. Esse tratamento teórico é conhecido como *Modelo de Banda Simples* (NAZARENO; GALLARDO, 1989).

Sempre que a fronteira da zona Brillouin é alcançado, ocorre uma inversão da posição do vetor com período da oscilação de Bloch dado por

$$T = \frac{\hbar \vec{G}}{e |\vec{E}|}$$

onde $\vec{G}$ é um vetor da zona recíproca.

Sabendo que a derivada de ϵ em relação ao vetor $\vec{k}$ indica a velocidade associada com o estado de Bloch de energia ϵ , obtém-se também o movimento periódico no espaço direto.

Situação similar ocorre no caso de um campo elétrico alternado AC , onde a força elétrica dependente do tempo é dada por

$$F(t) = F \sin(\omega t)$$

Para dar um tratamento matemático mais formal ao problema, podemos partir da análise das soluções da equação de Schrödinger com as condições periódicas de contorno das funções de Bloch numa zona de Brillouin.

Assim, partimos da equação de Schrödinger dependente do tempo dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (23)$$

onde $\hat{H}$ é o hamiltoniano dependente do tempo (LANDAU et al., 1980) dada por

$$\hat{H} = \left(\frac{1}{2m} \right) (\vec{p} - e\vec{A})^2 + v(\vec{r}) \quad (24)$$

com

$$v(\vec{r}) = v(\vec{r} + a) \quad \vec{A} = -\vec{E}t \quad (25)$$

Esse valor do vetor potencial $\vec{A}$ decorre de uma expressão do eletromagnetismo que estabelece a sua relação com o vetor campo elétrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (se \Phi=0) \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = -\vec{E}t \quad (26)$$

Expandindo as soluções da função de onda em termos das autofunções de $H(t)$, onde t é um parâmetro:

$$H(t)\Phi_\alpha(\vec{r}, t) = \epsilon_\alpha(\vec{r}, t)\Phi_\alpha(\vec{r}, t) \quad (27)$$

onde

$$\Phi_\alpha(\vec{r}, t) = e^{ie\vec{A}\cdot\vec{a}/\hbar} \varphi_{\vec{k}(t)}(\vec{r}) \quad (28)$$

e $\varphi_k(t)\vec{r}$ é um estado de Bloch com vetor de onda $\vec{k}(t)$ e $\epsilon_\alpha(t) = \epsilon_{\vec{k}(t)}$. Desde que o Hamiltoniano seja estritamente periódico, podemos definir o vetor $\vec{k}$ na zona de Brillouin aplicando a condição de contorno periódica tal que

$$T(\vec{R}_l)\varphi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_l}\varphi(\vec{r}) \quad (29)$$

onde o vetor $\vec{k}$ satisfaz a *Relação de Peierls* (HOLSTEIN, 1959):

$$\vec{k} = \frac{e\vec{A}}{\hbar} + \vec{k}(t) \quad (30)$$

e $\vec{k}(t)$ evolui no tempo de acordo com a *Equação Clássica do Movimento*:

$$\frac{\hbar d\vec{k}}{dt} = e\vec{E} \quad (31)$$

Isso implica que, em $t = 0$ teremos $\vec{k} = \vec{k}(0)$. Ou seja, $\vec{k}$ representa o vetor de onda em sua posição inicial. Expandindo a função de onda $\psi(\vec{r}, t)$ nas autofunções de $H(t)$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(t) \phi_{\alpha}(t) = c_k \phi_k \quad (32)$$

Para escrever a equação de Schrödinger a partir dos termos dessa expansão, derivamos parcialmente a função $\psi(\vec{r}, t)$ em relação a t , obtendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \phi_k \frac{dC_k}{dt} + C_k \frac{d\phi_k}{dt} \quad (33)$$

Usando o *Truque de Fourier* (TONIDANDEL; ARAÚJO, 2012) na expressão acima

$$\int \phi_k^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dk = \int \phi_k^* \phi_k \frac{dC_k}{dt} dk + \int C_k \phi_k^* \frac{d\phi_k}{dt} dk \quad (34)$$

e reescrevendo o lado esquerdo da equação (34) na notação de Dirac, temos:

$$\int \phi_k^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dk = \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle \quad (35)$$

e, por fim, lembrando que

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{e\vec{E}}{\hbar} \quad \phi_{\vec{k}} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (36)$$

Então

$$\int \phi_k^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dk = \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{dC_k}{dt} \int |u_k(\mathbf{r})|^2 + \frac{eE}{\hbar} \int C_k \phi_k^* \frac{d\phi_k}{dk} \quad (37)$$

A primeira integral do lado direito da equação acima é igual a 1, e reescrevendo a segunda integral usando a notação de Dirac obtemos

$$\left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \frac{dC_k}{dt} + \frac{eE}{\hbar} C_k \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial k} \right\rangle \quad (38)$$

multiplicando ambos os lados da equação por $i\hbar$:

$$i\hbar \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = i\hbar \frac{dC_k}{dt} + i \frac{eE}{\hbar} C_k \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial k} \right\rangle \quad (39)$$

Ao se multiplicar uma constante pelo produto interno do lado esquerdo da equação, o mesmo pode ser reescrito como

$$\left\langle \phi_k \left| i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = i\hbar \frac{dC_k}{dt} + i \frac{eE}{\hbar} C_k \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial k} \right\rangle \quad (40)$$

de acordo com a equação (23), podemos reescrever (40) como

$$\left\langle \phi_k \left| i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right. \right\rangle = \langle \phi_k | H \psi \rangle = H \langle \phi_k | \psi \rangle \quad (41)$$

de onde obtemos

$$H \langle \phi_k | \psi \rangle = \epsilon_k C_k \quad (42)$$

mas

$$\langle \phi_k | \psi \rangle = C_k \quad (43)$$

Dessa forma, a equação (23) escrita em termos das autofunções de $H(t)$ é

$$i\hbar \frac{dC_k}{dt} + i \frac{e\vec{\epsilon}}{\hbar} C_k \left\langle \phi_k \left| \frac{\partial \phi}{\partial k} \right. \right\rangle = \epsilon_k C_k \quad (44)$$

onde levamos em consideração a ortogonalidade de Bloch da função $\phi_k^*(r)$ e restringimos parte do seu período a única banda. Mas para um cristal com inversão simétrica, o elemento de matriz $\langle \phi_k | \frac{\partial \phi}{\partial k} \rangle = 0$, de onde obtemos a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = C_k \epsilon_k(t) \quad (45)$$

cuja solução para C_k é dada por

$$C_k(t) = C_k(0) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t \epsilon_k(t') dt'} \quad (46)$$

sendo que o valor de ϵ_k em 1D dado pela aproximação *tigh – binding* é

$$\epsilon(k) = 2V \cos(ka) \quad (47)$$

onde V é o termo *hopping* (COSTA; MENDOZA, 2020).

Assim, a equação (46) fica

$$c_k(t) = c_k(0) e^{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t 2V \cos(ka) dt} \quad (48)$$

que, para a condição inicial $t = 0$ possui uma solução da forma

$$C_k(t) = C_k(0) e^{-i\beta[\sin(ka) - \sin k(0)a]} \quad (49)$$

onde

$$\beta = \frac{2V}{Fa} \quad e \quad F = eE \quad (50)$$

Então, podemos reescrever a função de onda dada em (32) na equação (28) e o resultado para $C_k(t)$ obtido em (49). Ou seja,

$$\psi(x, t) = \sum_k C_k(0) e^{-i\beta[\sin(ak(t)) - \sin k(0)a]} e^{i \frac{eAx}{\hbar}} \phi_{k(t)}(x) \quad (51)$$

Podemos simplificar a expressão (51) utilizando-se para isso a equação (30) e, com o

intuito de deixar a notação menos carregada, pode-se substituir os termos $C_k(0)$ e $k(0)$ por C_k e k , respectivamente, obtendo assim

$$\psi(x, t) = \sum_k C_k e^{-i\beta[\sin(k - eA/\hbar)a - \sin ka]} e^{i\frac{eAx}{\hbar}} \varphi_{k(t)}(x) \quad (52)$$

onde $\varphi_k(x)$ é a onda de Bloch do vetor de onda $\vec{k}$.

Para simplificar a soma de senos dentro dos colchetes da equação (52) para, em seguida, realizar o somatório, é conveniente utilizar uma das identidades trigonométricas conhecida como Fórmula de Prostaferese (IEZZI, 2013) dada por

$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \sin \left(\frac{z_1 - z_2}{2} \right)$$

Portanto, temos

$$\sin \left(ka - \frac{eAa}{\hbar} \right) - \sin ka = 2 \cos \left(ka - \frac{eAa}{2\hbar} \right) \sin \left(-\frac{eAa}{2\hbar} \right)$$

Dessa forma, a função ψ passa a depender apenas da variável t e pode ser reescrita como

$$\psi(t) = \sum_k C_k e^{2i\beta \cos k(t) \sin \left(\frac{eAa}{2\hbar} \right)}$$

O termo que aparece no domínio da função seno expresso na relação acima aparecerá muitas vezes no decorrer deste trabalho. Portanto, é interessante sugerir neste momento uma mudança na notação até então utilizada para tornar as manipulações matemáticas que se seguirão mais fáceis de manipular. Assim, temos

$$\frac{eAa}{\hbar} = \frac{eEa}{\hbar} = \frac{eEa}{w} \cdot \frac{t}{\hbar/w}$$

Então, chamaremos

$$\eta = \frac{eEa}{w} \quad \tau = \frac{wt}{\hbar} \quad (53)$$

Também é possível expandir a função $\varphi_k(x)$ de Bloch em termos de uma função de Wannier na forma

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikna} \sigma(x - na) \quad (54)$$

onde o termo $\sigma(x - na)$ representa o estado fundamental de um elétron que se move sob a influência de um potencial $U(x - na)$ de uma rede periódica de átomos com período a .

A função (52) pode ser reescrita como uma função dependente apenas do tempo e expandida em termos dos coeficientes n em vez de k . Usando a notação de Dirac podemos representar a amplitude dessa função na forma

$$C_n(t) = \langle n | \varphi(t) \rangle \quad (55)$$

Onde a função dos coeficientes $C_n(t)$ é chamada de n -enésima amplitude de Wannier da função $\psi(t)$.

A partir daqui, os cálculos desenvolvidos terão por objetivo chegar a uma expressão analítica que descreva a probabilidade de um elétron fazer transições para outras regiões da rede cristalina quando está sob a influência de um campo elétrico. O problema será abordado com duas condições de contorno distintas: A primeira, quando a amplitude de Wannier for uma função delta de Dirac da forma

$$C_n(t=0) = \delta_{n,0}$$

e a segunda quando essa mesma condição inicial for uma função gaussiana da forma

$$C_n(0) = e^{ikna} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Feitas essas considerações, segue-se a análise do primeira premissa.

I. Condição inicial: Função Delta de Dirac

Seja a equação que representa a evolução temporal da função $\Psi(t)$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n\rangle \quad (56)$$

Em $t=0$, a autofunção $\Psi(0)$ é expressa como

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n(0) |n\rangle \quad (57)$$

tal que o coeficiente $C_n(0)$ tem a forma

$$C_n(t=0) = \delta_{n,0} \quad (58)$$

Assim, partindo da Equação de Schrödinger, mas dessa vez usando a notação de Dirac

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (59)$$

e substituindo, na equação (59), a função $\Psi(t)$ dada pelo somatório expresso em (56) e operando ambos os lados da equação (59) com os autoestados *bra* $\langle n|$ e *ket* $|n'\rangle$, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n C_n(t) (\langle n|n\rangle) |n'\rangle = \hat{H} \sum_n C_n(t) (\langle n|n\rangle) |n'\rangle \quad (60)$$

Onde $\hat{H}$ é o hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = - \sum_n w (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) \quad (61)$$

e o termo τ_n representa o “gasto” energético dispendido pelo elétron para “saltar” de um sítio $n \rightarrow n+1$

Além disso, No caso cristalino sem a influência do campo elétrico, os auto-estados da energia k do sistema podem ser expressos pela expansão de Fourier

$$|k\rangle = \sum_n e^{ikna} |n\rangle \quad (62)$$

Os estados k estão associados ao *momentum* do elétron e existem tantos estados k quantos forem os sítios n da rede cristalina. Portanto, para obter a representação dos n sítios em função de k , basta aplicar a transformada inversa de Fourier na expressão (62), o que resulta em

$$|n\rangle = \sum_k e^{-ikna} |k\rangle \quad (63)$$

Dessa forma, quando se aplica o operador $\hat{H}$ expresso pela equação (61) sobre o auto-estado k dado por (62) temos

$$\begin{aligned} \hat{H}|k\rangle &= -w \sum_{n',n} (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|) e^{ikna} |n\rangle \\ \hat{H}|k\rangle &= -w \sum_{n'} (|n'\rangle e^{ika(n'+1)} + |n'\rangle e^{ika(n'-1)}) \\ \hat{H}|k\rangle &= -w (e^{ika} - e^{-ika}) \sum_k e^{ikan'} |n'\rangle = \underbrace{-2w \cos(ka)}_{\epsilon(k)} |k\rangle \end{aligned}$$

Ou seja

$$\hat{H}|k\rangle = \epsilon(ka) |k\rangle \quad (64)$$

Onde o termo $\epsilon(ka)$ é a *Relação de Dispersão*, ou seja, a energia associada ao movimento do auto-estado k .

Agora, voltando ao lado esquerdo da equação (60), não é difícil verificar que essa expressão pode ser simplificada sabendo que se trata de uma função normalizada,. Assim, reescrevendo a equação diferencial resultante na notação de Newton (NETO, 2004) e utilizando a forma do operador $\hat{H}$ expresso pelo lado direito da equação (61), temos

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n C_n(t) (\langle n|n\rangle) |n'\rangle &= \hat{H} \sum_n C_n(t) (\langle n|n\rangle) |n'\rangle \\ i\hbar \dot{C}_n &= \sum_n (C_{n'} w |n\rangle \underbrace{\langle n+1|n'\rangle}_{n+1=n'} + C_{n'} w^* |n+1\rangle \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{n=n'}) \\ i\hbar \dot{C}_n &= w C_{n+1} + w^* C_{n-1} \end{aligned}$$

Lembrando agora que uma auto-função $\Psi(t)$ pode ser expandida tanto na forma

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n\rangle$$

quanto na sua correspondente forma dual (SAKURAI; COMMINS, 1995) dada por

$$\langle \Psi(t) | = \sum_n C_n^*(t) \langle n |$$

e pressupondo também que essa função seja normalizada ($\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$), então

$$\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \sum_n C_n^* C_n \langle n | n \rangle = \sum_n |C_n|^2 = 1 \quad (65)$$

É nesse sentido que se pode dizer que essa expressão representa a probabilidade do orbital ser encontrado no sítio n .

E assim, partindo novamente da equação de autovalores

$$\hat{H}|n\rangle = \epsilon(k')|n\rangle$$

torna-se viável descobrir a função que descreve o autoestado de energia $\epsilon(k')$:

$$\begin{aligned} \epsilon(k)|n''\rangle &= \underbrace{\sum_{n,n',n''} C_n^* C_{n''} \langle n' | (w|n\rangle \langle n+1| + w^*|n+1\rangle \langle n|) | n''\rangle}_1 \\ \epsilon(k)|n''\rangle &= \sum_{n,n',n''} C_{n'}^* \underbrace{\langle n' | n \rangle}_{n=n'} C_{n''} \underbrace{\langle n+1 | n'' \rangle}_{n+1=n''} t' + \sum_{n,n',n''} C_{n'}^* \underbrace{\langle n' | n+1 \rangle}_{n'=n+1} C_{n''} \underbrace{\langle n | n'' \rangle}_{n=n''} \tau_n'^* \\ \epsilon(k)|n''\rangle &= \sum_n (w C_n^* C_{n+1} + w^* C_{n+1}^* C_n) \end{aligned} \quad (66)$$

Utilizando a relação de completeza (SAKURAI; COMMINS, 1995) , podemos escrever o elemento de matriz do operador $\hat{H}$ como

$$H_{m,n} = \langle n | \hat{H} | m \rangle = \sum_{k',k} \langle n | k \rangle \langle k | \hat{H} | k' \rangle \langle k' | m \rangle \quad (67)$$

No entanto, quando se aplica o *bra* $\langle n |$ na equação (62) e faz-se o mesmo aplicando o *bra* $\langle k |$ na equação (63), obtemos, respectivamente, os termos $\langle n | k \rangle$ e $\langle k | n \rangle$ presentes no lado direito da equação (67). Dessa maneira, o elemento de matriz do operador $\hat{H}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{H} | m \rangle &= \sum_k -w (e^{ika} + e^{-ika}) e^{ikan} e^{-ikam} = \sum_k -w (e^{ika} + e^{-ika}) e^{ika(n-m)} \\ \langle n | \hat{H} | m \rangle &= -\tau_n \left(\sum_k e^{ika[(n+1)-m]} + \sum_k e^{ika[(n-1)-m]} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

E, sabendo que

$$\sum_k e^{ika(n-m)} = \delta_{n,m}$$

O elemento de matriz do operador $\hat{H}$ será obtido por

$$\hat{H}_{n,m} = -w(\delta_{n+1,m} + \delta_{n-1,m}) \quad (69)$$

Agora, voltando à equação (68) e fazendo uso da substituição de Peierls (PEIERLS; PEIERLS, 1955) dada por

$$k \rightarrow k - \frac{e\vec{A}}{\hbar}$$

obtem-se uma forma generalizada para o elemento de matriz $\hat{H}_{n,m}$ dada por

$$\hat{H}_{n,m} = -w \left(e^{i(ka - \frac{\eta\tau}{2})} \delta_{n+1,m} + e^{-i(ka - \frac{\eta\tau}{2})} \delta_{n-1,m} \right) \quad (70)$$

Utilizando as propriedades das funções de onda no espaço de posição (SAKURAI; COMMINS, 1995) obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= - \sum_n (w \langle w|n \rangle^* \langle w|n+1 \rangle + w^* \langle w|n+1 \rangle^* \langle w|n \rangle) \\ \epsilon(k) &= - \sum_{n,t} (w \langle n|w \rangle \underbrace{\langle w|n+1 \rangle}_{n'} + w^* \underbrace{\langle n+1|w \rangle}_{n'} \langle w|n \rangle) \end{aligned}$$

Aplicando em seguida a relação de completeza introduzida pela somatório em t e considerando $n' = n$

$$\epsilon(k) = -\delta_{n,n'}(w + w^*)$$

$$\epsilon(k) = -\delta_{n,n'}(we^{i(ka - \frac{\eta\tau}{2})} + we^{-i(ka - \frac{\eta\tau}{2})})$$

$$\epsilon(k) = -2w\delta_{n,n'} \cos\left(ka - \frac{\eta\tau}{2}\right) \quad (71)$$

E no caso particular em que $n = n'$ a expressão (71) se reduz a

$$\epsilon(k) = -2w \cos\left(ka - \frac{\eta\tau}{2}\right) \quad (72)$$

Usando agora a expressão da energia obtida em (72) na equação que descreve o coeficiente $C_k(t)$ expressa em (46), chegamos à equação

$$C_k(\tau) = c_k(0)e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau -2w \cos\left(ka - \frac{\eta\tau}{2}\right) dt} \quad (73)$$

Além do mais, a transformada de Fourier mostra uma forma de relacionar a amplitude C_n à sua forma recíproca em $t = 0$ dada por $C_{k(0)}$, ou seja

$$C_n = \sum_k e^{-ikna} C_k \quad \longleftrightarrow \quad C_{k(0)} = \sum_{n'} e^{ikn'a} C_{n'(0)}$$

Então, a equação (73) pode ser resolvida seguindo os mesmo passos da solução de (49),

ou seja:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \sum_{k,n'} e^{ikn'a} C_{n'}(0) e^{-ikna} e^{i\frac{4V}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{\eta\tau}{2}\right) \cos\left(ka - \frac{\eta\tau}{2}\right)} \\ C_n(t) &= \sum_{k,n'} C_{n'}(0) e^{ik(n'-n)a} e^{i\frac{4V}{\hbar\Omega} \sin\left(\frac{\eta\tau}{2}\right) \cos\left(ka - \frac{\eta\tau}{2}\right)} \end{aligned} \quad (74)$$

É fácil verificar que $\eta\tau$ possui unidade de frequência pois, sabendo que $A = -Et$, onde E é o campo elétrico

$$\eta\tau = -2\pi \frac{eEa}{\hbar} t$$

Assim, sabendo também que $eE = F$, a frequência $\eta\tau$ pode ser escrita como

$$\Omega = -\frac{Fat}{\hbar} \quad (75)$$

Por conveniência, a função (74) pode ser reescrita com uma mudança de fase de $\pi/2$ e fazendo $n' - n = m$:

$$C_n(\tau) = \sum_{k,m} C_{m+n}(0) e^{i\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin\left(\frac{\eta\tau}{2}\right) \sin\left(ka - \frac{\eta\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + ikma}$$

Fazendo a substituição

$$\theta = ka - \frac{\eta\tau}{2} + \frac{\pi}{2}$$

De onde se tira

$$ka = \theta + \frac{\eta\tau}{2} - \frac{\pi}{2}$$

Dessa forma, chegamos na expressão

$$C_n(\tau) = \sum_n C_{m+n}(0) e^{i\left(\frac{\eta\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin\left(\frac{\eta\tau}{2}\right) \sin\theta + im\theta}$$

que pode ser escrita de forma mais resumida usando a identidade de Bessel (KREH, 2012):

$$J_{-m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin\theta + m\theta)} d\theta$$

Podemos justificar a passagem do somatório para a integral utilizamos a teoria dos limites no cálculo diferencial (CUMMINGS, 2019) que, basicamente, nos permite fazer uma variável k de uma função analítica em todos os pontos do seu domínio tender a zero e, com isso, transformar nosso somatório numa integral, ou seja:

$$\text{Se } \lim_{\kappa \rightarrow 0} \quad \text{então } \sum_{m,k} \longleftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}$$

Com isso, a expressão para a função $C_n(\tau)$ pode ser escrita na forma:

$$C_n(\tau) = \sum_m C_{m+n}(0) e^{i(\frac{\eta\tau}{2} - \frac{\pi}{2})} J_{-m} \left[\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin \left(\frac{\eta\tau}{2} \right) \right] \quad (76)$$

Cuja função conjugada é dada por

$$C_n^*(\tau) = \sum_m C_{m+n}^*(0) e^{-i(\frac{\eta\tau}{2} - \frac{\pi}{2})} J_{-m} \left[\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin \left(\frac{\eta\tau}{2} \right) \right] \quad (77)$$

Assim, a probabilidade associada ao n -enésimo sítio é obtida através do produto da equação (76) pela sua forma conjugada (77), obtendo

$$|C_n(\tau)|^2 = \sum_n |C_{m+n}(0)|^2 J_m^2 \left[\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin \left(-\frac{\eta\tau}{2} \right) \right]$$

Portanto, partindo da função delta de Dirac $C_{m+n}(0) = \delta_{n,0}$ como condição inicial e substituindo $\eta\tau$ pela relação obtida em (75), a amplitude de probabilidade é dada por

$$|C_n(\tau)|^2 = J_n^2 \left[\frac{4V}{\hbar\eta\tau} \sin \left(\frac{Fat}{2\hbar} \right) \right] \quad (78)$$

Calculando agora o *Desvio Quadrático Médio* (GRIFFITHS; QUÂNTICA, 2011) dado por

$$\langle n^2 \rangle = \sum_n |C_n|^2 n^2$$

e fazendo uso da identidade das Funções de Bessel (KREH, 2012)

$$\sum_m J_m^2(z) m^2 = \frac{z^2}{2} \quad (79)$$

chegamos ao resultado

$$\langle n^2 \rangle = 8 \left(\frac{V}{Fa} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{Fat}{2\hbar} \right) \quad (80)$$

As equações (78) e (80) constituem os mesmo resultados obtidos por Dunlap e Kenkre (DUNLAP; KENKRE, 1986). O deslocamento quadrático médio é uma função periódica dependente do tempo, oscilando com a frequência de Bloch em uma amplitude proporcional à relação entre a largura da banda e a energia eEa .

Em particular, analisando o que foi obtido na expressão (78) para a probabilidade de Wannier na origem, vemos que a partícula retorna à origem realizando um movimento periódico caracterizado pelo período

$$T = \frac{2\pi\hbar}{Fa}$$

que é precisamente o período correspondente às oscilações de Bloch.

Para tratar o problema na ausência de campo elétrico, estuda-se o caso limite em que $E = 0$ nas equações (78) e (80). Mas, vale lembrar que de acordo com as equações expressas em (26), se $E = 0$ então $A = 0$ e, portanto, $\eta\tau = 0$. Assim, reescrevendo o argumento dentro dos colchetes da função de Bessel em (78) na forma do limite fundamental da função seno quando $\eta\tau$ tende a zero, obtemos

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{4V}{\hbar \eta \tau} \cdot \sin\left(\frac{\eta \tau}{2}\right) = \frac{2Vt}{\hbar} \lim_{\eta \tau \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\eta \tau}{2}\right)}{\frac{\eta \tau}{2}} = \frac{2Vt}{\hbar}$$

Vemos então que a n -ésima probabilidade de Wannier torna-se

$$|C_n(t)|^2 = J_n^2\left(\frac{2Vt}{\hbar}\right) \quad (81)$$

E o desvio quadrático médio

$$\langle n^2 \rangle_0 = 2 \left(\frac{Vt}{\hbar} \right)^2 \quad (82)$$

A equação (82) mostra que, à medida que o tempo aumenta, o desvio quadrático médio também cresce, fazendo com que a partícula “escape para o infinito”.

Esses resultados configuram a forma analítica para a probabilidade de que um elétron localizado inicialmente num ponto particular da rede ($n = 0$) possa fazer transições para outros locais da rede sob a ação de um campo elétrico uniforme. Além disso, vale lembrar que esses resultados foram obtidos como uma aproximação para uma única banda e que o papel do campo elétrico é fazer com que o elétron oscile no espaço real com uma frequência dada por $eEa/\hbar$. Dessa forma, quanto mais intenso for o vetor campo elétrico $\vec{E}$, maior será a frequência com que a partícula passa pela origem ($C_0 = 1$). Ou seja, a localização aumenta e, ao mesmo tempo, vemos que a probabilidade na origem está sempre próxima da unidade.

Analisando a equação (78), notamos que se a largura da banda for muito maior que a energia elétrica característica dada por eEa , obteremos um número par de zeros antes que a probabilidade alcance novamente o valor unitário. Nesse caso, costuma-se dizer que os elétrons realizam transições virtuais aos outros locais da rede. Em outras palavras, o campo elétrico age no sentido de remover as degenerescências dos níveis atômicos inibindo, portanto, os saltos entre vizinhos no mesmo estado.

O problema da localização dinâmica foi abordado nesse trabalho desconsiderando a existência da chamada *Escada Wannier-Stark* no espectro eletrônico de um cristal sob a ação de um campo elétrico. Em vez disso, usamos uma condição inicial particular da equação de Schrödinger dependente do tempo que é mais relevante para a análise de uma situação realista. A comportamento oscilatório apresentado (consequência direta do modelo de banda única assumido) deve ser válido durante um tempo t tal que

$$\int_0^t P_{v \rightarrow c}(t') dt' \ll 1 \quad (83)$$

Onde $P_{v \rightarrow c}$ é a probabilidade de transição dentro da banda energética por unidade de tempo.

Ensejamos que, ao considerar valores do campo elétrico suficientemente grandes, o tempo t apresente um valor consideravelmente elevado, de tal modo que o modelo de banda única possa ser considerado como algo mais do que uma simples abstração matemática.

II. Condição inicial: Função Gaussiana

Agora, a análise da transição eletrônica na rede sob o efeito de um campo elétrico será feita partindo de uma função gaussiana como condição inicial do problema, ou seja

$$C_n^0 = e^{ikna} e^{-(n-n_0)^2/2\sigma^2} \quad (84)$$

onde $C_n^0 = C_n(0)$ e κ representa um fator de fase.

Aplicando essa condição inicial à relação (66), obtemos o termo de dispersão:

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \sum_n (w C_n^* C_{n+1} + w^* C_{n+1}^* C_n) \\ \epsilon(k) &= - \sum_n w e^{i\eta\tau} \underbrace{e^{-ikna} e^{-(n-n_0)^2/2\sigma^2}}_{C_n^*} \underbrace{e^{ik(n+1)a} e^{-(n+1-n_0)^2/2\sigma^2}}_{C_{n+1}} + \\ &\quad - \sum_n w e^{-i\eta\tau} \underbrace{e^{-ikna} e^{-(n-n_0+1)^2/2\sigma^2}}_{C_{n+1}^*} \underbrace{e^{ikna} e^{-(n-n_0)^2/2\sigma^2}}_{C_n} \end{aligned}$$

Fazendo a soma dos expoentes e deixando dentro do somatório apenas os termos que dependem de n :

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= -w e^{i\eta\tau} e^{ika} \sum_n e^{ika - \frac{(n-n_0)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-n_0)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}} + \\ &\quad - W e^{-i\eta\tau} e^{-ika} \sum_n e^{ika - (n-n_0)^2/\sigma^2 + (n-n_0)^2/\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}} \\ \epsilon(k) &= -w \left(e^{i(ka+\eta\tau)} + e^{-i(ka+\eta\tau)} \right) \underbrace{\sum_n e^{ika - (n-n_0)^2/\sigma^2 + (n-n_0)^2/\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}}}_{\alpha} \end{aligned}$$

Portanto

$$\epsilon(k) = -2w\alpha \cos(ka + \eta\tau) \quad (85)$$

A forma fechada da n -ésima amplitude de Wannier no espaços dos k 's é dada por

$$f_k^0(t) = \langle k | \Psi(t) \rangle \quad (86)$$

que também pode ser expressa como uma relação com C_n^0 via transformada de Fourier da forma:

$$f_k^0(t) = \sum_n e^{ikn} C_n^0(t) \quad (87)$$

Como C_n^0 tem a forma da gaussina expressa em (84), obtemos, após substituí-la em (87), teremos a expressão:

$$f_k^0(t) = \sum_n e^{ikn} e^{ikna} e^{-(n-n_0)^2/2\sigma^2}$$

Completando quadrados na expressão exponencial acima, podemos separar os n 's dos κ 's, ou seja:

$$f_k^0(t) = e^{-(\kappa-k)^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{-ikn_0} \quad (88)$$

A evolução temporal de $f_k^0(t)$ possui o termo de dispersão $\epsilon(k)$ como autovalor. Portanto, aplicando a função f_k^0 na equação de Schrödinger

$$-i\hbar \dot{f}_k = \epsilon(k) f_k$$

e reescrevendo-a de tal forma a ter $\tau = \frac{\omega t}{\hbar}$, obtemos:

$$i \frac{\partial f_k}{\partial \tau} = -2 \cos(ka + \eta \tau) f_k$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2021) que pode ser resolvida aplicando-se o operador de integração em ambos os lados da equação:

$$\int \frac{\partial f_k}{f_k} = 2i \int \cos(ka + \eta \tau) d\tau$$

Com isso, encontramos a forma da função f_k :

$$f_k = e^{i \frac{4}{\eta} \sin(\frac{\eta \tau}{2}) \sin(k + \frac{\eta \tau}{2} + \frac{\pi}{2})} f_k^0 \quad (89)$$

onde f_k é dado pela expressão (88).

Portanto, a amplitude f_k^0 é uma função exponencial que possui a seguinte forma:

$$f_k = e^{i \frac{4}{\eta} \sin(\frac{\eta \tau}{2}) \sin(k + \frac{\eta \tau}{2} + \frac{\pi}{2}) - (\kappa-k)^2 \frac{\sigma^2}{2} - ikn_0} \quad (90)$$

De posse da expressão da amplitude no espaço dos k 's, podemos usar a transformada de Fourier inversa obtida em (87) para obter a forma da amplitude no espaço dos n 's. Ou seja,

$$C_n^0 = \sum_k e^{ikn} f_k^0 \quad (91)$$

$$C_n(\tau) = \sum_k e^{i \frac{4}{\eta} \sin(\frac{\eta \tau}{2}) \sin(k + \frac{\eta \tau}{2} - \frac{\pi}{2}) - (\kappa-k)^2 \frac{\sigma^2}{2} - ik(n-n_0)} dk \quad (92)$$

O produto da expressão (92) pela sua forma conjugada resulta no *Módulo ao Quadrado da Amplitude de Wannier*, que pode ser visualizada nas figuras (1), (2) e (3) para alguns parâmetros distintos da fase κ e desvio padrão σ representados nas figuras.

É interessante observar que os gráficos gerados acima a partir da expressão analítica dada em (92) confirmam os dados obtidos anteriormente por métodos numéricos (ROCHA, 2017). Pois ilustram a evolução temporal de um pacote de onda quando submetido à ação de um campo elétrico de intensidade $\eta_E = 0.01$.

O gráfico exposto na figura (1), ilustra um pacote de onda completamente localizado num sítio do cristal, ou seja, quando temos $\kappa = 0$ e $\sigma = 0$. Nesse caso, a oscilação tem a forma de uma onda estacionária. Numericamente, já foi observado que nessa situação o

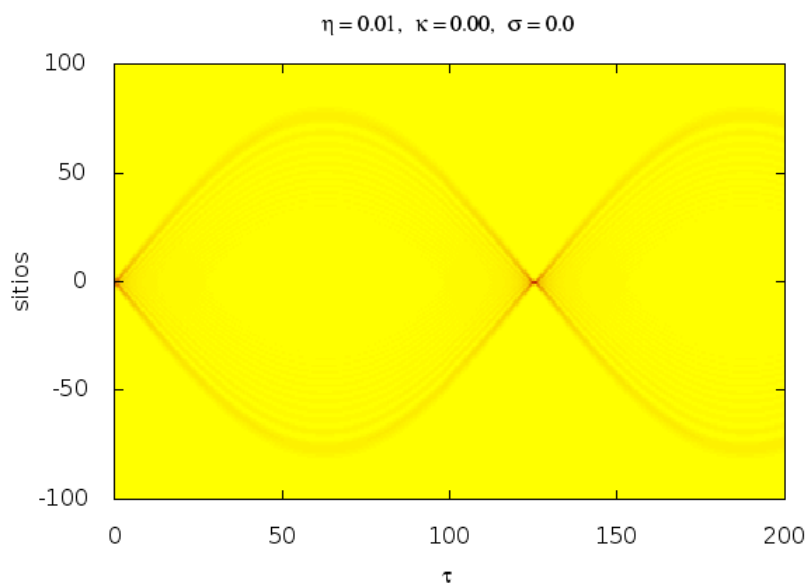


Figura 1: *Evolução do Pacote de Onda:* $\kappa = 0$; $\sigma = 0$

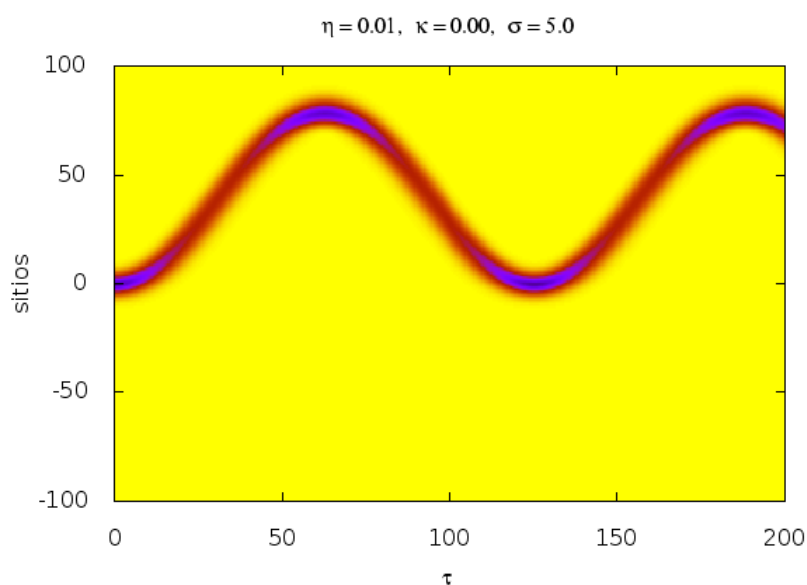


Figura 2: *Evolução do Pacote de Onda:* $\kappa = 0$; $\sigma = 5$

centro do pacote oscila periodicamente em torno de sua posição inicial.

Mas os gráficos (2) e (3) representam a situação do estado inicial do elétron numa rede com termo de dispersão $\sigma = 5$. Esses gráficos descrevem mais fielmente o comportamento do elétron em um cristal unidimensional exposto à ação de um campo elétrico.

Vale ainda ressaltar que no gráfico (3), além da dispersão não ser nula, foi imposta também a condição extra do termo de fase que representa a velocidade $\kappa = 0,25\pi$. Assim,

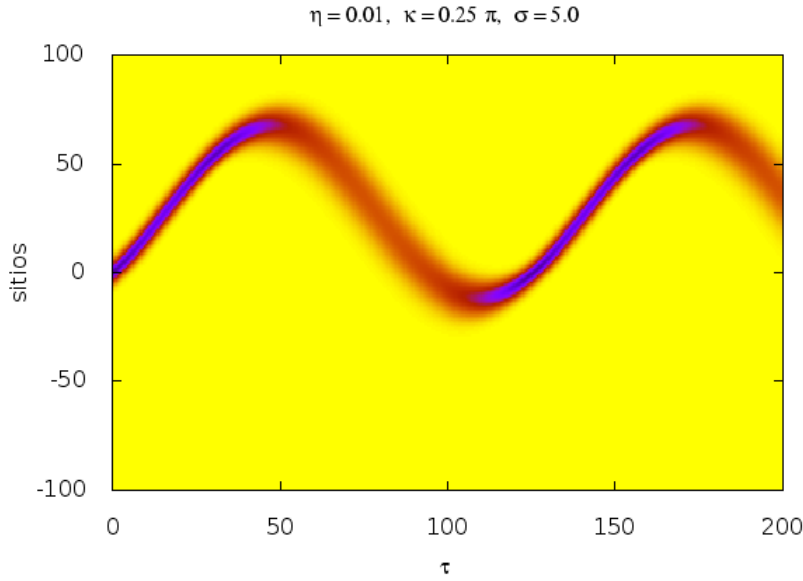


Figura 3: *Evolução do Pacote de Onda:* $\kappa = 0.25\pi$; $\sigma = 5$

após o pacote oscilar ele retorna na direção da velocidade κ .

É evidente, a partir das situações analisadas anteriormente, a importância das condições iniciais do pacote de onda na definição da natureza das oscilações de Bloch que ele realiza.

V. Conclusão

No estudo aqui realizado, foi apresentado um tratamento analítico do comportamento eletrônico numa rede cristalina onde consideramos tanto o caso geral da superposição de campos elétricos DC e AC, quanto o caso da ausência de campo elétrico interagindo com o sistema. A estratégia geral consistiu em utilizar a aproximação *tight-binding* para tratar o elétron quanticamente através da sua função de onda enquanto os íons da rede são admitidos como pontos imóveis espaçados periodicamente ao longo da cadeia atômica.

O principal objetivo do trabalho foi descrever analiticamente algumas das principais características do comportamento eletrônico variando a forma das condições iniciais da amplitude de Wannier. Assim, inicialmente analisamos o caso em que essa amplitude tem a forma de uma função Delta de Dirac. Partindo dessa premissa, concluímos que o desvio quadrático médio para essa condição inicial é uma função periódica dependente do tempo que oscila com uma frequência de Bloch em uma amplitude proporcional à largura da banda e a energia eEa , oferecendo assim uma expressão analítica para calcular a probabilidade de um elétron realizar transições para outros locais da rede cristalina quando está sob o efeito de um campo elétrico.

A outra condição inicial analisada nesse contexto foi a de uma função gaussiana como amplitude de wannier. No entanto, não foi deduzida aqui a forma fechada do desvio quadrático médio. A análise foi assim realizada através das imagens geradas com o auxílio

do software Gnuplot (RACINE, 2006) a partir da expressão da amplitude de wannier deduzida. Estudamos os resultados obtidos a partir da variação de alguns parâmetros da função de amplitude e verificamos que os mesmos confirmam os dados obtidos por métodos puramente numéricos em (ROCHA, 2017).

Podemos concluir que, mesmo diante das simplificações teóricas presentes nos modelos físicos, é possível obter uma expressão matemática altamente precisa para descrever os fenômenos observados. Esses modelos teóricos conseguem representar sistemas reais, como fios quânticos e super-redes, bem como fenômenos não lineares, como oscilações de Bloch e condutividade diferencial negativa. O aumento na publicação de artigos científicos nessa área demonstra não apenas o nível de interesse na pesquisa relacionada ao transporte eletrônico, mas também a eficácia das técnicas teóricas e computacionais utilizadas na expansão desse campo de estudo.

REFERÊNCIAS

- ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. *Solid state physics*. [S.l.]: Cengage Learning, 2022. 5
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary differential equations and boundary value problems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021. 22
- COSTA, R. M.; MENDOZA, M. Dedução da matriz do hamiltoniano tight binding usando a discretização da equação de schrödinger. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 42, 2020. 12
- CUMMINGS, J. *Real analysis: a long-form mathematics textbook*. [S.l.]: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2019. 18
- DUNLAP, D.; KENKRE, V. Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field. *Physical Review B*, APS, v. 34, n. 6, p. 3625, 1986. 19
- GRIFFITHS, D.; QUÂNTICA, M. 2ª Edição. [S.l.]: Editora Pearson Education, 2011. 4, 8, 19
- HOLSTEIN, T. Studies of polaron motion: Part ii. the “small” polaron. *Annals of physics*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 343–389, 1959. 10
- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria*. [S.l.]: Atual, 2013. 13
- KITTEL, C.; HOLBROW, C. Elementary solid state physics: a short course. *American Journal of Physics*, v. 31, n. 8, p. 630–630, 1963. 5
- KOHN, W. Analytic properties of bloch waves and wannier functions. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 4, p. 809, 1959. 3
- KREH, M. Bessel functions. *Lecture Notes, Penn State-Göttingen Summer School on Number Theory*, NEC Labs, v. 82, p. 161–162, 2012. 18, 19
- LANDAU, L. et al. *Teoria do campo*. [S.l.]: Ed. Mir, 1980. 10
- MARZARI, N. et al. Maximally localized wannier functions: Theory and applications. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 84, n. 4, p. 1419, 2012. 6

- MERMIN, N. D.; ASHCROFT, N. W. Hans bethe's contributions to solid-state physics. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 20, n. 16, p. 2227–2236, 2006. 2
- NAZARENO, H.; GALLARDO, J. Bloch oscillations of an electron in a crystal under the action of an electric field. *physica status solidi (b)*, Wiley Online Library, v. 153, n. 1, p. 179–184, 1989. 9
- NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. 15
- PEIERLS, R.; PEIERLS, R. E. *Quantum theory of solids*. [S.l.]: Oxford University Press, 1955. 17
- RACINE, J. *gnuplot 4.0: a portable interactive plotting utility*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2006. 25
- RIBEIRO, A. V. Cálculos de estrutura eletrônica de materiais mediante combinação linear de orbitais atômicos. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2010. 6
- ROCHA, G. F. Impacto da interação elétron-fônon na dinâmica eletrônica em redes cristalinas unidimensionais. *Dissertação de Mestrado - UnB*, 2017. 22, 25
- SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995. 16, 17
- SALINAS, S. R. *Introdução à física estatística*. [S.l.]: Edusp, 1999. 5
- SUTTON, A. P. et al. The tight-binding bond model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 21, n. 1, p. 35, 1988. 6
- SUZUKI, M.; SUZUKI, I. S. Lecture note on solid state physics: mean-field theory. *System*, v. 6000, p. 1–15, 2006. 3
- TABACNIKS, M. H. *Os elementos na matéria*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2005. 2
- TONIDANDEL, D.; ARAÚJO, A. Conectando transformadas: Fourier e laplace. In: SN. *Congresso Brasileiro de Automática, Campina Grande, PB*. [S.l.], 2012. v. 1, p. 32–36. 11
- WANNIER, G. H. The structure of electronic excitation levels in insulating crystals. *Physical Review*, APS, v. 52, n. 3, p. 191, 1937. 3, 7
- WANNIER, G. H. Dynamics of band electrons in electric and magnetic fields. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 34, n. 4, p. 645, 1962. 3



CURSO DE ESCRITA CIENTÍFICA NA SEMANA UNIVERSITÁRIA DA UnB: UM ESTUDO DE CASO ACERCA DO
LETRAMENTO CIENTÍFICO

SCIENTIFIC WRITING COURSE AT UnB UNIVERSITY WEEK: A CASE STUDY ON SCIENTIFIC LITERACY

MARCELLO FERREIRA¹, MARCOS ROGÉRIO MARTINS COSTA², ÉRIKA
NAZARÉ GADELHA MEIRA CERQUEIRA³, DEMÉTRIO ANTONIO DA SILVA
FILHO⁴, OLAVO LEOPOLDINO DA SILVA FILHO⁵, KHALIL OLIVEIRA
PORTUGAL⁶, DEISE MAZZARELLA GOULART FERREIRA⁷, ANTONIO MARQUES
DOS SANTOS⁸

¹Doutor em Educação em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professor e Vice-Diretor no Instituto de Física da Universidade de Brasília.

²Doutor em Letras pela Universidade de São Paulo. Professor colaborador no Programa de Pós-Graduação Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade de Brasília. Diretor Executivo da Escrita com Ciência.

³Especialista em Tecnologia de alimentos pela Universidade de Brasília. Diretora executiva da Escrita com Ciência.

⁴Doutor em Física pela Universidade Estadual de Campinas. Professor Associado do curso de Física da Universidade de Brasília.

⁵Doutor em Física pela Universidade de Brasília. Professor Associado do curso de Física da Universidade de Brasília.

⁶Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Professor Adjunto do curso de Física da Universidade de Brasília.

⁷Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade de Brasília. Administradora no Centro de Educação a Distância da Universidade de Brasília.

⁸Doutor em Física pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte.

Resumo

Este estudo descreve a implementação de um curso de Escrita Científica realizado pelo Instituto de Física da Universidade de Brasília durante a Semana Universitária entre 2020 e 2023. O curso, voltado para estudantes de graduação e pós-graduação, teve início durante a Pandemia de Covid-19, atendendo à demanda acadêmica na redação de textos científicos. Com abordagem remota, desdobrou tópicos como estruturação do texto científico, ética acadêmica e pesquisa, sendo disponibilizado também para a comunidade em geral, com participantes de diferentes regiões do Brasil e países lusófonos. Realizado via plataforma on-line, o curso apresentou taxa de aprovação superior a 50% em todas as edições, contrariando a média de evasão elevada durante a semana universitária. Esse êxito reflete-se na popularização do discurso científico por meio da didatização dos conteúdos, acesso flexível às tecnologias digitais e avaliações adequadas. Esta experiência contribuiu para a difusão das normas técnicas na redação científica, promovendo a melhoria da qualidade dos textos acadêmicos na comunidade profissional e tecnológica de física.

Palavras-chave: Escrita científica; Educação profissional e tecnológica; Semana universitária; Popularização da ciência; Curso on-line.

Abstract

This study describes the implementation of a scientific writing course carried out by the Physics Institute of the University of Brasília during University Week between 2020 and 2023. The course, aimed at undergraduate and postgraduate students, began during the Covid-19 pandemic, in response to the academic demand in writing scientific texts. With a remote approach, it covered topics such as structuring scientific texts, academic ethics and research, and was also made available to the community in general, with participants from different regions of Brazil and Portuguese-speaking countries. Conducted via an online platform, the course had a pass rate of over 50% in all editions, contrary to the high dropout rate during the university week. This success is reflected in the popularization of scientific discourse through the didacticization of content, flexible access to digital technologies and appropriate assessments. This experience contributed to the dissemination of technical standards in scientific writing, promoting the improvement of the quality of academic texts in the professional and technological physics community.

Keywords: Scientific writing; Professional and technological education; University week; Popularization of science; Online course.

I. INTRODUÇÃO

Este artigo discute a concepção, implementação e resultados obtidos a partir de quatro edições consecutivas do curso de extensão Escrita Científica, realizado pelo Instituto de Física da Universidade de Brasília (UnB) durante a Semana Universitária entre 2020 e 2023. O curso surgiu da demanda por capacitação da comunidade acadêmica na redação de textos científicos, destinados à produção de documentos acadêmicos¹. Inicialmente desenvolvido como um teste com estudantes de graduação EaD durante a Pandemia de Covid-19, obteve sucesso e expandiu-se para atender à crescente demanda, mantendo 300 vagas em todas as edições propostas e realizadas durante a Semana Universitária. Realizar uma ação de extensão é importante no cenário universitário, porque, como explicam (Cruz *et al.* 2020, p. I):

A publicação de um artigo representa, para muitos profissionais e estudantes em programas de formação de pesquisadores, a etapa final de um projeto científico, realizado, geralmente, com base em estudo metódico e análise de dados exaustiva. No Brasil, considerando o fato de que a maior parte dos projetos de pesquisas são concebidos e executados sob os auspícios de universidades, muitos deles com financiamento

¹Em 2021, foi apoiado pelo pós-doutoramento de Marcos Rogério Martins Costa, com a supervisão do Prof. Dr. Marcello Ferreira. O tema do pós-doutorado do referido pesquisador foi o letramento científico. Com as análises, percebeu-se que a comunidade acadêmica do Instituto de Física, bem como da Universidade de Brasília, necessitava de uma formação específica em escrita científica. Desse modo, o curso foi um dos desdobramentos do referido estudo iniciado em 2021 e concluído em 2022 (Costa, 2022).

público, há a expectativa de que a produção de conhecimento resultante desses projetos siga as condutas éticas esperadas, contribua na promoção de novos conhecimentos ou intervenções úteis à comunidade e seja comunicada em veículos científicos considerados relevantes.

Realizar um estudo acerca de um curso de extensão em escrita científica para o ensino de Física se torna fundamental diante da importância da comunicação eficaz na área científica. Conforme discute (Didio, 2013), a habilidade de redigir textos científicos de maneira clara e precisa é essencial para estudantes e profissionais – sobretudo os de Física, que trabalham com a exploração científica dos fenômenos naturais –, pois permite a transmissão adequada de conhecimento, descobertas e análises. Aprofundar-se nesse tipo de curso contribui diretamente para a formação de indivíduos capazes não só de compreender os conceitos fundamentais da Ciência – no nosso caso, da Física –, mas também de comunicá-los de maneira acessível e coerente. Além disso, promover a escrita científica proporciona o fortalecimento do pensamento crítico, da argumentação embasada em evidências e da disseminação mais efetiva do conhecimento gerado na área. Esses aspectos são cruciais para o avanço e a expansão da disciplina da Física no contexto educacional e profissional (Costa; Ferreira, 2022; Costa; Gimenes; Ferreira, 2022).

O letramento científico desempenha um papel fundamental na formação acadêmica universitária, permitindo aos estudantes desenvolverem habilidades essenciais para compreender, analisar e comunicar eficazmente o conhecimento científico. Autores como Freire (1979) destacam a importância da alfabetização científica para a construção de uma sociedade crítica e participativa, enquanto que Halliday (1985) ressalta a relevância da linguagem na transmissão e produção do conhecimento científico. Nesse contexto, cursos de escrita científica, como os oferecidos como extensão universitária, desempenham papel crucial ao proporcionar aos estudantes as ferramentas necessárias para redigir textos acadêmicos de qualidade, contribuindo, assim, para o fortalecimento do letramento científico e para maior integração dos estudantes no contexto acadêmico.

A importância de um estudo de caso para o exame do fenômeno do letramento científico reside na possibilidade de análise aprofundada e contextualizada das práticas de leitura, escrita e comunicação no ambiente acadêmico. Conforme destaca Gil (2008), os estudos de caso permitem uma compreensão mais ampla e detalhada dos processos envolvidos no desenvolvimento do letramento científico, possibilitando a identificação de desafios, estratégias eficazes e áreas de melhoria na formação dos estudantes e na prática docente. Dessa forma, os estudos de caso oferecem contribuições para aprimorar as abordagens de ensino e promover o desenvolvimento de habilidades essenciais para a participação efetiva no meio científico.

Nesse contexto, este estudo se baseia em dados recentes coletados em 2023 para delinear a motivação da eficácia do curso, o que pode contribuir para a reprodução em outras instituições. Para isso, a metodologia adotada, aqui, parte de uma abordagem descritivo-exploratória, utilizando estudo de caso a partir da análise dos dados da última edição do curso (Lakatos; Marconi, 2003). A ação teve como propósito central oferecer um curso voltado para o aprimoramento das habilidades de redação, leitura e comunicação em linguagem científica. Destinado inicialmente aos estudantes de graduação e pós-graduação da UnB, o curso foi aberto à comunidade, atraindo participantes de diversas regiões do país

e de países lusófonos.

Estruturado em seis unidades, o curso abordou temas cruciais da escrita científica, como gênero acadêmico, estruturação do texto científico, pesquisa, normas de formatação (ABNT), ética acadêmica e inteligência emocional. Com avaliações distribuídas em cada unidade, o curso foi realizado remotamente na plataforma Aprender 2, apoiado pelo Centro de Educação a Distância (Cead) da UnB. Exigiu um aproveitamento mínimo de 50% nos testes de cada módulo para aprovação, e a média de aprovados e certificados foi superior a 50% em todas as edições, apesar dos desafios de evasão típicos durante a Semana Universitária.

Este artigo está organizado em cinco seções principais. Inicia-se com esta introdução, seguida pela seção de metodologia, em que será detalhada a abordagem empregada para a análise dos dados do curso. A terceira seção apresentará a proposta do curso, destacando seus objetivos, estrutura e conteúdos. Na quarta parte, serão discutidos os resultados obtidos e as dificuldades encontradas, revelando a eficácia e o impacto do curso. Então, a última seção abordará as considerações finais, ressaltando o papel do curso na popularização do discurso científico, a melhoria da qualidade da escrita acadêmica e os desafios ainda existentes para aprimorar esse tipo de formação no contexto universitário.

II. METODOLOGIA

O presente estudo é de natureza qualitativa e adota uma abordagem que integra a descrição e a exploração do tema, conforme destacado por Lakatos e Marconi (2003, p. 188). Segundo as autoras, estudos exploratórios têm como intuito descrever um determinado fenômeno, como no caso de análises empíricas e teóricas realizadas em estudos de caso – como o nosso é. Essas pesquisas podem conter descrições tanto quantitativas quanto qualitativas, além da acumulação de informações detalhadas, como aquelas obtidas por meio da observação participante. Nesse sentido, aqui, é notável a priorização dada à representatividade do caso em exame, o que resulta em procedimentos de amostragem para a obtenção de dados relevantes e abrangentes para o estudo em questão.

Para garantir a atualização e a precisão dos resultados, optou-se por selecionar exclusivamente os dados do ano de 2023 para análise. Esta escolha fundamenta-se na relevância de utilizar informações mais recentes, pois o ano mais recente tende a oferecer um retrato mais fiel e realista da situação em estudo (Andrade, 1998). Assim, a seleção dos dados referentes a 2023 visa oferecer uma análise atualizada e alinhada com as circunstâncias mais atuais, contribuindo para resultados mais condizentes com o contexto presente (Medeiros, 2000).

O desenvolvimento do conteúdo do curso de extensão Escrita científica, objeto deste estudo, foi embasado em um livro criado por professores da Universidade de Brasília (UnB). Marcos Costa, Demétrio Silva Filho e Marcello Ferreira colaboraram na elaboração deste material, que está disponível para acesso gratuito, contou com financiamento e apoio do Centro de Educação a Distância (CEAD) da UnB, no ano de 2020.

O livro também foi um desdobramento do pós-doutorado de Marcos Costa, supervisionado por Marcelo Ferreira (Costa, 2022). Durante o processo de pesquisa (Costa, Ferreira, 2022; Costa, 2022), por meio de entrevistas semiestruturadas, constatou-se que os livros de metodologia científica disponíveis na época apresentavam linguagem complexa, poucos exemplos e escassez de figuras. Segundo (Costa, 2022) e (Costa, Gimenes e Ferreira (2022)),

as publicações acadêmicas que visam a difusão da metodologia científica trazem uma metalinguagem exacerbada que dificulta a legibilidade dos que são leigos no tema, como graduandos no início da formação e pós-graduandos que retornam à universidade depois de anos fora dela.

Em resposta a essa demanda, o livro desenvolvido por Costa, Silva Filho e Ferreira foi publicado em 2021. A obra conta com 82 páginas, cinco capítulos e é rica em imagens, exemplos, modelos e figuras adequadas. Este material está disponível gratuitamente no portfólio de publicações do CEAD no seguinte endereço: <<https://cead.unb.br/images/site/1cead/portfolio/livro2021escritacientifica.pdf>>

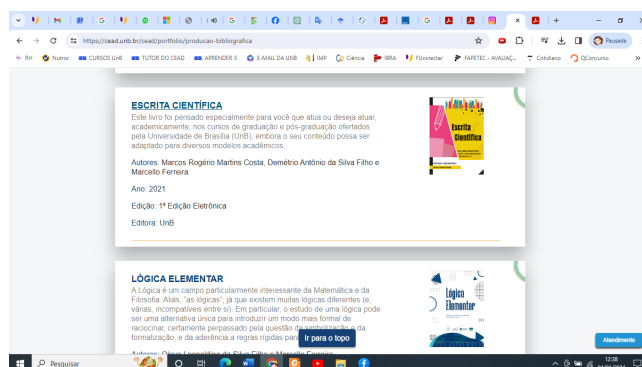


Figura 1: Livro *Escrita científica*. Fonte: CEAD (2024).

Nas edições de 2020 e 2021 do curso, os módulos seguiram a estrutura dos mesmos capítulos presentes no livro. Em 2022, foi incluído um módulo sobre inteligência socioemocional. Já em 2023, um módulo sobre inteligência artificial foi também acrescentado. Essas atualizações no curso refletem as mudanças no cenário da difusão científica, especialmente com a introdução do uso do Chat GPT². Essas alterações demandaram, consequentemente, uma revisão do módulo de ética acadêmica para abordar os cuidados na utilização da inteligência artificial em textos acadêmicos.

Ressalta-se, ainda, que, durante as edições de 2022 e 2023, o curso estabeleceu parcerias com professores e palestrantes, enriquecendo a abordagem trazida à luz nos módulos. Em 2022, o professor Demétrio Filho realizou uma palestra elucidativa sobre estratégias para publicações em âmbito internacional, proporcionando valiosas orientações. Já em 2023, a startup Escrita com Ciência, representada por Érika Gadelha e Marcos Costa, apresentou o Método RAC, que integra três habilidades socioemocionais - Responsabilidade, Autocanhamento e Criatividade - ao processo de redação de textos acadêmicos e técnicos³. Essas

²O Chat GPT é uma tecnologia de inteligência artificial baseada em modelos de linguagem, como o GPT (Generative Pre-trained Transformer), desenvolvido pela OpenAI. Essa ferramenta utiliza modelos de aprendizado de máquina para gerar texto de maneira autônoma, capaz de compreender e produzir conteúdo sem intervenção humana direta. O GPT é treinado em uma ampla gama de dados linguísticos da internet, o que lhe confere habilidades de escrita e compreensão contextual.

³A startup Escrita com Ciência nasceu da ideia de seus cofundadores Marcos Costa e Érika Gadelha. Depois do pós-doutorado, Marcos Costa se inscreveu na pré-incubadora Cocreation Lab e desenvolveu, com o apoio de Érika Gadelha, o referido Método RAC. Atualmente, segundo o site oficial da startup, são mais de 1500 universitários impactados em todo Brasil. Mais informações estão disponíveis no site:

colaborações contribuíram significativamente para aprimorar a execução do curso de extensão, além de ampliar sua propagação científica. A metodologia adotada, portanto, no curso de extensão incluiu uma revisão constante e um aprimoramento dos conteúdos oferecidos a cada edição, evitando a simples reprodução do material das edições anteriores. Esses foram, por conseguinte, os recursos metodológicos utilizados no curso e os procedimentos aqui assumidos para se analisar o referido objeto de estudo.

III. ESCRITA CIENTÍFICA: PROPOSTA, EXECUÇÃO E RESULTADOS

A ação de extensão realizada em 2023 consistiu no planejamento e na execução de um curso de curta duração, intitulado Escrita Científica. A formação foi ofertada durante a 23ª Semana Universitária da UnB, realizada de 25 a 29 de setembro de 2023. O objetivo da ação foi aprimorar a capacidade de escrita, leitura e comunicação oral do cursista em linguagem científica por meio do conhecimento e estudo das diversas estruturas dos documentos escritos e das formas de apresentação de trabalhos dessa natureza. O referido curso foi pensado especialmente para o discente que atua ou deseja atuar, academicamente, nos cursos de graduação e pós-graduação ofertados pela Universidade de Brasília ou em outras instituições de ensino superior no País.

De forma geral, a ação de extensão foi proposta como um curso autoinstrucional. Nesse sentido, não contou com o apoio da tutoria, de forma direta. Mesmo assim, durante sua execução foram oferecidas duas videoconferências, realizadas nos dias 25 e 29 de setembro de 2023, durante a referida semana universitária. Isso aconteceu tanto para dirimir dúvidas quanto para oferecer orientações complementares aos conteúdos apresentados na plataforma Aprender 2, como a palestra da startup Escrita com Ciência.

Todas as videoconferências foram gravadas e ficaram disponíveis para os que não puderam estar no momento de sua veiculação. A participação nas videoconferências não foi obrigatória e não contava como presença ou atividade avaliativa, sendo, como dito, complementar. Foi, assim, oferecido um curso em que o cursista pudesse estudar de acordo com seu ritmo de aprendizagem e sua disponibilidade de tempo, exigindo disciplina e autodesenvolvimento pessoal, bem como atenção aos prazos estabelecidos no plano de ensino, haja vista ser um curso de curta duração (40h, distribuídas em cinco dias).

O curso foi estruturado em cinco unidades, nos quais foram discutidas as seguintes temáticas:

- Unidade 1: Gênero acadêmico: sobre a construção do texto científico;
- Unidade 2: Escrita acadêmica: da estrutura à prática;
- Unidade 3: Pesquisa científica: fontes e bases;
- Unidade 4: Formatação do texto científico: Normas da ABNT;
- Unidade 5: Ética acadêmica: a questão do plágio;
- Unidade 6: Inteligência emocional no mundo acadêmico.

<www.escritacomciencia.com.br>, ou na rede social Instagram: <www.instagram.com/escritacomciencia>

Em cada unidade, foram disponibilizadas orientações de leituras e atividades avaliativas, além de materiais complementares contidas em Biblioteca própria dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do Curso. Como dito, a partir de 2022, o curso passou a contar com o módulo 6 que aborda as habilidades socioemocionais. E em 2023, o módulo 5 foi adaptado para dar instruções sobre como utilizar as inteligências artificiais na redação científica de maneira ética. Os módulos 1, 2, 3 e 4 foram apenas atualizados com as novas publicações das Normas Técnicas (NBR) da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT): em especial, NBR 6022 (2003a); NBR 6028 (2003b); NBR 14724 (2011); NBR 6023 (2018) e NBR 10520 (2023).

Compreende-se, assim, que a proposta do curso é a de que o cursista reserve um tempo suficiente na sua agenda de compromissos para realizar a leitura dos textos antes de realizar as avaliações de cada unidade. Com isso, ele tem autonomia e flexibilidade para conduzir seus estudos. É preciso ressaltar que o curso ficou disponível para a realização das atividades avaliativas e formativas durante a Semana Universitária e teve por base o livro *Escrita Científica*, de autoria de (Costa, Silva Filho e Ferreira (2021)), que ficou disponível na Biblioteca dentro do AVA da plataforma Aprender.

De forma geral, o curso ocorreu no formato remoto dentro da Plataforma Aprender 2. Os matriculados no SIGAA foram cadastrados, com apoio do pessoal do CEAD, da UnB, no AVA criado especialmente para essa oferta do curso de Escrita Científica (<<https://aprender2.unb.br/course/view.php?id=2387>>). Cada unidade do curso tinha uma atividade avaliativa que consistia em um questionário com perguntas objetivas, exceto a unidade 5 e 6 que foram avaliadas por um único formulário. Para ser considerado aprovado, o cursista tinha que obter, no mínimo, 50

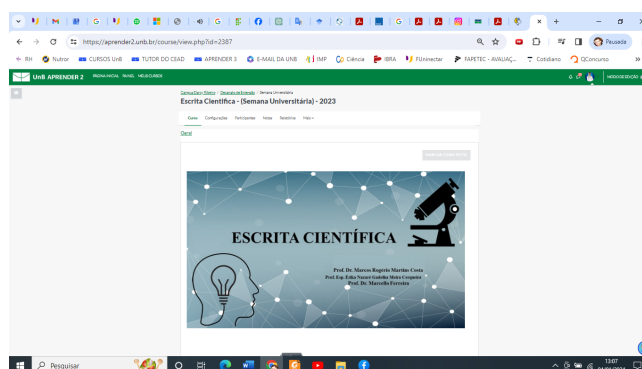


Figura 2: AVA do curso de extensão. CEAD (2023).

A proposta do curso fundamentou-se ainda na abordagem dos gêneros do discurso, adotando a filosofia da linguagem de Bakhtin e seu Círculo como base teórica (Bakhtin, 2017; Maingueneau, 2013; 2008; Brait, 2012; Grillo, 2008; Marcuschi, 2008; Discini, 2007; Meurer; Bonini; Motta-Ruth, 2005; Schneuwly, 2004). Essa escolha permitiu apresentar o conteúdo de maneira clara e eficaz, utilizando exemplos claros e realistas para ilustrar os conceitos discutidos. Isso garante, como prevê estudiosos diversos da linguagem (Faulstich, 2014; Fiorin, 2013; Didio, 2013; Garcez, 2013; Garcia, 2011; Pereira, 2011; Platão, 1996; Hilgert, 1993), uma exposição didática e de fácil compreensão para os participantes de uma comunidade, no caso os alunos matriculados no curso.

Com essa ação, pretendeu-se, por conseguinte, contribuir para a divulgação e a popularização do discurso científico, desmistificando sua natureza elitista e complicada. O intuito foi divulgar as normas técnicas de redação e formatação do texto científico, na perspectiva de que a construção e aprendizagem do conhecimento sejam garantidas por meio de um processo de ensino participativo e significativo para todos. Para tanto, o uso dos recursos tecnológicos pôde contribuir sobremaneira, uma vez que possibilitou que o discente acessasse aos conteúdos a qualquer momento e em qualquer lugar, desde que se tivesse acesso à internet e à plataforma Aprender 2.

IV. SOBRE CONQUISTAS E DIFICULDADES

A análise do curso de Escrita Científica revela uma balança equilibrada entre as conquistas e as dificuldades enfrentadas ao longo do seu desenvolvimento, sobretudo pesando a última edição. Uma das principais dificuldades encontradas em 2023 foi a organização do AVA no Aprender 2, exigindo ação e coordenação do CEAD da UnB. O cadastro dos alunos inscritos na atividade enfrentou obstáculos, pois somente pôde ser efetuado no sistema após o encerramento das inscrições, resultando em atrasos. Essa questão ressalta a falta de integração entre o SIGAA, onde as matrículas são realizadas, e o Aprender 2, plataforma efetiva do curso. Sugere-se, portanto, a possibilidade de integração entre esses sistemas ou a concessão de chaves de inscrição aos professores e coordenadores, permitindo aos alunos se inscreverem diretamente. Durante esse processo, ficou evidente a complexidade para os alunos se matricularem, indicando a necessidade de um manual mais acessível para orientá-los nessa etapa.

Em todas as edições, houve a realização de uma pesquisa de satisfação. Na pesquisa de 2023, 190 alunos responderam um formulário on-line avaliando diversos aspectos do curso. Entre eles, a inscrição no SIGAA recebeu notas variadas, indicando um nível moderado de satisfação, evidenciando a necessidade de melhorias nos processos de inscrição e cadastro. Isso aponta a necessidade de melhoria nesse quesito: inscrição.

Ademais, o curso autoinstrucional oferecido na plataforma Aprender 2 foi um sucesso de inscrições, alcançando o total de 300 vagas e 57,3% de retenção, com 172 alunos aprovados no final. É importante considerar que os resultados mais amplos e duradouros desse curso serão percebidos a médio e longo prazo, impactando a produtividade científica na universidade e sua disseminação na comunidade local e regional – o que é um estudo a se fazer futuramente. Essa avaliação contínua, por ora, realizada por meio de formulários durante a execução do curso, proporcionou descobertas sobre os participantes, oferecendo uma base para futuras melhorias.

Por exemplo, ficou patente a satisfação dos alunos em relação ao curso, como apontado na pesquisa de satisfação realizada nos últimos dias de aula do curso, dias 28 e 29 de setembro de 2023. Os alunos apontaram que tem um alto grau de importância a escrita acadêmica, como se pode observar no gráfico a seguir:

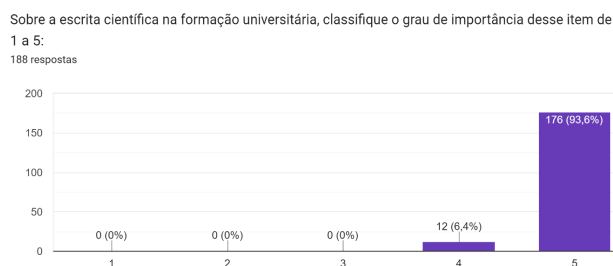


Figura 3: Gráfico 1 – Grau de importância da escrita científica na formação acadêmica. *Elaboração própria.*

Como se pode observar, 93,6% dos alunos, depois de terminarem o curso, indicaram que a escrita científica tem um alto grau de importância na formação acadêmica. Isso valoriza o campo de elaboração e difusão do pensamento científico e de sua forma de veiculação: artigos, teses, dissertações, etc.

De forma geral, o condão do curso foi superar as dificuldades apresentadas frequentemente no que diz respeito à proficiência discente no tratamento linguístico e discursivo na elaboração de trabalhos acadêmicos e científicos. O curso trouxe também a oportunidade de um número maior de cursistas poder acessar os seus conteúdos, porque foi autoinstrucional e oferecido na plataforma Aprender 2. Com isso, inicialmente foram propostas 300 vagas em virtude do sucesso que teve no ano anterior e pela solicitação de diversos. O resultado é que houve o preenchimento total das vagas e mais dois alunos foram incluídos manualmente. O índice de retenção de 57,3%, uma vez que, dos 302 matriculados, 172 foram aprovados.

É entendido aqui que os aspectos gerais que impulsionaram o oferecimento desse curso somente poderão ser observados, como dito, a médio e longo prazo no desenvolvimento da produtividade científica dentro da universidade, bem como na difusão de suas ações na comunidade local e regional. Por isso, propusemos um formulário próprio apresentado aos alunos participantes desta ação de extensão durante sua execução. E foram colhidos os seguintes retornos dos participantes, os quais selecionamos:

Aluno 2: Curso muito bem elaborado e com bastante informações novas adquiridas.

Aluno 11: Extremamente colaborativo! Deveria ter trimestralmente.

Aluno 16: Muito bem elaborado, a participação e a disponibilidade dos professores contribuiu bastante, a organização do curso - unidades - foram bem boas. Mas o livro é incrível! Superou minhas expectativas.

Aluno 34: O curso é muito importante, deveria ser uma matéria na universidade, mesmo que pequena, para todos os universitários terem acesso à informação.

Aluno 48: Achei interessante, percebi que ainda havia algumas coisas que não sabia, e me ajudou a reforçar outras que já tinha conhecimento.

Aluno 54: O Curso de Escrita Científica foi de extrema relevância para minha formação acadêmica, me trouxe informações das quais eu ainda não tinha conhecimento e com certeza será de grande valia no momento de realizar a escrita de um trabalho científico.

Como se pode apreender pelos retornos dos participantes da ação, o curso contribuiu para a formação continuada dos universitários, mas também para sua carreira, para seu conhecimento sobre o tema e para debater os dilemas contemporâneos de nossa sociedade. A fala do Aluno 6 reitera a problemática na hora de se inscrever no SIGAA. De forma geral, os cursistas foram bem participativos e tivemos, durante as videoconferências, uma presença de, pelo menos, 70 cursistas.

Como se pode acompanhar neste relato de experiência, esta ação de extensão partiu da ideia de que o processo formativo do universitário, como de qualquer outra área, é aberto. Na condição de sujeitos em formação, é fundamental fortalecer um processo de ensino e aprendizagem em que sejam contemplados aspectos como: o fortalecimento do compromisso com ética acadêmica; o incremento na postura crítica acerca do processo de leitura e escrita de textos científicos; a construção de uma visão mais ampla do discurso científico e de seus gêneros, como: monografia, resumo/abstract; resenha, dentre outros; e a percepção das complexas relações entre a produção científica, a divulgação científica e o texto didático. Por isso, adotou-se, como objetivos gerais, trabalhar esses aspectos durante o curso de Escrita científica.

Com a realização do curso, esses objetivos gerais foram trabalhados, uma vez que foram apresentadas e discutidas pesquisas recentes sobre o letramento científico, bem como apontada importância da ética acadêmica nas relações de produtividade de textos científicos. A partir dos conteúdos do curso, foi realizada uma reflexão sobre os desafios e as dificuldades de se escrever um texto científico e o rigor do estilo acadêmico, bem como aspectos de formatação foram abordados, diferenciando o texto científico do de divulgação científica e do texto didático. Foi também pontuado a postura crítica na leitura e escritura de textos acadêmicos e na seleção de fontes e bases de dados.

Sobre os resultados esperados, o curso livre proposto teve, como diretriz, contribuir com a formação continuada e estimular a produção e a disseminação intelectual, acadêmica, científica da Universidade – entendida como espaço de interlocução, intercâmbio e difusão do conhecimento científico, cultural e histórico. A produção científica, bem como a escrita acadêmica, ainda é um desafio para a educação formal, sobretudo no Ensino Superior. Por isso, o oferecimento desse curso voltado para o ensino e a aprendizagem da escrita científica permitiu não somente a difusão de técnicas de leitura e escrita, mas, sobretudo, a oportunidade de ampliar os horizontes formativos dos graduandos e dos pós-graduandos da instituição, uma vez que, nos processos seletivos dos Programas de Pós-Graduação, em geral, é exigido a proficiência na escrita e na leitura de textos acadêmicos.

Além disso, destaca-se que o estudante universitário deve ampliar seus conhecimentos sobre distintas situações linguísticas e sociointerativas, dentre elas a divulgação científica. Nesse cenário, o letramento científico se faz necessário e oportuno, pois oferece uma base coerente à redação de textos acadêmicos, bem como forma e informa o discente das normas de redação de textos acadêmicos, auxiliando-o a se posicionar como um escritor e um leitor mais consciente dos processos linguísticos e discursos que cercam, por exemplo, um artigo

científico. É a promoção dessa autonomia no ato da escrita de textos científicos que justificou e estimulou seus proponentes na criação e no oferecimento deste curso na 23ª Semana Universitária da UnB, edição 2023.

Durante o curso Escrita científica, o cursista teve contato com os processos de leitura e escrita de textos acadêmicos em perspectivas linguística e discursiva. Em cada unidade, o cursista pôde desenvolver uma habilidade relacionada com o processo de leitura e escrita, buscando desenvolver seu pensamento reflexivo e crítico. Com isso, foram abordados temas candentes e oportunos aos nossos tempos como: ética acadêmica; conceito de plágio em textos acadêmicos; citação e paráfrase; dentre outros. Assim, o curso desenvolveu conhecimentos técnicos e discursivos necessários ao estudante universitário, sobretudo no momento da escrita dos Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC), seja na graduação, seja na pós-graduação.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ação de extensão, o curso de Escrita Científica realizado em 2023, propôs uma capacitação intensiva com o intuito de aprimorar as habilidades de escrita, leitura e comunicação oral em linguagem científica. Direcionado aos discentes dos cursos de graduação e pós-graduação da UnB e de outras instituições de ensino superior do país, o curso foi estruturado em cinco unidades principais e posteriormente atualizado para incorporar módulos abordando habilidades socioemocionais e ética na utilização de inteligência artificial na redação científica. Os dados apresentados demonstram que foi uma ação eficaz e se mantém, ao longo dos anos, condizentes com seus objetivos.

Apesar das vantagens de um curso autoinstrucional oferecido na plataforma Aprender 2, algumas dificuldades foram evidenciadas, especialmente na integração entre os sistemas SIGAA e Aprender 2, resultando em atrasos nos cadastros dos alunos. A pesquisa de satisfação revelou uma avaliação moderada em relação ao processo de inscrição, apontando a necessidade de aprimoramentos. Eis pontos que podem ser melhorados nas edições posteriores.

Os resultados positivos, no entanto, foram notáveis. Com uma participação expressiva de alunos, o curso alcançou 302 vagas preenchidas e 57,3

Embora o curso tenha enfrentado desafios operacionais, como a questão da inscrição, houve contribuição notória para o aprimoramento acadêmico e pessoal dos participantes. A abordagem adotada, fundamentada na filosofia da linguagem de Bakhtin e seu Círculo sobre os gêneros do discurso, possibilitou uma exposição didática e acessível do conteúdo, ampliando a compreensão dos participantes sobre a linguagem científica.

A ação de extensão teve como principal objetivo a difusão e a popularização do discurso científico, além de fornecer orientações práticas sobre normas técnicas de redação e formatação de textos científicos. Dessa forma, estimulou-se não apenas a difusão de técnicas de leitura e escrita, mas também a ampliação do conhecimento dos graduandos e pós-graduandos, fundamental para a efetiva participação acadêmica e científica. Tem-se, assim, uma experiência que pode ser ampliada e replicada em outros contextos de formação continuada, atentando-se, é claro, às adaptações necessárias ao público-alvo e ao nível de especialização.

Por conseguinte, este estudo da implementação de um curso de escrita científica pelo Instituto de Física da Universidade de Brasília durante a Semana Universitária entre 2020 e 2023 desempenhou um papel relevante na popularização da ciência e na difusão da educação profissional e tecnológica em Física no âmbito da comunidade acadêmica da UnB. Ao atender à necessidade dos universitários na redação de textos científicos durante um período desafiador como a pandemia, o curso não apenas abordou temas essenciais, como estruturação do texto científico e ética acadêmica, mas também alcançou uma audiência diversificada, incluindo participantes de diferentes regiões do Brasil e países lusófonos. Ademais, com uma abordagem remota e taxa de aprovação significativa, acima de 50% em todas as edições, o curso demonstrou sucesso na disseminação do discurso científico, fazendo uma didatização dos conteúdos complexos e dando acesso facilitado às ferramentas digitais. Essa experiência contribuiu, portanto, para a disseminação de normas técnicas na redação científica, elevando a qualidade dos textos acadêmicos e fomentando a educação profissional e tecnológica na comunidade do curso de Física e demais áreas na UnB e outras comunidades que participaram do curso.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Maria Margarida. *Introdução à metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Atlas, 1998.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6022: Informação e documentação – Artigo em publicação periódica científica impressa – Apresentação*. Rio de Janeiro: ABNT, 2003a.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6023: Informação e documentação – Referências – Elaboração*. Rio de Janeiro: ABNT, 2018.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6028: Informação e documentação – Resumo – Apresentação*. Rio de Janeiro: ABNT, 2003b.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 10520: Informação e documentação – Citações em documentos – Apresentação*. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 14724: Informação e documentação: trabalhos acadêmicos: apresentação*. Rio de Janeiro: ABNT, 2011.
- BAKHTIN, Mikhail Mikhailovitch. *Os gêneros do discurso*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Editora 34, 2017.
- BRAIT, Beth (Org.). *Bakhtin: Outros conceitos-chave*. São Paulo: Contexto, 2008.
- BRAIT, Beth; SOUZA-E-SILVA, Maria Cecília (Orgs.). *Texto ou discurso?*. São Paulo: Contexto, 2012.

CEAD. *Plataforma Aprender 2*. Curso de extensão: Escrita científica. CEAD, 2023. Disponível em: <https://aprender2.unb.br/course/view.php?id=2387> Acesso em: 04 jan. 2024.

CEAD. *Portfólio*. Publicações. CEAD, 2024. Disponível em: <https://cead.unb.br/cead/portfolio/producao-bibliografica> Acesso em: 04 jan. 2024.

COSTA, Marcos Rogério Martins. *Letramento científico: contextos, desafios e avanços*. Pós-doutoramento. Supervisor: Prof. Dr. Marcello Ferreira. Instituto de Física. Brasília: Universidade de Brasília, 2022.

COSTA, Marcos Rogério Martins; FERREIRA, Marcello. *Letramento científico no século XXI: um estudo de caso da UnB*. In: Anais da 4ª Jornada Virtual Internacional em Pesquisa Científica: instituições, saberes pedagógicos e práticas escolares. Porto, Portugal, de 4 a 8 de abril de 2022.

COSTA, Marcos Rogério Martins; GIMENES, Roseli; FERREIRA, Marcello. *Letramento científico nas aulas de literatura. Propostas para o ensino de gêneros textuais orais*. In: COSTA, Marcos Rogério Martins; GIMENES, Roseli. *Letramento científicos em tempos de negacionismo: estudos contemporâneos*. Curitiba: Bagai, 2022, p. 11-36.

CRUZ, Roberto Moraes et al. Qualidade da redação científica: desafio à formação de pesquisadores e à publicação. *Revista Psicologia: Organizações e Trabalho*, v. 20, n. 1, p. I-II, jan-mar. 2020.

DIDIO, Lucie. *Leitura e produção de textos: comunicar melhor, pensar melhor, ler melhor, escrever melhor*. São Paulo: Atlas, 2013.

DISCINI, Norma. *Comunicação nos textos: leitura, produção, exercícios*. São Paulo: Contexto, 2007.

FAULSTICH, Enilde Leite de Jesus. *Como ler, entender e redigir um texto*. 27 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

FIORIN, José Luiz (Org.). *Introdução à linguística: I. Objetos de estudo*. 5 ed. São Paulo: Contexto, 2013.

FREIRE, Paulo. *Educação como prática da liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

GARCIA, Othon Maria. *Comunicação em prosa moderna: aprenda a escrever, aprendendo a pensar*. 27. ed. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 2011.

GARCEZ, Lucilia Helena do Carmo. *Técnica de redação: o que é preciso saber para bem escrever*. São Paulo: Martins Fontes, 2012.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas, 2008.

GRILLO, Sheila Vieira de Camargo. Gêneros primários e gêneros secundários no círculo de Bakhtin: implicações para a divulgação científica. *Revista Alfa*, São Paulo, v. 52, n. 1, p. 57-79, 2008.

HALLIDAY, Michael Alexander Kirkwood. *An Introduction to Functional Grammar*. Londres: Arnold, 1985.

HILGERT, José Gaston. Procedimentos de reformulação: a paráfrase. In: PRETI, Dino (Org.). *Análise de textos orais*. São Paulo: FFLCH; USP, 1993. p. 103-127.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MAINGUENEAU, Dominique. *Cenas da enunciação*. Tradução de Maria Cecília Souza-e-Silva e Décio Rocha. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2008.

MAINGUENEAU, Dominique. *Análise de textos de comunicação*. Tradução de Maria Cecília Souza-e-Silva e Décio Rocha. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2013.

MARCUSCHI, Luiz Antônio. *Produção textual, análise de gêneros e compreensão*. São Paulo: Parábola, 2008.

MEDEIROS, João Bosco. *Redação científica*. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2000.

MEDEIROS, João Bosco. *Redação científica: a prática de fichamentos, resumos, resenhas*. 10 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

MEURER, José Luiz; BONINI, Adair; MOTTA-RUTH, Désirée (Orgs.). *Gêneros: teorias, métodos, debates*. São Paulo: Parábola: 2005.

PEREIRA, Maurício Gomes. *Artigos científicos: como redigir, publicar e avaliar*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2011.

PLATÃO, Francisco; FIORIN, José Luiz. *Lições de texto: leitura e redação*. São Paulo: Ática, 1996.



Espalhamento caótico por potenciais atrativos clássicos

Chaotic scattering by classical potential attractants

LUCAS DE LIMA VIEIRA CAMPOS¹, ADRIANE BEATRIZ SCHELIN²

¹Instituto de Física - Universidade de Brasília.

²Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

O espalhamento caótico ocorre em diversos sistemas, e o caos presente é transiente. O caos ocorre apenas em uma região restrita, que chamamos de região de espalhamento. O objetivo é estudar as diferentes configurações e as implicações de elas serem caóticas. Estruturas fractais estão presentes, gerando hipersensibilidade às condições iniciais. Estudamos a interação de potenciais atrativos que interagem classicamente com as partículas de luz espalhadas. Na primeira parte, estudamos o espalhamento de uma partícula livre em um potencial com perfil gaussiano. Em seguida, estudamos o espalhamento por um potencial newtoniano.

Palavras-chave: Espalhamento. Caos. Potencial. Bacia de escape.

Abstract

Chaotic scattering occurs in many systems, and the present chaos is transient. Chaos only occurs in a restricted region, which we call the scattering region. The aim is to study the different configurations and the implications of their being chaotic. Fractal structures are present, generating hypersensitivity to initial conditions. We study the classical interaction of attractive potentials with scattered light particles. In the first part, we studied the scattering of a free particle in a potential with a Gaussian profile. Next, we studied the scattering by a Newtonian potential.

Keywords: Scattering. Chaos. Potential. Basin Scape.

I. INTRODUÇÃO

Um sistema de espalhamento é descrito pelo movimento de uma partícula sujeita a uma força limitada a uma região no espaço. A dinâmica geralmente é linear e simples. Ao interagir com o potencial, há trajetórias que ficam presas no potencial e depois escapam.

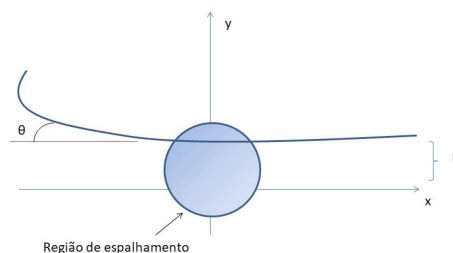


Figure 1: *Características de um processo de espalhamento. Fonte: Elaboração do autor.*

Vários estudos mostram que o comportamento de um sistema desse tipo é caótico. Vamos exemplificar melhor como isso ocorre durante todo o texto.

Uma forma inicial de caracterizar um processo de espalhamento é a distância, b , na qual a partícula passaria pelo centro da região de espalhamento (a origem) se não houvesse nenhuma interação presente (ver fig. 1). (TÉL; GRUIZ, 2006)

Esse parâmetro b é chamado de parâmetro de impacto. Um possível parâmetro de saída é o ângulo entre as linhas retas dos segmentos incidentes e de saída da órbita, o ângulo de deflexão, θ . Assim, uma característica importante do processo de espalhamento é a relação funcional entre o ângulo de deflexão e o parâmetro de impacto, expressa pela função de espalhamento $\theta(b)$.

Quando um sistema é caótico, dizemos que o caos é transiente, pois o movimento complicado é restrito à região do potencial. A dinâmica é altamente sensível às condições iniciais, e estruturas fractais aparecem no espaço de fases.

No espaço de fases, devem haver infinitas órbitas, que podem ser periódicas ou aperiódicas. As órbitas permanecem presas na região de espalhamento por um longo tempo. O conjunto de órbitas que ficam presas na região de espalhamento é chamado de sela caótica, e sua medida é nula. Podemos definir termos como variedades, em que elas podem ser caracterizadas por estáveis e instáveis. A variedade estável da sela caótica é formada por trajetórias que permanecem presas na região de espalhamento para $t \rightarrow \infty$.

Em geral, o processo de espalhamento é a dinâmica de um sistema conservativo que começa e termina em um movimento simples. O espalhamento caótico é a manifestação do caos transitório em sistemas conservativos.

Vamos considerar apenas a abordagem contínua para descrever o sistema de espalhamento, para isso vamos analisar o espalhamento caótico em sistemas sob o efeito de potenciais independentes do tempo a partir do formalismo Hamiltoniano.

II. ESPALHAMENTO POR POTENCIAS ATRATIVOS CLÁSSICOS

Vamos utilizar diferentes abordagens para simular o espalhamento em potenciais atrativos clássicos. Inicialmente, vamos tratar o caso do espalhamento de uma partícula livre

interagindo com um potencial com perfil gaussiano. Em seguida, estudaremos o espalhamento por meio de um potencial gravitacional newtoniano.

II.1. Potencial gaussiano

A partícula deve interagir com o potencial em uma certa região, que denominamos de região de espalhamento. A partícula livre deve interagir com um potencial com perfil gaussiano e, para os nossos interesses, vamos estudar tanto o caso estático quanto o caso em que os potenciais estão em órbita. O potencial está descrito na equação abaixo:

$$U(x,y) = -e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}. \quad (1)$$

O potencial está representado na figura 2.

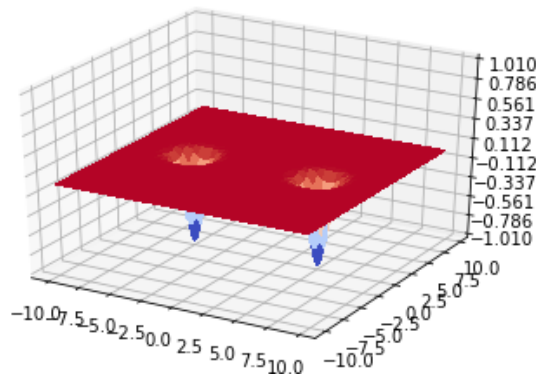


Figure 2: Contorno de potencial. Fonte: Elaboração do autor.

O potencial mencionado acima, que é a soma de dois potenciais, é composto por dois vales de altura controlável, os quais estão a uma distância suficientemente grande para que não interajam entre si.

Temos a Hamiltoniana para o caso de uma partícula livre com potencial gaussiano no caso estático, em que os potenciais permanecem fixos. A Hamiltoniana é explicitamente escrita da seguinte maneira (TAYLOR, 2013):

$$H = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} - e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}, \quad (2)$$

Observa-se que essa Hamiltoniana é independente do tempo, portanto a energia do sistema é constante e o problema é conservativo. Utilizando a Hamiltoniana da equação 2 obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\dot{x} = P_x, \quad (3)$$

$$\dot{y} = P_y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_x = & -2(x+dx)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(x-dx)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\dot{P}_y = & -2(y + dy)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(y - dy)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Temos um sistema aberto, ou seja, as trajetórias típicas se aproximam do potencial, interagem com ele e, em seguida, escapam. Podemos definir a velocidade de entrada da partícula na região de espalhamento como v e a energia total do sistema como E , sendo a energia potencial representada por U . Assim, podemos escrever:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}, \quad (7)$$

A partícula, ao ser defletida pelo potencial, pode ser caracterizada pelo parâmetro de impacto b , que define as condições iniciais do problema e pela função de deflexão v , que define as condições de saída. A função de deflexão, neste caso, é a velocidade de saída da região de espalhamento. Algumas órbitas periódicas permanecem presas no potencial para $t \rightarrow \infty$. Existe um número infinito delas, composto por diferentes combinações das trajetórias. Esse conjunto infinito de órbitas presas é responsável pelo comportamento caótico do espalhamento. O conjunto dessas órbitas instáveis é denominado conjunto de sela caótica.

Podemos analisar duas configurações: quando os potenciais estão parados e quando estão em órbita. Em cada caso, é possível observar diversos fatores importantes que indicam a dinâmica do sistema.

Para obter cada resultado presente, utilizamos a linguagem de programação Python para efetuar os cálculos numéricos. Para todas as simulações, utilizamos o pacote de integração ODEINT. Neste pacote, existem integradores mais antigos implementados em Fortran (principalmente ODEPACK) (LYNCH, 2018). Ele resolve o problema de valor inicial para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Todas as outras simulações foram realizadas com a mesma linguagem e o mesmo pacote de integração.

II.1.1 Potencial gaussiano estático

Para os potenciais gaussianos estáticos, as trajetórias típicas ficam presas na região de espalhamento por um tempo e, em seguida, escapam. A figura 3 (esquerda) mostra a relação entre o parâmetro de impacto e a velocidade de saída. Observa-se uma estrutura fractal que indica a natureza caótica do sistema. Um zoom dessa região está na figura 3 (direita). Uma das trajetórias é mostrada na figura 4. Para estudar as diferentes condições de escape observadas na figura 3, vamos calcular as bacias de escape, que separam diferentes direções de saída da região de espalhamento. Para o presente potencial, há duas opções de saída para a partícula que interage com ele, cada saída denotada por uma cor. A bacia de escape é mostrada na figura 5.

Cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, representando duas regiões de escape. Há fronteiras nas bacias, de modo que no presente caso percebemos que ela não é suave, ou seja, é complexa, formando uma geometria fractal.

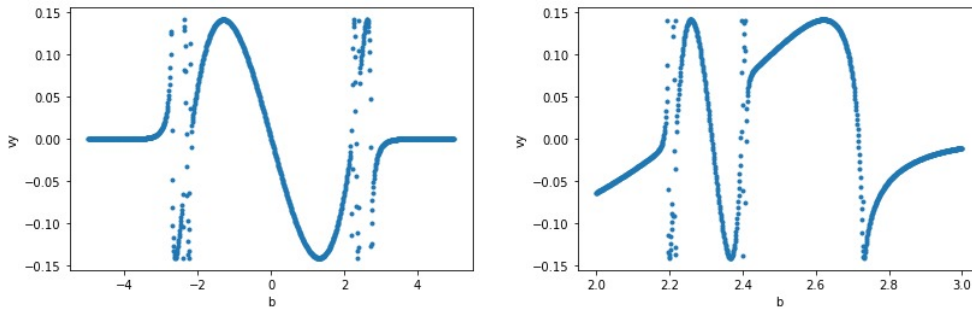


Figure 3: Figura da esquerda: Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Figura da direita: Zoom para mostrar a figura fractal. Fonte: Elaboração do autor.

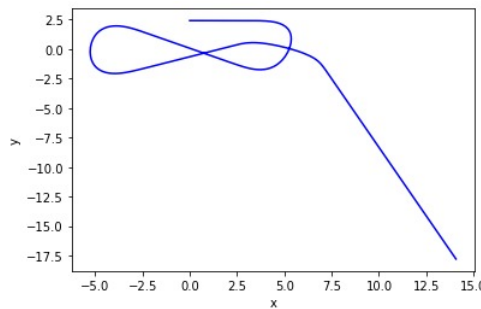


Figure 4: Trajetória no plano x e y . Fonte: Elaboração do autor.

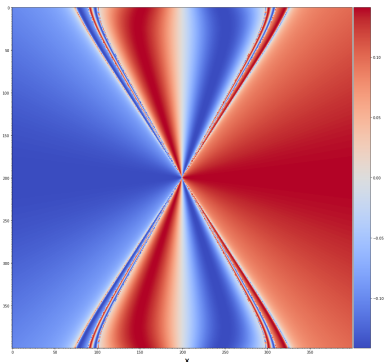


Figure 5: Bacia de escape para a partícula. Fonte: Elaboração do autor.

Agora devemos analisar o caso em que os potenciais estão em órbita.

II.1.2 Potenciais gaussianos em órbita

Para o caso em que os potenciais estão em órbita, temos o gráfico do parâmetro de impacto pela velocidade de saída na figura 6 da direita. Algumas trajetórias com algumas condições iniciais próximas às estruturas fractais são dadas pelas figuras 7. A trajetória de um potencial, que está em vermelho, é dada pela figura 6 da esquerda.

Temos que as trajetórias nas figuras 7 começam similares, mas se separam e cada uma escapa em uma direção diferente. Assim como no caso dos potenciais parados, para estudar as diferentes regiões de escape, calculamos a bacia de escape, que está na figura 8.

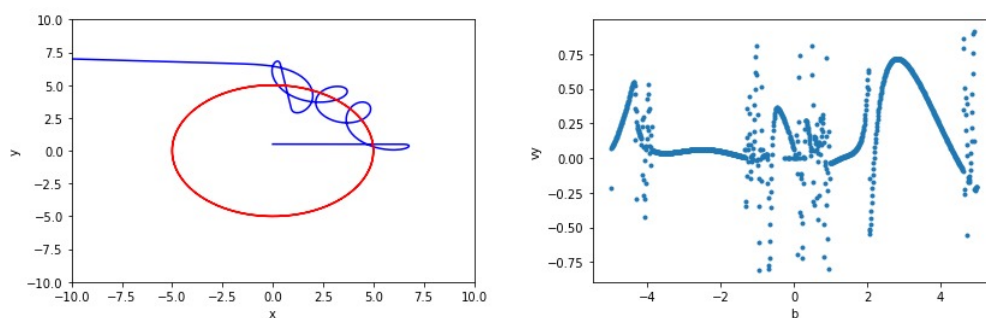


Figure 6: Figura da Esquerda: Trajetórias no plano x e y . Figura da Direita: Parâmetro de impacto pela velocidade de saída Fonte: Elaboração do autor.

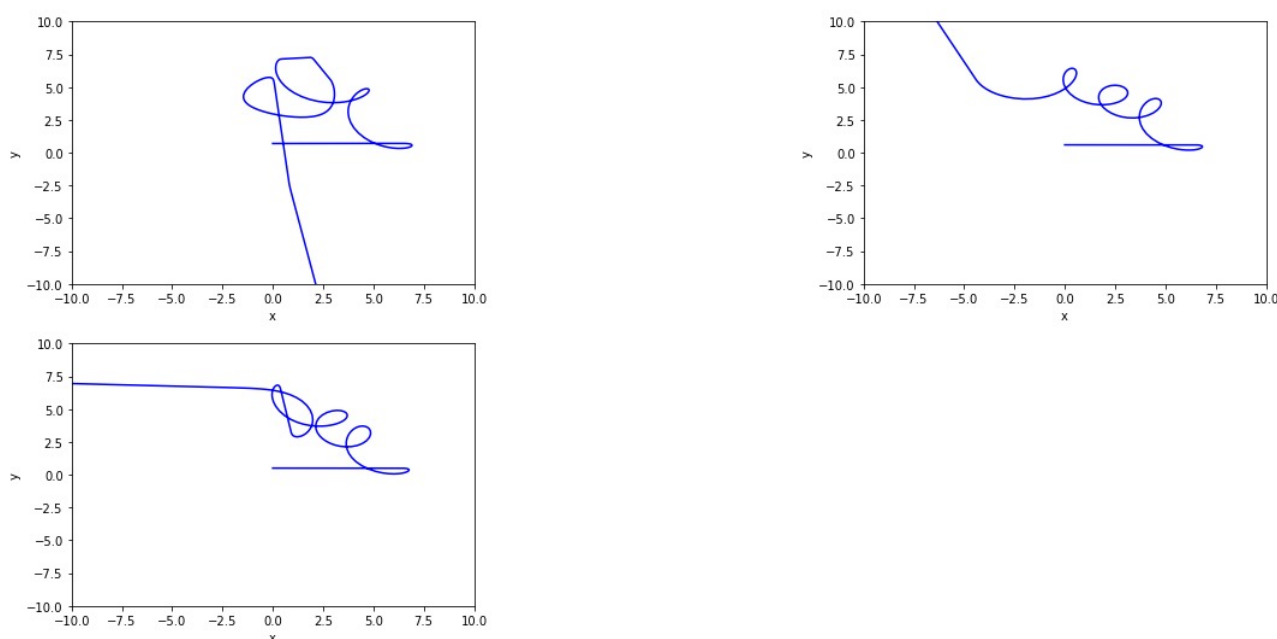


Figure 7: Trajetórias no plano x e y . Fonte: Elaboração do autor.

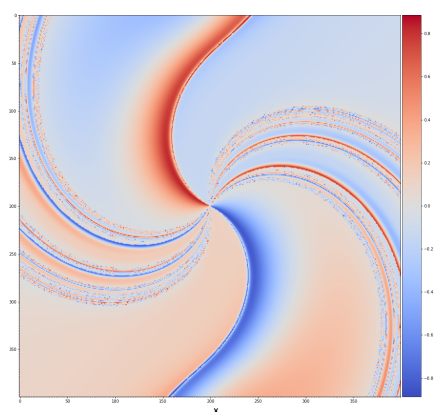


Figure 8: Bacia de escape para a partícula. Fonte: Elaboração do autor.

Conforme discutido no caso dos potenciais estáticos, cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de

espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, além de algumas cores intermediárias que derivam do azul e do vermelho, representando assim duas regiões de escape. O caráter caótico é evidenciado pela existência de estruturas fractais nas regiões de escape (TÉL; GRUIZ, 2006) e (MONTEIRO, 2006).

A rotação dos potenciais traz um novo cenário complexo e rico, com um novo conjunto de órbitas periódicas e aperiódicas, motivo pelo qual queremos verificar o que ocorre com o sistema de espalhamento quando os potenciais estão em órbita. O parâmetro escolhido ω , que define a rotação do potencial, foi de 0,01. É importante notar que esse valor é bem maior do que o usual, logo os potenciais apresentam maior rotação em comparação com um caso mais natural.

Na próxima seção, abordaremos o espalhamento de uma partícula interagindo com dois corpos por meio do potencial gravitacional newtoniano. Esse é um caso mais realista do que os apresentados até agora para o espalhamento no caso contínuo.

II.2. Potencial gravitacional newtoniano

Agora vamos considerar o problema de uma partícula teste interagindo com dois corpos. A figura 9 apresenta as principais informações necessárias para a solução do problema.

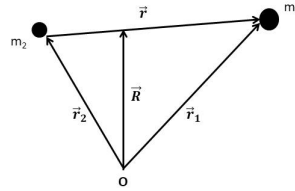


Figure 9: Problema de dois corpos e o centro de massa. Fonte: Elaboração do autor.

O potencial utilizado é o newtoniano, dado pela equação 8.

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (8)$$

onde G é a constante universal gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ a distância entre os dois corpos.

Esse potencial assume que, quando r tende ao infinito, o potencial é nulo. Ou seja, a partícula só interage com o potencial na região de espalhamento, fora dela não há interação.

A discussão feita acima para o potencial com perfil gaussiano é válida também para o potencial newtoniano, apresentando algumas diferenças. O potencial newtoniano não tem dois vales de altura ajustável, já que a intensidade da interação depende da massa dos corpos presentes na equação.

As equações de movimento para o problema de dois corpos com interação gravitacional são:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (10)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

As trajetórias dos dois corpos no espaço de fase evoluindo no tempo são mostradas na figura 10 da direita, enquanto a trajetória do centro de massa é mostrada na figura 10 da esquerda.

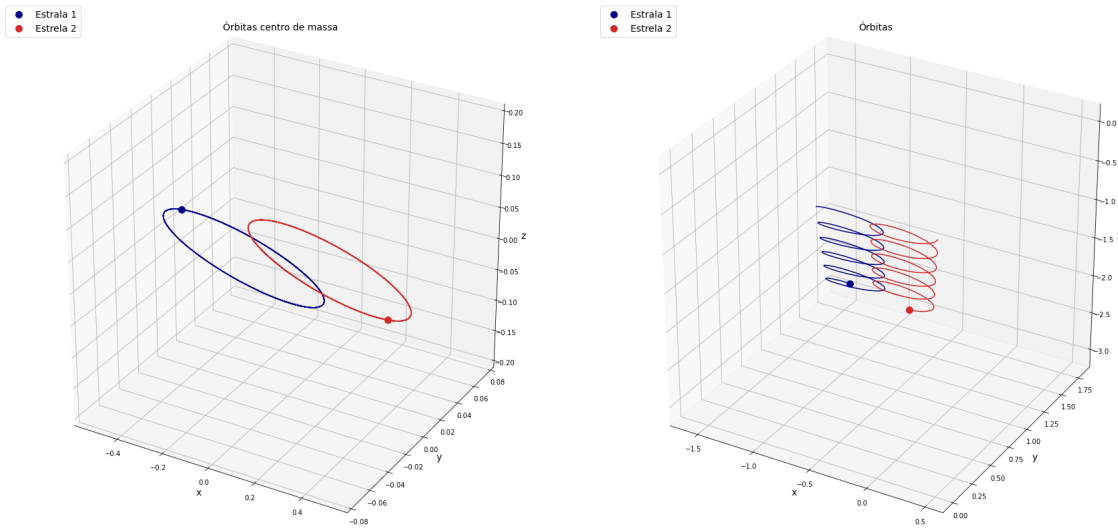


Figure 10: Figura da esquerda: Trajetória do centro de massa no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

Todas as integrações foram realizadas por meio da normalização das equações diferenciais. Utilizamos a massa do Sol como referência, além da distância entre as estrelas em questão e o período da órbita para normalizar as equações. O processo de integração foi caracterizado pelo uso do pacote ODEINT do Python (LYNCH, 2018).

No caso de dois corpos, não há a existência de caos. Mas e se adicionarmos um terceiro corpo? Analisaremos esse caso na próxima seção.

III. ESPALHAMENTO CAÓTICO PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Quando acrescentamos uma nova partícula para o problema as equações de movimento mudam, ficando na forma:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (14)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (16)$$

$$m_3 \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} = \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (17)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{v}_3 \quad (18)$$

Nas figuras que foram apresentadas, todas as massas dos corpos com massa não nula chamaremos de buracos negros, uma vez que é uma representação clássica de um buraco negro. A partícula de massa nula será chamada de fóton, como uma representação clássica da luz. Todas as representações presentes são clássicas, utilizando apenas a mecânica newtoniana.

Para uma partícula de massa nula, temos a função de deflexão (velocidade final em z pelo parâmetro de impacto) para alguns parâmetros específicos na figura 11 da esquerda. No presente caso, a massa dos outros dois corpos é igual. Também podemos ver o tempo de escape pelo parâmetro de impacto na figura 11 da direita. As trajetórias para algumas condições iniciais, no espaço tridimensional, estão na figura 12. A partícula de massa nula é a que escapa da região de espalhamento.

Quando analisamos a figura 11 da esquerda, percebemos que existem estruturas fractais presentes na função de deflexão, tornando-a bem irregular em certas regiões. Conforme já discutido, a existência dessas estruturas fractais implica na existência de caos.

Também podemos analisar a figura 11 da direita, que mostra o tempo em que uma partícula permanece na região de espalhamento. Novamente, estudamos em relação ao parâmetro de impacto. Assim como na função de deflexão, existem singularidades no tempo de escape que se intercalam com algumas regiões suaves. Quando o tempo de escape é pequeno, a partícula escapa da região de espalhamento. As regiões de irregularidades estão relacionadas às divergências no tempo de escape.

As duas figuras, a função de deflexão e o tempo de escape, têm algo em comum: as regiões irregulares. Essas regiões apresentam as condições iniciais nas quais as órbitas periódicas ficam presas na região de espalhamento.

As trajetórias para algumas condições iniciais no espaço tridimensional estão na figura 12 da esquerda. As trajetórias do centro de massa do problema estão na figura 12 da direita. Para outras condições iniciais, encontramos a trajetória no espaço na figura 13 da esquerda e a trajetória do centro de massa na figura 13 da direita. É possível obter diversas outras trajetórias, e por meio delas percebemos a sensibilidade às condições iniciais do problema

de três corpos. Mudando as condições iniciais, não podemos prever com precisão a evolução do sistema.

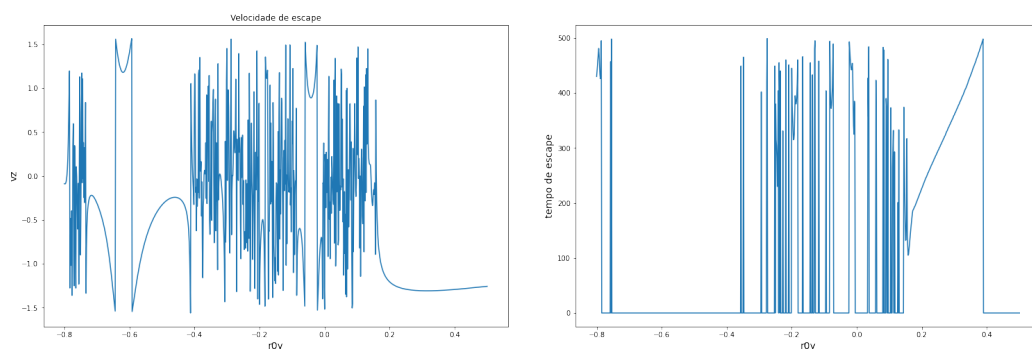


Figure 11: Figura da esquerda: Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Figura da direita: Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: Elaboração do autor.

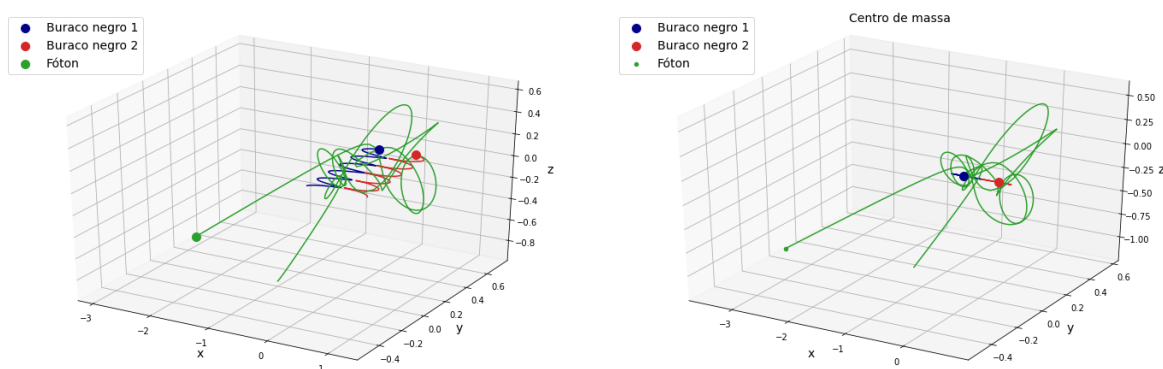


Figure 12: Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

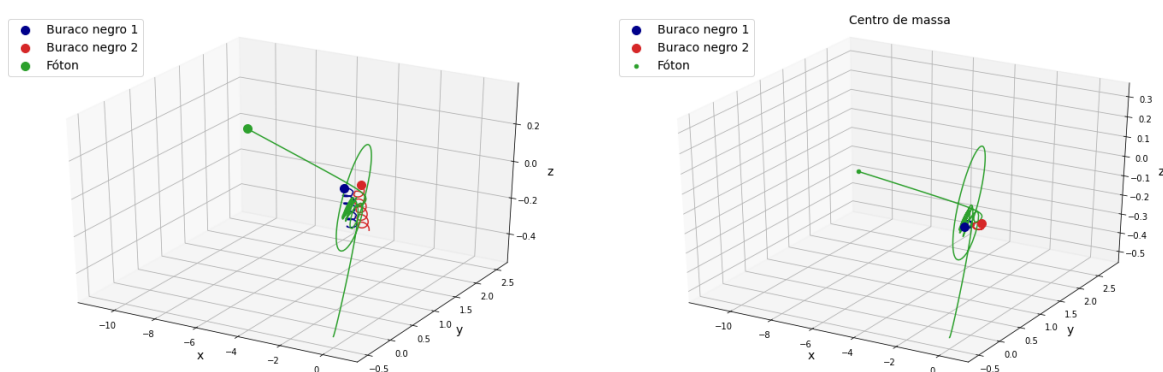


Figure 13: Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

Quando fazemos a massa dos outros dois corpos serem diferentes, mas mantendo a terceira partícula com massa nula, encontramos a função de deflexão e o tempo de escape

da partícula nas figuras 14 da esquerda e 14 da direita. Além disso, temos uma trajetória no espaço tridimensional e a trajetória do centro de massa nas figuras 15 da esquerda e 15 da direita. Neste caso percebemos as mesmas relações discutidas anteriormente.

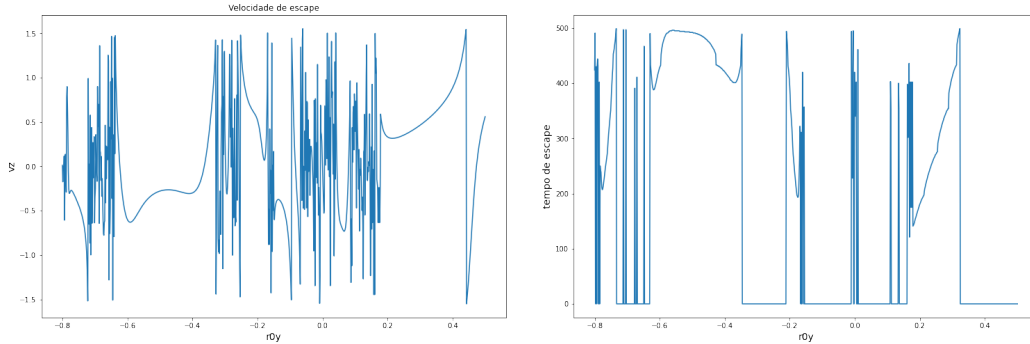


Figure 14: Figura da esquerda: Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Figura da direita: Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: Autoral.

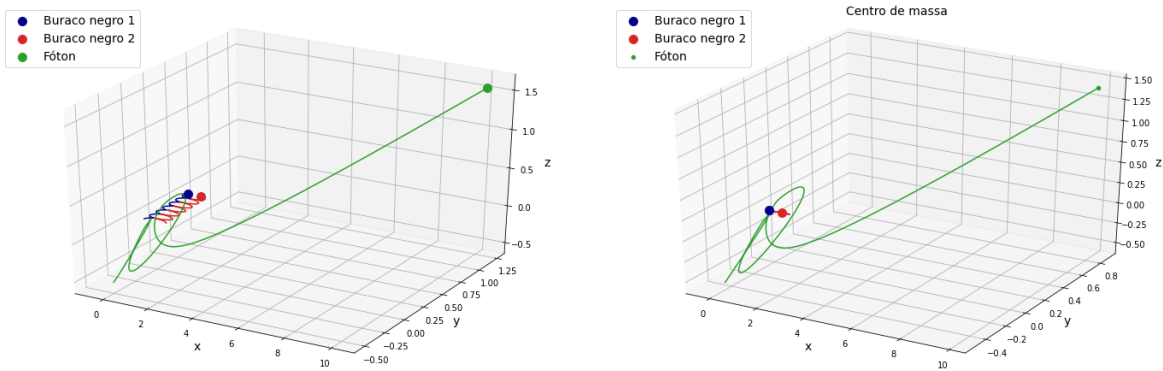


Figure 15: Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x, y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x, y e z . Fonte: Elaboração do autor.

IV. CONCLUSÃO

É perceptível o caráter caótico no sistema de uma partícula interagindo com dois potenciais gaussianos e também no caso de uma partícula de massa nula interagindo com outros dois corpos. A descrição do espalhamento caótico em potenciais clássicos conduziu à compreensão que a natureza caótica de um sistema aparece por meio de estruturas fractais presentes no espaço de fases. Para os potenciais gaussianos, essas estruturas apareceram e foram obtidas bacias de escape, que representam as regiões de escape da partícula. Para o potencial newtoniano, analisamos a existência de caos por meio da função de deflexão e o tempo de escape. As estruturas fractais estão presentes em diferentes situações testadas.

A percepção de estruturas fractais e a grande sensibilidade às condições iniciais estão atreladas. Conforme percebemos, as condições iniciais encontradas por meio das estruturas fractais presentes na bacia de escape conduziram a um novo estudo, deixando de lado o

caso artificial proposto no problema de uma partícula livre e iniciando os estudos para o caso da interação de corpos por meio do potencial newtoniano. Para esse caso, notamos de forma clara que, quando três corpos interagem, a sensibilidade às condições iniciais é a principal razão para a existência de caos no sistema.

REFERENCES

- LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications using Python*. [S.l.]: Birkhäuser, Cham, Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. 44, 48
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos, 2nd edition*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006. 47
- TAYLOR, J. R. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: Bookman, 2013. 43
- TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics*. [S.l.]: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2006. 42, 47



Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler

Two-body problem. Part I: Newtonian theory and Kepler's laws

FÁBIO M. S. LIMA^{*1}

¹Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

Neste artigo, que contém a primeira parte de um longo trabalho sobre o problema clássico do movimento de dois corpos atraindo-se mutuamente através de forças que agem ao longo da reta que os une, apresentamos um texto completo e rico em detalhes técnicos sobre o problema de dois corpos atraindo-se com a força gravitacional de Newton (1687), que certamente servirá como material didático de apoio para professores e alunos envolvidos nas disciplinas de Mecânica Clássica. Após obter a solução analítica exata da equação de movimento e todas as trajetórias possíveis, mostramos que as órbitas limitadas periódicas e não-circulares sempre são elípticas sem avanço do periélio, em pleno acordo com as três leis de Kepler. Indicamos, ao final, como ficam os resultados para o análogo eletrodinâmico, ou seja, dois corpúsculos com cargas elétricas opostas atraindo-se através da força de Coulomb. Na parte 2, a ser publicada neste mesmo periódico, apresentaremos a tradução inédita para o português do artigo original de Einstein (1915), em que ele usa a Teoria da Relatividade Geral para gerar uma solução aproximada para o problema gravitacional de dois corpos relativístico, obtendo órbitas elípticas com uma taxa de precessão do periélio que está em ótimo acordo para o planeta Mercúrio, mas não para os demais planetas. Por fim, na parte 3 apresentaremos a solução exata fornecida pela Mecânica Relacional (1989), o que nos permitirá comparar os modelos de Newton, Einstein e Assis, mostrando que, embora os dois últimos forneçam a mesma taxa de precessão (43"/século), as equações de movimento não são idênticas. Mostraremos também que o avanço do periélio previsto pela Mecânica Relacional se dá em relação às estrelas fixas, justamente como tem sido observado e medido pelos astrônomos, o que não ocorre nos modelos relativísticos.

Palavras-chave: Mecânica Clássica. Força gravitacional. Problema de dois corpos. Precessão do periélio.

^{*}Corresponding author: fabio@fis.unb.br

Abstract

In this article, which contains the first part of a long work on the classical problem of the movement of two bodies attracting each other through forces that act along the straight line that joins them, we present a complete text rich in technical details about the problem of two bodies attracting each other with the gravitational force of Newton (1687), which will certainly serve as supporting teaching material for teachers and students involved in Classical Mechanics subjects. After obtaining the exact analytical solution of the equation of motion and all possible trajectories, we show that periodic and non-circular limited orbits are always elliptical without advancing perihelion, in full agreement with Kepler's three laws. At the end, we indicate what the results look like for the electrodynamic analogue, that is, two corpuscles with opposite electrical charges attracting each other through the Coulomb force. In part 2, to be published in this same journal, we will present the unprecedented translation into Portuguese of Einstein's original article (1915), in which he uses the Theory of General Relativity to generate an approximate solution to the gravitational problem of two relativistic bodies, obtaining elliptical orbits with a perihelion precession rate that is in excellent agreement for the planet Mercury, but not for the other planets. Finally, in part 3 we will present the exact solution provided by Relational Mechanics (1989), which will allow us to compare the Newton, Einstein and Assis models, showing that, although the last two provide the same precession rate (43"/century), the equations of motion are not identical. We will also show that the advancement of perihelion predicted by Relational Mechanics occurs in relation to fixed stars, precisely as has been observed and measured by astronomers, which does not occur in relativistic models.

Keywords: Classical Mechanics. Gravitational force. Two-body problem. Precession of perihelion.

I. INTRODUÇÃO

Na Mecânica Clássica, o problema de determinar o movimento em um sistema composto por duas partículas que interagem apenas entre si, desprezando-se ações externas ao sistema, é conhecido como *problema de dois corpos*. Esse problema foi vislumbrado primeiramente por J. Kepler em 1609 [1], analisando os dados astronômicos obtidos por T. Brahe para a órbita de Marte em torno do Sol, os quais, por uma pequena diferença de 8' de grau, revelaram-se mais compatíveis com uma trajetória *elíptica* do que com a circular, proposta por Copérnico em 1543. Entretanto, a teoria correta só surgiu com Isaac Newton (1642–1727), no seu monumental *Principia* (1687), onde foi proposta uma força gravitacional proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles [2, 3]. A abordagem geométrica usada por Newton logo abriria espaço para o tratamento algébrico/analítico dos franceses e suíços, baseado em equações, de modo que, em 1710, Johann Bernoulli obteve a solução analítica exata do problema de dois corpos, o que permitiu prever com simplicidade e acurácia a trajetória dos astros no sistema solar, tanto para órbitas fechadas quanto abertas.¹ Os exemplos mais comuns são os sistemas

¹O *problema de três corpos*, entretanto, não possui solução em termos de funções *algébricas* das posições e das velocidades dos corpos, como provado por H. Bruns em 1887 [4]. Este resultado foi generalizado em 1896

Sol-planeta (que ficou conhecido como problema de Kepler), Sol-cometa e Terra-Lua.² Na próxima seção, resolveremos o problema de dois corpos gravitacional detalhadamente, reescrevendo-o na forma equivalente de *dois problemas de um corpo*: um corpo fictício com massa M igual à soma das massas dos corpos, localizado no centro de massa (CM) do sistema, o que é trivial [o CM estará em repouso ou movimento retilíneo uniforme (MRU)], e um outro corpo fictício com massa reduzida μ , movendo-se sob a ação da mesma força que age sobre os corpos originais, porém como se ele fosse atraído rumo a um centro fixo (o chamado *problema de força central*).³ Após analisar as possíveis trajetórias, apresentaremos um atalho que permite obter os pontos de retorno das órbitas elípticas (i.e., o periélio e o afélio), a partir dos quais calculamos os parâmetros geométricos da trajetória (semi-eixo maior e excentricidade), bem como os parâmetros físicos (energia mecânica e momento angular).

II. PROBLEMA CLÁSSICO DE DOIS CORPOS

Seja S um *referencial* em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU) em relação ao *espaço absoluto*, que é o referencial inercial utilizado originalmente por Newton [2], ao qual associaremos um sistema de coordenadas cartesianas representado pelos eixos x , y e z , ortogonais entre si e interceptando-se na origem O , como indicado na Fig. 1. Na mesma figura, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vetores-posição de duas partículas com massas m_1 e m_2 , respectivamente. Lá, indicamos também o vetor *posição relativa*

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1)$$

e o vetor-posição do *centro de massa* (CM)

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad (2)$$

onde $M \equiv m_1 + m_2$ é a massa total do sistema. Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{R}$ formam as *coordenadas de Jacobi* do sistema. No Apêndice A, mostramos que dois corpos puntiformes *sempre* estão alinhados com o seu CM. As posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ dos corpos reais podem ser obtidas invertendo-se essa mudança de coordenadas,⁴ o que resulta em

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases} \quad (3)$$

por H. Poincaré, mostrando que não existe uma solução exata na forma de funções elementares das posições, velocidades e razões das massas [5]. Poincaré também percebeu que as trajetórias são extremamente sensíveis às condições iniciais (caos determinístico).

²A solução analítica para dois corpos eletrizados atraindo-se com uma força elétrica dada pela lei de Coulomb é análoga.

³Note que se um dos corpos tiver massa muito maior do que a do outro, ele praticamente não se moverá, caso em que a solução do problema de força central funciona muito bem para o *movimento real* do corpo mais leve.

⁴No Apêndice B, isso é feito com um formalismo matricial elegante.

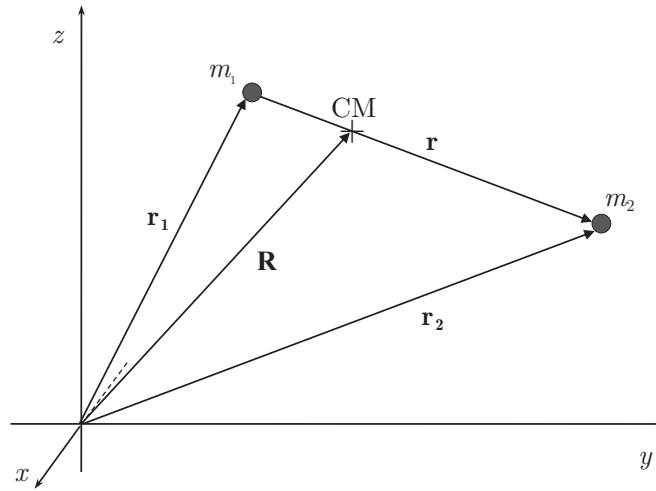


Figura 1: Vetores-posição para dois corpos e para o centro de massa. Note que $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é o vetor posição-relativa.

Para o sistema de dois corpos isolado de agentes externos, a 2ª lei de Newton fornece

$$\vec{F}_{12} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \quad (4)$$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1. \quad (5)$$

Como é usual na literatura, estamos usando $\vec{F}_{12}$ para denotar a força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2. De acordo com a 3ª lei de Newton, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, ou seja $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \ddot{\vec{r}}_2$, o que pode ser escrito como $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$. Isto equivale a

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{0}. \quad (6)$$

Portanto, $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \equiv \vec{P}_{tot} = cte$. Este momento linear pode ser escrito como

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \vec{P}_{CM} = \vec{P}_{tot} = cte. \quad (7)$$

Fica, assim, estabelecida a *conservação da quantidade de movimento total* do sistema de dois corpos, de acordo com a qual o CM do sistema não pode ser acelerado na ausência de forças externas (ou quando a resultante delas for nula). Note que, nesta seção, todos os movimentos e grandezas cinemáticas são relativos ao *espaço absoluto*, como identificado por Newton no início do Livro I do *Principia* (no Escólio, logo após as Definições) [2], que é um referencial invisível, sem relação com nada material (ou seja, o *vácuo*, entendido aqui como o espaço físico desprovido de matéria), cuja existência é “detectada” no famoso *experimento do balde*.⁵ Este referencial encontra-se sempre em *repouso absoluto* e, uma vez aceita a sua existência, qualquer outro referencial em repouso ou MRU em relação a ele será

⁵Newton se convence da existência desse referencial após analisar todas as possibilidades de explicação para a formação da superfície côncava da água, na situação em que ela gira juntamente com o balde [2].

um *referencial inercial* (no qual valem as leis de Newton originais, sem forças fictícias). Da Eq. (1), segue que

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1}, \quad (8)$$

o que implica em

$$m_1 \vec{F}_{12} - m_2 \vec{F}_{21} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}, \quad (9)$$

e, da 3ª lei de Newton, conclui-se que

$$\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{12} = \ddot{\vec{r}}, \quad (10)$$

a qual prontamente reduz-se a

$$\vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}}, \quad (11)$$

onde μ é a *massa reduzida* do sistema, dada implicitamente por $1/\mu \equiv 1/m_1 + 1/m_2 = M/(m_1 m_2)$. Esta é a equação diferencial que rege o movimento relativo, que se dá como se uma partícula de massa μ estivesse se movendo sob a ação da força $\vec{F}_{12}$, a uma distância r de um centro de força *fixo*, o chamado *problema de força central*. Com isso, o problema de dois corpos é reduzido a dois problemas de um corpo: um com massa M localizado no CM, em repouso ou MRU, como previsto na Eq. (7), e outro com massa μ em $\vec{r}(t)$, regido pela Eq. (11).

II.1. Conservação do momento angular e equação diferencial de Binet

Por definição, $\vec{L}_j \equiv \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ é o momento angular da j -ésima partícula. Com isso,

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \\ &= \left(\vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times m_1 \vec{v}_1 + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times m_2 \vec{v}_2 \\ &= \left(m_1 \vec{R} \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{R} \times \vec{v}_2 \right) + \frac{m_1}{M} \vec{r} \times m_2 \vec{v}_2 - \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_1 \\ &= \vec{R} \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) + \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ &= \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{R} \times \vec{P}_{CM} + \vec{r} \times \vec{p} \\ &= \vec{L}_{CM} + \vec{L}, \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\vec{p} \equiv \mu \dot{\vec{r}}$ é a quantidade de movimento do corpo fictício de massa μ , $\vec{L}_{CM} \equiv \vec{R} \times \vec{P}_{CM}$ é o momento angular do corpo fictício de massa M e $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular do corpo fictício de massa μ em relação ao centro de força. Da Eq. (7), segue que $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ e, sendo $\vec{L}_{CM} \equiv M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$, então

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = M \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + M \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = \vec{0}, \quad (13)$$

o que mostra que $\vec{L}_{CM}$ é uma constante de movimento. Para o outro momento angular, podemos fazer

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{0} + \vec{r} \times (\mu \ddot{\vec{r}}) \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_{12}.\end{aligned}\quad (14)$$

Estes dois resultados são válidos qualquer que seja a força de interação entre os corpos 1 e 2. Para uma força agindo *ao longo da reta que une os corpos*, caso ao qual iremos nos restringir daqui em diante, necessariamente $\vec{F}_{12} = \alpha \vec{r}$ para algum $\alpha \neq 0$, de modo que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{12} = \vec{r} \times \alpha \vec{r} = \alpha (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}, \quad (15)$$

mostrando que, para este tipo de força, $\vec{L}$ também é uma constante de movimento. Surgem, então, duas possibilidades:

- (i) $|\vec{L}| = 0$: significa que os vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$ são sempre paralelos, o que só ocorrerá se o movimento relativo for *retilíneo*, com a reta-suporte da trajetória sendo coincidente com a reta que une os corpos (a trajetória retilínea poderá ser observada em qualquer referencial inercial).
- (ii) $|\vec{L}| > 0$: neste caso, existe um eixo perpendicular ao plano fixo no qual a trajetória será descrita, que é o plano definido pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$. Sem perda de generalidade, escolheremos o plano cartesiano xOy como sendo o plano da trajetória, de modo que o referido eixo será o eixo z .

Para o caso $|\vec{L}| > 0$, em que estamos mais interessados, a equação diferencial que rege o movimento no plano xOy pode ser obtida a partir da 2ª lei de Newton para o movimento relativo, nossa Eq. (11):

$$\vec{F}_{12} = \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = f m_1 m_2 \hat{r}, \quad (16)$$

onde $f = f(r, \dot{r}, \ddot{r})$. Ou seja,⁶

$$\ddot{\vec{r}} = M f \hat{r}. \quad (17)$$

Assim, a dinâmica do sistema fica determinada pela massa M e pelas condições iniciais $\vec{r}(0)$ e $\vec{v}(0)$. Isto reduz o problema ao de um corpo fictício de massa μ atraído por um outro corpo fictício de massa M fixo na origem $\vec{r} = \vec{0}$, distando r dele. Para resolver a Eq. (17), é

⁶Note que a Eq. (17) só é válida se as *massas inerciais* dos corpos 1 e 2 forem iguais às respectivas *massas gravitacionais*. Na mecânica newtoniana, a igualdade dessas massas é uma *coincidência*, conforme vemos na Proposição 6 do Livro III do *Principia*, onde Newton relata que os experimentos que ele realizou com pêndulos revelaram que uma possível diferença relativa teria que ser menor que $1/1000$ [3]. Experimentos mais precisos foram realizados por Bessel (1832), que reduziu esta possível diferença para 2×10^{-5} , e por Eötvös (1909), que, usando uma balança de torção, reduziu-a para 10^{-8} . De acordo com o experimento mais recente (2017), a diferença é menor do que 10^{-15} [6].

conveniente usarmos *coordenadas polares*, nas quais a aceleração $\ddot{\vec{r}} \equiv d\dot{\vec{r}}/dt$ do corpo fictício de massa μ é dada por (ver dedução no Apêndice C)

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta}. \quad (18)$$

Substituindo isto na Eq. (17), obtemos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = M f(r, \dot{r}, \ddot{r}) \quad (\text{radial}) \quad (19)$$

e

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (\text{azimutal}). \quad (20)$$

A equação diferencial *azimutal* pode ser reescrita na forma $r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$, a qual reduz-se a $d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$. Isto implica que $r^2\dot{\theta} = \text{cte.} \equiv h$, onde $h = L/\mu = r_0 v_0$ é o momento angular por unidade de massa reduzida.⁷ Como veremos mais adiante, a conservação de h é equivalente à 2ª lei de Kepler (lei das áreas). Usando esta constante de movimento na equação diferencial *radial*, prontamente obtemos

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = M f. \quad (21)$$

Embora o procedimento matemático usual seja resolver esta equação de movimento a fim de determinar $r(t)$ e depois usar a equação azimutal para obter $\theta(t)$, o cálculo da trajetória fica mais simples usando θ como a única variável independente, visando obter $r = r(\theta)$. Para isto, vamos usar o fato de que

$$\begin{aligned} \dot{r} &\equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} \\ &= -h \frac{d(1/r)}{d\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &\equiv \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{h}{r^2} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d(1/r)}{d\theta} \right] \\ &= -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Estas derivadas sugerem que devemos usar a *substituição de Binet*, qual seja $u = 1/r$, na Eq. (21). Assim,

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = M f, \quad (24)$$

ou seja,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{M}{h^2} \frac{f}{u^2}, \quad (25)$$

que é a *equação diferencial de Binet* (1818).

⁷Note que $\dot{\theta} = L/(\mu r^2)$ pode, a princípio, ser integrada, fornecendo $\theta(t) - \theta_0 = \frac{L}{\mu} \int_0^t \frac{dt'}{[r(t')]^2}$. Para uma órbita *circular*, $r = \text{cte.}$ e a integral é imediata, resultando em $\theta(t) = \theta_0 + L/(\mu r^2) t$, que é a dependência linear em t de um movimento circular uniforme (MCU), no qual $\omega \equiv d\theta/dt = L/(\mu r^2) = \text{cte.}$

II.2. Lei Universal da Gravitação

Vamos determinar a solução $r = r(\theta)$ da E.D.O. de Binet, Eq. (25), no caso da força gravitacional de Newton (1687) [3]:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (26)$$

onde G é a constante universal da gravitação.⁸ Substituindo $f = -G/r^2$ na Eq. (25), obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{M}{h^2} \frac{(-G/r^2)}{u^2} = \frac{GM}{h^2} \frac{1}{u^2 r^2} = \frac{GM}{h^2} = cte., \quad (27)$$

ou, simplesmente,

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2} = cte. \quad (28)$$

Esta é uma E.D.O. linear de 2ª ordem com *coeficientes constantes*, de modo que sua solução necessariamente tem que ser a soma da solução da E.D.O. homogênea associada, ou seja $u'' + u = 0$ (E.D.O. do oscilador harmônico), com uma solução particular. Portanto,

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2}. \quad (29)$$

Para uma trajetória *circular*, teremos $u = 1/r = 1/A = GM/h^2$, de modo que o raio da trajetória será $r = A = h^2/(GM) = cte$. Para outras trajetórias, daqui em diante vamos fixar a origem O no ponto em que se encontra o CM (ou seja, no foco) e o eixo polar passando no periélio, tomado aqui como a posição inicial, i.e. $\vec{r}(0) = r_0 \hat{r} = r_P \hat{r}$, de modo que $\theta_0 = 0$. Com isto, a solução acima reduz-se a $u(\theta) = C \cos \theta + GM/h^2$, o que equivale a

$$r(\theta) = \frac{A}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad \forall \theta \geq 0, \quad (30)$$

que é a equação de uma *curva cônica* em coordenadas polares, onde $A = h^2/(GM)$ é o *semi latus rectum* e $\epsilon = CA = Ch^2/(GM)$ é a excentricidade, como explicado no Apêndice D.⁹

Surtem, então, *três possibilidades*:

- (i) $\epsilon > 1$: neste caso, $C > GM/h^2$ e a trajetória será um *ramo de hipérbole* (trajetória aberta). Note que há dois valores $\theta = \pm \theta_1$ tais que $\cos \theta_1 = -GM/(Ch^2)$, ou seja $\theta_1 = \theta_0 + \arccos(-1/\epsilon)$, obtido com $r \rightarrow \infty$. Em outras palavras, $\theta = \pm \theta_1$ é a equação das *assíntotas*. Obviamente, este caso só ocorrerá se $v_0 > v_{esc}$, onde $v_{esc} = \sqrt{2GM/r_0}$ é a *velocidade de escape*.¹⁰

⁸Esta fórmula não aparece no *Principia*, embora ela possa ser deduzida de alguns trechos do Livro I (Proposições 72 a 76, incluindo os Corolários 1 a 4) e do Livro III (Proposições 5, 7 e 8), bem como no Escólio Geral, no fim do livro [2, 3].

⁹Mais adiante, na Eq. (E.5), mostraremos que $A = a(1 - \epsilon^2)$.

¹⁰A velocidade de escape é obtida aplicando-se a lei de conservação da energia, Eq. (51), para o corpo fictício de massa μ partindo da posição inicial $\vec{r}(0) = r_0 \hat{r}$ com velocidade escalar relativa v_0 , e assumindo que ele atingirá um ponto infinitamente distante com velocidade final nula, de modo que $\mu v_{esc}^2/2 - G m_1 m_2/r_0 = 0$.

- (ii) $\epsilon = 1$: neste caso, $C = GM/h^2$ e a trajetória será uma *parábola*, pois $r \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow \pi$ rad (trajetória aberta). Dessa forma,

$$r_0 = \frac{h^2/(GM)}{1 + \cos 0} = \frac{h^2}{2GM}, \quad (31)$$

onde $h = r_0 v_0$. Portanto, $v_0 = \sqrt{2GM/r_0} = v_{esc}$.

- (iii) $0 \leq \epsilon < 1$: isto equivale a $\sqrt{GM/r_0} \leq v_0 < v_{esc}$ e, neste caso, $C < GM/h^2$ e $r(\theta)$ permanece finito e não-nulo para todo $\theta > 0$, o que gera uma trajetória fechada *elíptica*, com foco sobre a origem e *sem precessão do periélio* (em relação ao espaço absoluto).¹¹

As trajetórias correspondentes a cada um destes casos são apresentadas na Fig. 2. Note que, para $v_0 < \sqrt{GM/r_0}$, o corpo fictício de massa μ não poderá manter uma órbita periódica, pois os corpos reais (com tamanho finito) irão se chocar durante sua ‘queda’ rumo ao CM. Entretanto, aqui neste trabalho vamos nos restringir a *trajetórias sem colisão*.

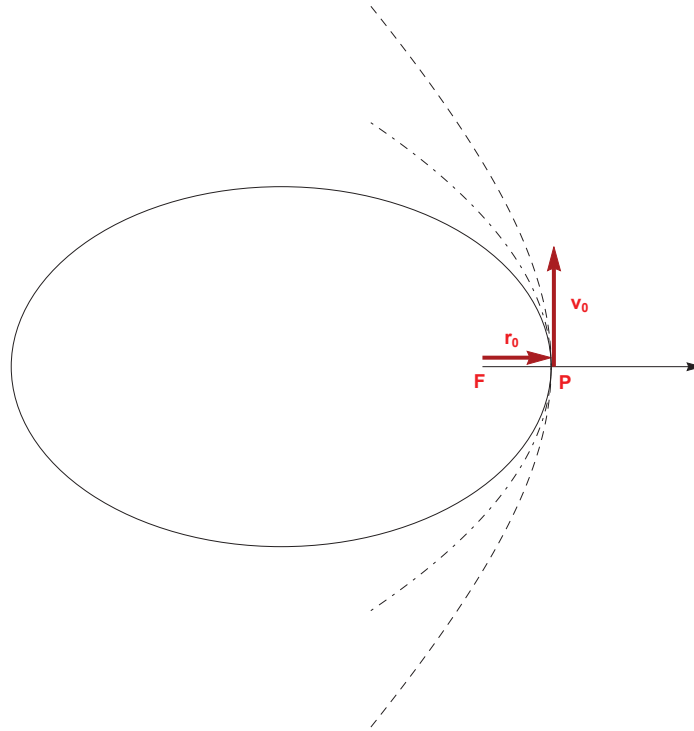


Figura 2: Possíveis trajetórias correspondentes a $r(\theta) = A/(1 + \epsilon \cos \theta)$, produzidas com o software *Mathematica*. Note que $\vec{v}_0$ é perpendicular a $\vec{r}_0$, no periélio. A linha tracejada representa um ramo de hipérbole ($\epsilon > 1$ e $v_0 > v_{esc}$, onde $v_{esc} = \sqrt{2GM/r_0}$). A linha traço-ponto representa uma parábola ($\epsilon = 1$ e $v_0 = v_{esc}$). A linha contínua representa uma elipse ($0 < \epsilon < 1$ e $\sqrt{GM/r_0} < v_0 < v_{esc}$).

Para o corpo fictício de massa μ , tendo em vista que adotamos a posição inicial no periélio — i.e., $\vec{r}(0) = r_0 \hat{i} = r_P \hat{i} = (a - f) \hat{i}$ —, onde $\theta_0 = 0$, vamos escolher a velocidade inicial como

¹¹Em particular, para $\epsilon = 0$, que equivale a $C = 0$, teremos $r(\theta) = A = h^2/(GM) = cte.$, e a trajetória será *circular*. Devido à conservação do momento angular, $v = v_0 = \sqrt{GM/r_0} = cte.$, logo o movimento será um MCU.

$\vec{v}(0) = v_0 \hat{j} = r_P \dot{\theta}_0 \hat{j}$, garantindo assim que ela seja perpendicular a $\vec{r}(0)$ (i.e., ao eixo das ápsides), como é comum no lançamento de satélites. Vejamos, então, como os parâmetros da curva cônica correspondente à trajetória irão depender de r_P e v_0 . Claramente, o estado inicial é tal que $h = L/\mu = r_P v_0 \sin(\pi/2) = r_P v_0 = r_P^2 \dot{\theta}_0$. O parâmetro C é facilmente obtido colocando-se $\theta(0) = 0$ na Eq. (30), o que resulta $r(0) = r_P = A/(1 + \epsilon)$,¹² de modo que

$$C = \frac{1}{r_P} - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_P} - \frac{GM}{r_P^2 v_0^2}. \quad (32)$$

Os parâmetros A e ϵ também são prontamente obtidos em termos das condições iniciais:

$$A = \frac{h^2}{GM} = \frac{r_P^2 v_0^2}{GM} \quad (33)$$

e

$$\epsilon = C A = \left(\frac{1}{r_P} - \frac{GM}{r_P^2 v_0^2} \right) \frac{r_P^2 v_0^2}{GM} = \frac{r_P v_0^2}{GM} - 1. \quad (34)$$

II.3. Leis de Kepler

Agora, vamos mostrar que a solução $r(\theta)$ obtida no caso (iii), acima, é compatível com as três leis empíricas de Kepler, dentro de uma ótima aproximação, desde que $M \gg \mu$.

- 1ª lei de Kepler: esta lei afirma que as órbitas planetárias são elípticas, com o Sol (imóvel) ocupando um dos focos. Como vimos, para $0 \leq \epsilon < 1$ a trajetória será uma *elipse*, o que ocorrerá sempre que $\sqrt{GM/r_P} \leq v_0 < v_{esc}$. Sendo a massa do Sol muito maior do que a dos planetas, então ele praticamente não se movimenta e o seu centro praticamente coincide com o CM do sistema solar. Assim, como ótima aproximação, podemos afirmar que o Sol está 'fixo' em um dos focos.¹³
- 2ª lei de Kepler: esta lei afirma que a velocidade areolar dos planetas é constante. Para mostrar isto a partir dos resultados obtidos acima, basta utilizar o elemento de área em coordenadas polares, i.e. $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, como ilustrado na Fig. 3, abaixo. Assim, a taxa com que $\vec{r}$ varre a área dS é

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} = \frac{h}{2} = cte. \quad (35)$$

Portanto, $\Delta S = cte. \times \Delta t$, o que significa que o vetor $\vec{r} = \overrightarrow{FP}$ varrerá áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

- 3ª lei de Kepler: esta lei afirma que $T^2 \propto \bar{r}^3$, onde

$$\bar{r} \equiv (1/\ell) \int_0^\ell r ds = (1/\ell) \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = a$$

¹² Para o *afélio*, substituindo $\theta = \pi$ rad na Eq. (30), obtém-se $r_A = A/(1 - \epsilon)$.

¹³ Para Júpiter, o planeta de maior massa do sistema solar, o CM já não fica tão próximo do centro do Sol.

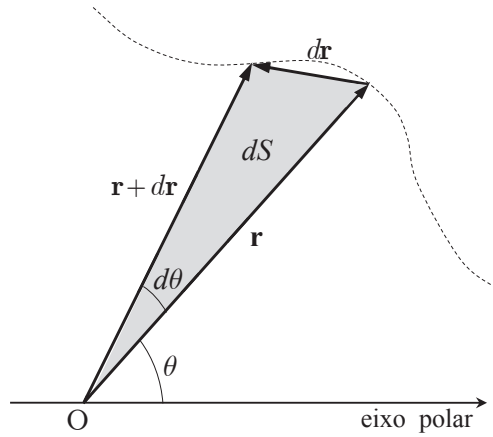


Figura 3: O elemento de área $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, em coordenadas polares, demarcado pelos vetores-posição $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$, com um ângulo $d\theta$ entre eles.

é a *média espacial* de r [7, Book V, Chap. III, Prop. VIII]. Aqui,

$$\ell = \int ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta = 4a E(\epsilon)$$

é o comprimento da elipse, $E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$ sendo a *integral elíptica completa* do segundo tipo. Essas integrais definidas são resolvidas passo-a-passo na Seq. 3 da Ref. [8] (ver também a Ref. [9]), entretanto no final da pág. 4 seu autor mostra que o mesmo resultado pode ser obtido usando-se uma propriedade geométrica da elipse, *sem resolver nenhuma integral*, como Kepler fez. A seguir, vamos mostrar que esta lei pode ser obtida a partir do resultado acima para $dS/dt = cte.$, em conjunto com a solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (30).

Por definição, o período T da órbita elíptica é o menor intervalo de tempo necessário para que $\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t + T) = \vec{v}(t)$, para todo $t > 0$. Como $dS/dt = h/2 = cte.$, então $\Delta S/\Delta t = h/2 = cte.$ e, para uma volta completa, teremos $S/T = h/2$. Portanto

$$T = 2 \frac{S}{h}, \quad (36)$$

onde S é a área da elipse, que é prontamente determinada fazendo-se

$$\frac{S}{2} = \int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{\pi a b}{2}, \quad (37)$$

onde $y = f(x)$ é a equação da metade superior de uma elipse centrada na origem do plano cartesiano, com eixo maior sobre o eixo x , e, b é o comprimento do semi-eixo menor. Portanto, $T = 2\pi a b/h$. Note que isto relaciona o período T com o momento angular L , pois $h = L/\mu$. Assim, $L = 2\mu \frac{h}{2} = 2\mu dS/dt = cte.$, conforme a 2ª lei de Kepler. Isto nos leva a $L = 2\mu \pi a b/T$. Para completar, usamos a relação fundamental da elipse, i.e. $a^2 = b^2 + f^2$,

onde f é a distância focal, conforme indicado na Fig. 4, para obter $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$ e, com isso, $T = 2 \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} / h$. Finalmente, substituindo-se $h = L/\mu$, obtemos

$$L = 2 \pi \mu a^2 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{T}. \quad (38)$$

No Apêndice E mostraremos que $a = A / (1 - \epsilon^2)$ e $b = A / \sqrt{1 - \epsilon^2}$, de modo que a e b só dependem de A e ϵ . Com isso, $b^2 = Aa$, e então

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4 \pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4 \pi^2 a^2 A a}{G M A} = \frac{4 \pi^2 a^3}{G M} \\ &= \frac{4 \pi^2}{G (m_1 + m_2)} a^3. \end{aligned} \quad (39)$$

Esta é a expressão exata da 3ª lei de Kepler. Usando-se $a = A / (1 - \epsilon^2)$ e $A = h^2 / (G M)$, é fácil obter

$$T = 2 \pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G M}} = 2 \pi \frac{h^3}{G^2 M^2} \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (40)$$

o que mostra que, para um dado momento angular, a trajetória circular é a de **menor período**. A última igualdade acima imediatamente nos leva a

$$h \equiv \frac{L}{\mu} = \sqrt{G M a (1 - \epsilon^2)}. \quad (41)$$

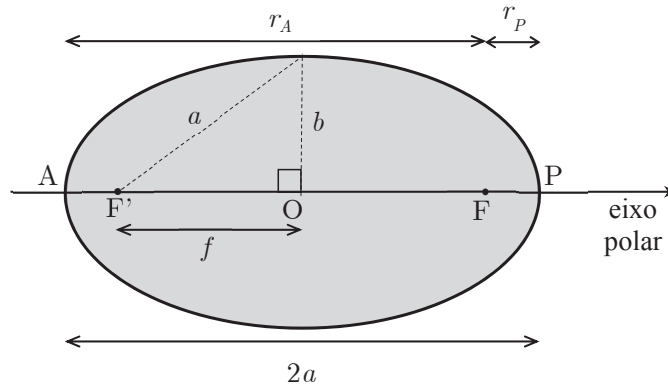


Figura 4: Parâmetros geométricos da elipse. Note que os semi-eixos maior a e menor b formam, juntamente com a distância focal f , um triângulo retângulo. O ponto A indica o afélio e o ponto P o periélio.

II.4. Atalho para a determinação dos parâmetros de órbitas elípticas

Na análise de trajetórias elípticas, outras relações entre os parâmetros podem ser úteis. Por exemplo, partindo da solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (30) e da expressão de r_A exibida na nota de rodapé 12 obtemos

$$\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_A} = \frac{2}{A} = 2 \frac{G M}{h^2} \quad (42)$$

e

$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} = \frac{2}{A} \epsilon = \frac{2GM}{h^2} \epsilon. \quad (43)$$

Um outro exemplo é a expressão do momento angular L em termos de a e ϵ :

$$\frac{L}{\mu} = h = \frac{2\pi ab}{T} = 2\pi \frac{a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}} = a \sqrt{1-\epsilon^2} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad (44)$$

mostrando, assim, que¹⁴

$$L = \mu \sqrt{GMa(1-\epsilon^2)}, \quad (45)$$

em pleno acordo com a Eq. (41).

Outro ponto interessante é que podemos obter a famosa *equação de Kepler* para $\theta(t)$ a partir da 2ª lei de Kepler, pois $dS/dt = cte. = S/T = \pi ab/T$ nos leva a

$$S(t) = \frac{\pi ab}{T} \int_0^t dt = \frac{\pi ab}{T} t. \quad (46)$$

Por outro lado, em coordenadas polares, $dS = \frac{r^2}{2} d\theta$ implica que $S = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\tilde{\theta}$. Portanto,

$$\frac{\pi ab}{T} t = \frac{A^2}{2} \int_0^\theta \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + \epsilon \cos \tilde{\theta})^2}, \quad (47)$$

onde $A = a(1-\epsilon^2)$, $b = A/\sqrt{1-\epsilon^2}$ e $T = 2\pi \sqrt{a^3/(GM)}$. Esta integral possui solução elementar, a qual pode ser obtida com o *software Mathematica (release 12)*:

$$\frac{2\pi ab}{A^2 T} t = -\frac{\epsilon \sin \theta}{(1-\epsilon^2)(1+\epsilon \cos \theta)} + 2 \frac{\arctan\left[\frac{(1-\epsilon) \tan(\theta/2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right]}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (48)$$

Multiplicando-se ambos os membros por $(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}$, esta equação simplifica-se para

$$\frac{\pi}{T} t = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2} \tan(\theta/2)}{1+\epsilon}\right) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\sqrt{1-\epsilon^2} \sin \theta}{1+\epsilon \cos \theta}. \quad (49)$$

A obtenção desta solução $t = t(\theta)$ e, principalmente, a *inversão* desta função para $\theta = \theta(t)$, foi tentada exaustivamente por Kepler, pois os astrônomos medem os pontos da função $\theta(t)$, mas a dificuldade matemática o levou a propor um método aproximativo [10].¹⁵

¹⁴Note que este resultado também pode ser obtido diretamente a partir de $A = h^2/(GM) = a(1-\epsilon^2)$.

¹⁵Na Ref. [11], é provado que é impossível inverter-se funções do tipo da $t(\theta)$ dada na Eq. (49) e, com isso, obter uma função $\theta(t)$ que seja uma combinação finita de funções elementares.

II.5. Parâmetros da órbita elíptica em termos do momento angular e da energia

Para um sistema de dois corpos isolado de agentes externos, já demonstramos que vale a lei de conservação do momento angular total $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = cte.$, onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Para a condição inicial padrão, teremos $L = \mu r v_0 = \mu r^2 \dot{\theta} = cte.$, com a trajetória sendo descrita necessariamente sobre um plano perpendicular a $\vec{L}$. Adicionalmente, de acordo com a lei de conservação da energia, se os dois corpos interagem através de uma *força conservativa* (definida como uma força cujo trabalho realizado não depende da trajetória, mas apenas dos pontos inicial e final), então a *energia mecânica* total $E_{tot} \equiv T_1 + T_2 + V_{12}$ será uma *constante de movimento*. Assim, para uma tal força,

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 + V_{12} \\
 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + V_{12} \\
 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 - 2 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 + 2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) + V_{12} \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \left(\frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} \right) \dot{\vec{r}}^2 - \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2 m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + V_{12} \\
 &= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} + V_{12} \\
 &= \frac{\vec{P}_{CM}^2}{2M} + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V_{12} = cte.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Sendo $\vec{P}_{CM}$ constante, como vimos na Eq. (7), então a energia cinética $P_{CM}^2/(2M)$ também será uma constante, reduzindo o resultado acima a

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V_{12} = E_{tot} - \frac{P_{CM}^2}{2M} = cte., \tag{51}$$

onde E é a energia mecânica do corpo fictício de massa μ movendo-se em relação ao centro fixo. Esta E.D.O. de 1ª ordem reduz o problema de dois corpos a um problema de um corpo fictício com massa μ localizado em $\vec{r}(t)$, atraído por um centro de força fixo, com os corpos 1 e 2 (bem como o corpo fictício de massa μ) sempre alinhados com o CM. Escolhendo $V_{12} = 0$ em $r \rightarrow \infty$ como referência, obtém-se¹⁶

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\mu}{2} v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \\
 &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - G \frac{m_1 m_2}{r} = cte.
 \end{aligned} \tag{52}$$

¹⁶A energia potencial gravitacional $V_{12}(r) = -G m_1 m_2 / r$ é encontrada com a integral de caminho $V_{12}(\infty) - V_{12}(r) = 0 - V_{12}(r) = -V_{12}(r) = - \int_C \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}$, onde C é qualquer caminho que vai de r até o ponto de referência.

Substituindo $\dot{\theta} = L/(\mu r^2)$ no termo cinético, encontramos

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{\mu^2 r^4} \right) - G \frac{m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = cte. \end{aligned} \quad (53)$$

Como já sabemos que a trajetória será uma *elipse* se $\sqrt{GM/r_p} < v_0 < v_{esc}$, podemos determinar os valores mínimo e máximo de $r(t)$ ao longo de toda a trajetória (respectivamente r_p e r_A). Isolando a derivada temporal, obtemos¹⁷

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2G \frac{m_1 m_2}{\mu r} \\ &= 2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}. \end{aligned} \quad (54)$$

Aplicando o lema de Fermat, que garante que a derivada é nula nos extremos de uma função diferenciável, teremos, nos pontos de retorno,

$$2 \frac{E}{\mu} r^2 - \frac{L^2}{\mu^2} + 2GM r = 0. \quad (55)$$

Como as massas m_1 e m_2 encontram-se em um estado ligado — i.e., $E < 0$, já que $v_0 < v_{esc} = \sqrt{2GM/r_p}$ —, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{|E|}{\mu} r^2 - GM r + \frac{L^2}{2\mu^2} = 0, \quad (56)$$

ou seja,

$$r^2 - G \frac{M\mu}{|E|} r + \frac{L^2}{2\mu|E|} = 0. \quad (57)$$

¹⁷Note que a Eq. (54) é equivalente a

$$dt = |dr| / \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}},$$

que é uma E.D.O. *separável*. Para a condição inicial $r(0) = r_0 = r_p$ e $v(0) = v_0$, com $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$, a integração direta fornece

$$t = \pm \int_{r_p}^r 1 / \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 \tilde{r}^2} + 2 \frac{GM}{\tilde{r}}} d\tilde{r}.$$

Aqui, o sinal '+' ('-') deve ser usado nos trechos em que $\tilde{r}$ aumenta (diminui). Isto fornece $t = t(r)$, uma função cuja *inversa* é a função $r = r(t)$, solução da E.D.O. Para os leitores mais interessados, a resolução dessa integral foi incluída no Apêndice F. No texto principal vamos obter r_p e r_A e determinar a órbita elíptica sem resolver integrais.

Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos duas soluções:

$$\begin{aligned} r_{\max}^{\min} &= G \frac{m_1 m_2}{2|E|} \pm \frac{1}{2} \sqrt{G^2 \frac{m_1^2 m_2^2}{E^2} - 2 \frac{L^2}{\mu |E|}} \\ &= G \frac{m_1 m_2}{2|E|} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{|E|}{\mu} \left(\frac{L}{G m_1 m_2} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Para obter a energia E , basta fazer $r_{\max} + r_{\min} = r_A + r_P = 2a$, o que fornece

$$G \frac{m_1 m_2}{2|E|} (1 + \sqrt{\beta}) + G \frac{m_1 m_2}{2|E|} (1 - \sqrt{\beta}) = 2a, \quad (59)$$

onde $\beta \equiv 1 - 2 \frac{|E|}{\mu} \frac{L^2}{(G m_1 m_2)^2}$. Isto prontamente simplifica-se para

$$G \frac{m_1 m_2}{|E|} = 2a, \quad (60)$$

e, por fim,

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{2a}. \quad (61)$$

Além disso, sendo $r_P = a - f$ e $r_A = a + f$, então $r_A - r_P = 2f$, de modo que $(r_A - r_P) / (2a) = 2f / (2a) = f / a = \epsilon$. Portanto, podemos determinar a *excentricidade* da órbita em função de L e E :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2a} = \frac{\frac{G m_1 m_2}{2|E|} \cdot [1 + \sqrt{\beta} - (1 - \sqrt{\beta})]}{2a} = \sqrt{\beta} \\ &= \sqrt{1 - 2 \frac{E}{\mu} \frac{L^2}{(G m_1 m_2)^2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Note que a energia E pode ser positiva, negativa ou nula.¹⁸ Isto fornece três tipos de trajetória (todas do tipo curva cônica):

(i) $E > 0$: neste caso, $\epsilon > 1$ e teremos uma trajetória *hiperbólica*;

(ii) $E = 0$: neste caso, $\epsilon = 1$ e teremos uma trajetória *parabólica*; ou

(iii) $E_{\min} = -\frac{\mu}{2} \left(\frac{G m_1 m_2}{L} \right)^2 \leq E < 0$: neste caso, $0 \leq \epsilon < 1$ e teremos uma trajetória elíptica estacionária, i.e. *sem precessão do periélio* em relação ao espaço absoluto.¹⁹

Por fim, ressaltamos que o problema de dois corpos eletrizados com cargas q_1 e q_2 de sinais opostos, atraindo-se de acordo com a lei de Coulomb, i.e. $\vec{F}_{21} = k q_1 q_2 / r^2 \hat{r} = -\tilde{k} / r^2$, onde $k = 1 / (4 \pi \epsilon_0)$ é a constante de Coulomb e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo,

¹⁸Usando $2|E| = G m_1 m_2 / a$, prontamente obtemos $L = \mu \sqrt{G M a (1 - \epsilon^2)}$, confirmando a Eq. (45).

¹⁹Note que $E_{\min}$ corresponde a uma órbita *circular*, pois $\epsilon = 0$. Para energias menores do que esta, os corpos 1 e 2 não poderão manter órbitas periódicas e irão colapsar no seu CM.

com $\tilde{k} \equiv k |q_1 q_2| > 0$, é *análogo* ao problema de dois corpos gravitacional que acabamos de resolver. Assim, todos os resultados obtidos até aqui valerão para o análogo coulombiano, bastando substituir GM por $\tilde{k}/\mu$.

APÊNDICES

A. ALINHAMENTO DE DOIS CORPOS COM SEU CM

É fácil ver que dois corpos puntiformes *sempre* estão alinhados com o seu CM, bastando mostrar que $\vec{r} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \vec{0}$, $i = 1, 2$. Por exemplo, para $\vec{r}_1$ (o cálculo para $\vec{r}_2$ é análogo), basta fazer

$$\begin{aligned} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_1 - \vec{R}) &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{R} - \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{R} \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times (c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2) - \vec{0} + \vec{r}_1 \times (c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2) \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - c_1 \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - c_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 + c_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + (c_1 + c_2) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $c_i \equiv m_i/M$, $i = 1, 2$. Como $c_1 + c_2 = (m_1 + m_2)/M = 1$, então

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_1 - \vec{R}) = \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 = \vec{0}, \quad (\text{A.2})$$

como queríamos demonstrar.

B. INVERSÃO DAS COORDENADAS DE JACOBI

Para obter $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ em termos de $\vec{r}$ e $\vec{R}$, basta multiplicar (à esquerda) ambos os membros de

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ m_1/M & m_2/M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

pela sua *matriz inversa*, o que resulta em

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ m_1/M & m_2/M \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

onde $\mathbf{I}_2$ é a *matriz identidade* (de ordem 2). Assim,

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2/M & 1 \\ +m_1/M & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

que é equivalente ao sistema de equações exibido na Eq. (3).

C. VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM COORDENADAS POLARES

Obtemos, aqui, a velocidade e aceleração de um corpo em *coordenadas polares*. Neste sistema de coordenadas, temos $\vec{r} = r \hat{r}$, de modo que a velocidade $\vec{v}$ em coordenadas polares será dada por

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= (r \hat{r})' = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}.\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

O último termo decorre do fato de que

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = R_{\theta} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

onde

$$R_{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

é uma matriz de rotação no plano xOy , a qual produz um giro de θ radianos na direção *anti-horária* quando $\theta > 0$ (e na direção *horária* quando $\theta < 0$).²⁰ A velocidade e a aceleração são prontamente obtidas notando-se que $\vec{v}^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ e que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\hat{r}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{pmatrix} &= \frac{dR_{\theta}}{dt} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & \cos \theta \dot{\theta} \\ -\cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

ou seja

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{r} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Por fim, a aceleração $\vec{a}$ em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &\equiv \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta})}{dt} \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\hat{r}} + \dot{r} (\dot{\theta} \hat{\theta}) + r (\dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}) \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r (\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}) \\ &= \ddot{r} \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta} - r \dot{\theta}^2 \hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}.\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

²⁰Isso vem do fato de que

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}.$$

Como os vetores unitários devem formar uma base, devemos escolher $\hat{\theta}$ de modo que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$, o que nos deixa com duas opções: $\hat{\theta} = \mp \sin \theta \hat{i} \pm \cos \theta \hat{j}$. Para obter uma base *destrógi*, escolhemos $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$.

D. ÓRBITA ELÍPTICA ESTACIONÁRIA EM COORDENADAS POLARES

Em coordenadas *cartesianas*, a equação da elipse centrada em um ponto qualquer (x_c, y_c) e com o semi-eixo maior apoiado sobre o eixo x é ²¹

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (D.1)$$

Entretanto, para as trajetórias elípticas que surgem no problema de Kepler, com o Sol (ou, mais precisamente, o centro de massa do sistema Sol-planeta) sobre um dos focos, é vantajoso usar coordenadas *polares*, escolhendo a origem sobre aquele foco, pois isto torna a equação da curva bem mais simples, conforme mostraremos a seguir.

Seja F um ponto fixo qualquer, chamado *foco*, e u uma reta qualquer pertencente ao plano da curva cônica (mas que não passa sobre F), chamada *diretriz*. Por definição, a *excentricidade* ϵ é a razão $\overline{PF}/\overline{PQ}$, onde P é um ponto qualquer da curva cônica e Q é o ponto que marca a menor distância de P até a diretriz, como ilustrado na Fig. 5. Vamos mostrar que a curva cônica será uma *elipse* se $0 \leq \epsilon < 1$.²² Tomando F sobre a origem $(0,0)$ e escolhendo o eixo polar $\theta = 0$ na direção perpendicular à diretriz u , como na Fig. 5, um ponto qualquer $P = (x, y) = (r, \theta)$ pertencente à curva cônica deve ser tal que $\overline{PF} = r$ e $\overline{PQ} = d - r \cos \theta$.

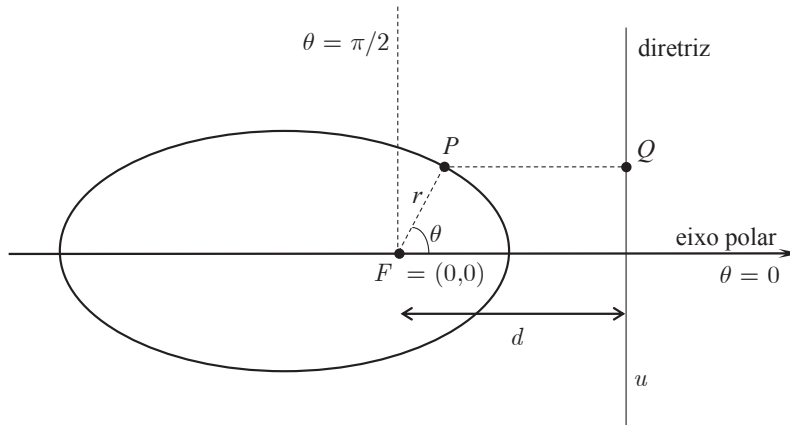


Figura 5: Foco e diretriz de uma elipse. Observe que d é a distância do foco F até a diretriz.

Como $\epsilon = \overline{PF}/\overline{PQ}$, segue que

$$r = \epsilon (d - r \cos \theta). \quad (D.2)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos

$$r^2 = x^2 + y^2 = \epsilon^2 (d - x)^2 = \epsilon^2 (d^2 + x^2 - 2dx), \quad (D.3)$$

²¹Em coordenadas cartesianas, é fácil provar que a equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ representa uma elipse centrada na origem. Para isto, basta usar a propriedade de que a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma das distâncias até dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante positiva, ou seja $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, que equivale a $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$.

²²Se $\epsilon = 1$, teremos, por definição, uma *parábola*. Se $\epsilon > 1$, teremos uma *hipérbole*.

ou seja,

$$(1 - \epsilon^2) x^2 + 2\epsilon^2 d x + y^2 = \epsilon^2 d^2. \quad (\text{D.4})$$

Dividindo ambos os membros por $1 - \epsilon^2$, obtemos

$$x^2 + 2 \frac{\epsilon^2 d}{1 - \epsilon^2} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{\epsilon^2 d^2}{1 - \epsilon^2}. \quad (\text{D.5})$$

Completando o quadrado, obtemos

$$\left(x + \frac{\epsilon^2 d}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{\epsilon^2 d^2}{(1 - \epsilon^2)^2}. \quad (\text{D.6})$$

Esta equação é do tipo $(x - x_c)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, a qual representa uma *elipse* centrada em $(x_c, 0)$. Por fim, retornando na Eq. (D.2), note que ela é equivalente a

$$r = \epsilon d - \epsilon r \cos \theta, \quad (\text{D.7})$$

ou seja,

$$r(1 + \epsilon \cos \theta) = \epsilon d. \quad (\text{D.8})$$

Isolando r , obtemos

$$r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (\text{D.9})$$

provando, assim, que a Eq. (30) realmente representa uma elipse.

E. RELAÇÕES ÚTEIS PARA OS PARÂMETROS DA ELIPSE

Vamos demonstrar as relações utilizadas para os parâmetros a e b da elipse. Começemos com as relações geométricas básicas para o periélio e afélio, i.e.

$$\begin{cases} r_P = a - f = a(1 - \epsilon) \\ r_A = a + f = a(1 + \epsilon) \end{cases}. \quad (\text{E.1})$$

Usando a solução $r(\theta) = A/(1 + \epsilon \cos \theta)$, e aplicando-a aos casos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, obtemos

$$r_P = \frac{A}{1 + \epsilon} \quad (\text{E.2})$$

e

$$r_A = \frac{A}{1 - \epsilon}, \quad (\text{E.3})$$

respectivamente. Como $r_P + r_A = 2a$, o que significa que a é a *média aritmética* de r_P e r_A , então

$$\frac{A}{1 + \epsilon} + \frac{A}{1 - \epsilon} = 2a, \quad (\text{E.4})$$

portanto

$$a = \frac{A}{1 - \epsilon^2}. \quad (\text{E.5})$$

Para determinar b , basta fazer

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - a^2 \epsilon^2 = a^2 (1 - \epsilon^2) \\ &= a^2 \frac{A}{a} = a A, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

o que fornece

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a A} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{1 - \epsilon^2}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Isso mostra que b é a *média geométrica* de r_p e r_A .

F. SOLUÇÃO $r(\theta)$ A PARTIR DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Como resultado da conservação da energia, nós obtivemos:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}}. \quad (\text{F.1})$$

Para obter a equação da trajetória em *coordenadas polares*, basta fazer

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2}. \quad (\text{F.2})$$

Com isso,

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} = \pm \sqrt{-2 \frac{|E|}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}}, \quad (\text{F.3})$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \pm r^2 \frac{\mu}{L} \sqrt{-2 \frac{|E|}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}} \\ &= \pm r^2 \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - \frac{1}{r^2} + 2 \frac{GM}{r} \frac{\mu^2}{L^2}}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Aplicando a *substituição de Binet*, i.e. $u = 1/r$, com $\frac{dr}{d\theta} = \frac{d(1/u)}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$, obtemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{du}{d\theta} = \pm r^2 \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - \frac{1}{r^2} + 2 \frac{GM}{r} \frac{\mu^2}{L^2}}, \quad (\text{F.5})$$

o que fornece

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta} = \mp \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - u^2 + 2 GM \frac{\mu^2}{L^2} u}. \quad (\text{F.6})$$

Portanto:

$$d\theta = \mp \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 2GM\frac{\mu^2}{L^2}u - 2\frac{\mu}{L^2}|E|}}. \quad (\text{F.7})$$

Essa separação de variáveis nos leva à seguinte solução integral:

$$\theta - \theta_0 = \mp \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + Bu - C}}, \quad (\text{F.8})$$

onde $B \equiv 2GM\mu^2/L^2$ e $C \equiv 2\mu|E|/L^2$. Fatorando o denominador, é fácil ver que, sendo $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + Bx - C}} = -\arccos\left(\frac{2x-B}{\sqrt{\Delta}}\right) + cte., \quad (\text{F.9})$$

onde $\Delta \equiv B^2 - 4C$. Esta primitiva vale sempre que $B^2 > 4C$ e $|2x-B| < \sqrt{\Delta}$. Note que $F(x) = \arcsen\left(\frac{2x-B}{\sqrt{\Delta}}\right) + cte.$ também é uma primitiva. Usando, por exemplo, a primitiva do tipo $\arccos(x)$ na integral da trajetória, prontamente obtemos

$$\theta - \theta_0 = \pm \arccos\left(\frac{2u-B}{\sqrt{\Delta}}\right), \quad (\text{F.10})$$

o que nos leva a

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos\left[\pm \arccos\left(\frac{2u-B}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] = \frac{2u-B}{\sqrt{\Delta}}. \quad (\text{F.11})$$

Escrevendo em termos de r e dos parâmetros físicos, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= G\frac{M\mu^2}{L^2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - C} \cos(\theta - \theta_0) \\ &= G\frac{M\mu^2}{L^2} + \sqrt{G^2\frac{M^2\mu^4}{L^4} - 2\mu\frac{|E|}{L^2}} \cos(\theta - \theta_0) \\ &= G\frac{M\mu^2}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 - 2\mu\frac{|E|L^4}{L^2G^2M^2\mu^4}} \cos(\theta - \theta_0) \right] \\ &= G\frac{M\mu^2}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 - 2\frac{|E|L^2}{G^2M^2\mu^3}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Por fim, esta solução pode ser escrita na forma

$$r(\theta) = \frac{A}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (\text{F.13})$$

onde

$$A = \frac{h^2}{GM} = \frac{L^2}{GM\mu^2} \quad (\text{F.14})$$

e

$$\epsilon = \sqrt{1 - 2 \frac{|E| L^2}{G^2 M^2 \mu^3}}. \quad (\text{F.15})$$

Como $A > 0$ e $0 \leq \epsilon < 1$, a equação acima descreverá uma **elipse com um dos focos sobre a origem**, em pleno acordo com a 1ª lei de Kepler. Note que a solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (F.13), acima, reduz-se à solução obtida na Eq. (30) quando escolhemos $\theta_0 = 0$.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o auxílio na composição das figuras, prestado gentilmente pela Sra. Márcia Ribeiro de Souza Lima.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Kepler, *New Astronomy* [*Astronomia Nova*, 1609]. Translated by W. H. Donahue, Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 54
- [2] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I: O Movimento dos Corpos*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990. [Tradução da 3ª edição [1726] por T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia] 54, 55, 56, 60
- [3] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) e Livro III: O Sistema do Mundo (tratado matematicamente)*. São Paulo: Edusp, 2008. [Tradução da 3ª edição (1726) por A. K. T. Assis] 54, 58, 60
- [4] J. Barrow-Green, *The Three-Body Problem*. In T. Gowers, J. Barrow-Green, and I. Leader (eds.), *The Princeton Companion to Mathematics*. New York: Princeton University Press (2008), pp. 726–728. 54
- [5] J. Bernoulli, “Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman”, datée de Basle le 7, Octobre 1710. *Memoires de l’Ac. Royale des Sciences Boudot Paris*, 1710 (1712). 55
- [6] MicroSCOPE Satellite Mission (CNES/ESA), 2017. Disponível em: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/m/microscope> 58
- [7] J. Kepler. *Harmonices Mundi* (1619), p. 189–190. 63
- [8] M. F. Ferreira da Silva, “Quantidades médias no movimento de um corpo em trajetória elíptica”, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **33**(3), 3315 (2011). 63
- [9] D. M. Williams, “Average distance between a star and planet in an eccentric orbit”, *Am. J. Phys.* **71**(11), 1198–1200 (2003). 63
- [10] N. M. Swerdlow, “Kepler’s iterative solution to Kepler’s equation”, *Journal for the History of Astronomy* **31**(4), 339–341 (2000). 65
- [11] J. F. Ritt, “Elementary functions and their inverses,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **27**, 68 (1925). 65



Problema de dois corpos. Parte II: Modelo relativístico original de Einstein

Two-body problem. Part II: Einstein's original relativistic model

FÁBIO M. S. LIMA^{*1}

¹Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

Neste artigo, apresentamos a segunda parte de um longo trabalho sobre o problema clássico do movimento de dois corpos interagindo através de uma força que age ao longo da reta que os une, trabalho este que começou, na parte I, com a análise do movimento orbital obtido com a força gravitacional de Newton (1687), contendo a resolução matemática completa, com a solução analítica exata, em pleno acordo com as três leis de Kepler. Aqui nesta segunda parte, apresentamos a tradução inédita para o português do artigo original de Einstein (em alemão), publicado em novembro de 1915, em que ele usa a Teoria da Relatividade Geral (TRG) para obter uma solução aproximada para o problema de dois corpos, obtendo órbitas elípticas com uma taxa de precessão do periélio que está em ótimo acordo com o valor observado para o planeta Mercúrio (43"/século), mas, como ele próprio acaba admitindo, não está em acordo com os valores observados para os demais planetas do sistema solar. Isso nos permitirá, na parte 3 (a ser publicada neste mesmo periódico), comparar o modelo relativístico com a solução exata fornecida pela Mecânica Relacional (1989). Pretendemos, com isso, mostrar que, embora a TRG e a Mecânica Relacional forneçam a mesma taxa de precessão para Mercúrio, as equações de movimento não são idênticas. Também mostraremos que o avanço do periélio previsto pela Mecânica Relacional se dá em relação às estrelas fixas, justamente como ele tem sido observado e medido pelos astrônomos, o que não ocorre nos modelos relativísticos.

Palavras-chave: Força gravitacional. Problema de dois corpos. Precessão do periélio de Mercúrio. Teoria da Relatividade Geral.

Abstract

In this article, we present the second part of a long work on the classical problem of the movement of two bodies interacting through a force that acts along the straight line that joins them, a work that began, in part I, with the analysis of orbital motion obtained with Newton's gravitational force (1687), containing the complete mathematical resolution, with the exact analytical solution, in full agreement with Kepler's three laws. Here in this second part, we present the unprecedented translation into Portuguese of Einstein's original article (in German), published in November

*Corresponding author: fabio@fis.unb.br

1915, in which he uses the General Theory of Relativity (TRG) to obtain an approximate solution to the problem of two bodies, obtaining elliptical orbits with a perihelion precession rate that is in excellent agreement with the value observed for the planet Mercury ($43''/\text{century}$), but, as he himself ends up admitting, is not in agreement with the observed values to the other planets in the solar system. This will allow us, in part 3 (to be published in this same journal), to compare the relativistic model with the exact solution provided by Relational Mechanics (1989). We intend, with this, to show that, although the TRG and Relational Mechanics provide the same precession rate for Mercury, the equations of motion are not identical. We will also show that the advancement of perihelion predicted by Relational Mechanics occurs in relation to fixed stars, precisely as it has been observed and measured by astronomers, which does not occur in relativistic models.

Keywords: Gravitational force. Two-body problem. Precession of Mercury's perihelion. Theory of General Relativity.

I. INTRODUÇÃO

Nas observações astronômicas acuradas obtidas em meados do séc. XIX, foram detectados pequenos desvios em relação à solução exata do problema de dois corpos newtoniano, obtida de forma completa na parte 1 deste trabalho [1]. Em 1846, o matemático e astrônomo francês Urbain J. J. Le Verrier (1811–1877) previu, com base nas perturbações observadas na órbita de Urano (descoberto em 1781 por Herschel), que deveria haver um planeta mais distante provocando tais distúrbios, o que foi confirmado quatro semanas depois, com a descoberta do planeta Netuno pelos astrônomos Johann Gottfried Galle e Heinrich d'Arrest.¹ Já para a órbita de Mercúrio em torno do Sol, cuja excentricidade é a maior dentre os planetas do sistema solar (aproximadamente 0,2056), Le Verrier analisou os dados medidos entre 1697 e 1848, e concluiu, em 1859, que, embora os outros planetas provoquem um movimento secular de precessão do eixo das ápsides, a taxa de precessão observada era $38''/\text{século}$ maior do que a prevista pelo modelo newtoniano completo, que inclui a atração gravitacional dos outros planetas [2].² Em 1882, esse valor foi corrigido por Simon Newcomb para $(43 \pm 1)''/\text{século}$, com base em observações de 1677 a 1881 [3, 4].³ Assim, após dois séculos de sucesso, surgiu um fenômeno incompatível com as leis de Newton do movimento e da gravitação. Confiante

¹Da mesma forma, pequenas perturbações nas trajetórias de Urano e Netuno sugeriram que haveria um planeta mais distante ainda, o que só seria confirmado com a descoberta de Plutão em 1930, por Clyde Tombaugh.

²A taxa total de precessão do periélio de Mercúrio observada pelos astrônomos atualmente é de $(5600 \pm 0,401)''/\text{século}$, dos quais aproximadamente $5025''/\text{século}$ são devidos aos movimentos de rotação e translação da Terra (referencial não-inercial) em relação ao ICRF (International Celestial Reference Frame), que atualmente é o referencial-padrão para medidas astronômicas, sendo um referencial **em repouso em relação às galáxias distantes**. Dos $(574,10 \pm 0,65)''/\text{século}$ restantes, $532,30''/\text{século}$ são explicados pela teoria newtoniana, ao incluir-se a atração gravitacional dos outros planetas do sistema solar. O efeito da forma não-esférica do Sol contribui apenas com $0,03''/\text{século}$.

³Trata-se de um desvio angular muito pequeno ($1'' = 1^\circ/3600$), mas foi possível medi-lo, pois a precisão das observações astronômicas já era de $5''/\text{século}$. As melhores medidas atuais para a taxa residual fornecem $(42,98 \pm 0,1)''/\text{século}$ [5].

na mecânica newtoniana, Le Verrier propôs que esse desvio estaria sendo causado por um planeta mais próximo do Sol (Volcano), mas ele nunca foi observado.

No início do séc. XX, essa anomalia na taxa de precessão do periélio de Mercúrio se tornaria um dos poucos problemas em aberto na Física Clássica, o que chamou a atenção do jovem Albert Einstein em 1907, no início do desenvolvimento da sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), ocasião em que ele afirmou que a explicação dessa anomalia seria *um importante teste para qualquer nova teoria de gravidade* [4, 6]. Em 1913, Einstein e Michele Besso chegaram a escrever um longo manuscrito,⁴ no qual tentam resolver esse problema gravitacional usando a teoria tensorial de Einstein-Grossmann, mas obtiveram apenas $18''/\text{século}$ [6]. Em novembro de 1915, Einstein finalmente chegou a uma versão da TRG que fornece o resultado observado pelos astrônomos, i.e. $43''/\text{século}$ [7].⁵ Analisaremos, a seguir, este modelo relativístico *original*, no qual Einstein teve que fazer várias aproximações (as equações diferenciais parciais da TRG são *não-lineares*) a fim de mostrar que, embora ele forneça o valor esperado para a taxa de precessão, tal movimento *não se dá em relação às estrelas fixas (como deveria ser, pois é em relação a elas que ele é observado e medido pelos astrônomos)*, visto que elas não foram incluídas no modelo.

Veremos, na próxima seção, como é o modelo relativístico proposto originalmente por Einstein em 1915, logo após ele obter as equações covariantes do campo gravitacional [9]. Trata-se de uma tradução inédita para o português do artigo original (em alemão), publicado em 18 de novembro de 1915 [7], no qual Einstein usou coordenadas retangulares para gerar uma aproximação para o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa.⁶ Note que o modelo relativístico mais simples, baseado na métrica de Schwartzchild, mais adequada para um universo com simetria esférica, em que só existe uma esfera de massa M , centrada na origem, gera uma solução relativística *exata*, como pode ser visto em diversos livros-texto (ver, e.g., o Cap. 9 da Ref. [10] ou a Ref. [11]), porém o modelo de Schwartzchild só seria publicado em 1916 [12].⁷

⁴O documento original foi vendido diversas vezes, ressurgindo em 2021, em um leilão em Paris.

⁵Entretanto, o seu artigo mais conhecido é o que foi publicado em 1916, no prestigiado periódico alemão *Annalen der Physik* (ver Ref. [8]), no qual Einstein exhibe apenas o resultado final do cálculo aproximado do avanço do periélio.

⁶Título original (em alemão): Erklärung der perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie [7].

⁷De fato, Einstein tomou conhecimento dessa solução exata ainda em 22 de dezembro de 1915, através de uma carta enviada por Schwartzchild diretamente do *front* russo, durante a 1ª Guerra Mundial [13].

II. TRADUÇÃO DO ARTIGO ORIGINAL [7]

Explicação do movimento do periélio de Mercúrio a partir da teoria da relatividade geral

por A. Einstein

Em um trabalho publicado recentemente nestes anais, eu obtive as equações do campo gravitacional que são covariantes com respeito a transformações arbitrárias com determinante 1. Em um suplemento, eu mostrei que estas equações são geralmente covariantes se a contração do tensor de energia da “matéria” for desprezível, e eu demonstrei que não há objeções significantes à introdução desta hipótese, através da qual o tempo e o espaço são privados do último vestígio de realidade objetiva.¹

No presente trabalho, eu encontro uma importante confirmação dessa teoria mais fundamental da relatividade, mostrando que ela explica qualitativa e quantitativamente a rotação secular da órbita de Mercúrio (no mesmo sentido do movimento orbital), o qual foi descoberto por Leverrier e cujo valor é 45 segundos de arco por século. Além disso, eu também mostro que a teoria tem como consequência que a curvatura dos raios de luz devido a campos gravitacionais é duas vezes maior do que foi indicado na minha investigação anterior.²

§1. O campo gravitacional.

Das minhas duas últimas comunicações, segue que o campo gravitacional no vácuo tem que satisfazer, ao escolhermos adequadamente o sistema de referência, as equações

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = 0, \quad (1)$$

onde os $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ são definidos pelas equações

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} = - \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left[\begin{matrix} \mu\nu \\ \beta \end{matrix} \right] = - \frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right). \quad (2)$$

Vamos assumir, além disso, a hipótese adotada na minha última comunicação, de que a contração do tensor de energia da “matéria” sempre torna-se desprezível, de modo que, adicionalmente, a seguinte condição sobre o determinante é imposta

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \quad (3)$$

¹Em uma próxima comunicação, será mostrado que esta hipótese é desnecessária. Isto porque pode-se escolher o referencial de forma que o determinante $|g_{\mu\nu}|$ valha -1 . A investigação que segue, então, é independente desta escolha.

²E. Freundlich escreveu recentemente um notável artigo sobre a impossibilidade de explicar satisfatoriamente as anomalias do movimento de Mercúrio com base na teoria de Newton (*Astronomische Nachrichten* vol. 201, 49, junho de 1915).

Considere que uma massa puntiforme (o Sol) esteja localizado na origem do sistema de coordenadas. O campo gravitacional que esta massa puntiforme produz pode ser calculado a partir destas equações por meio de *aproximações sucessivas*.

Seria melhor, entretanto, considerar que os $g_{\mu\nu}$, dada a massa do Sol, ainda não estão completamente determinados matematicamente pelas equações (1) e (3), pois estas equações são covariantes com respeito a transformações arbitrárias com determinante 1. No entanto, pode-se considerar que todas essas soluções podem ser reduzidas umas às outras por tais transformações, ou seja, que (dadas as condições de contorno) elas diferem umas das outras apenas formalmente, mas não fisicamente. Seguindo essa convicção, contento-me por enquanto em obter uma solução, sem entrar na questão de saber se ela é única.

Procedendo dessa maneira, os $g_{\mu\nu}$ são dados na aproximação de ordem zero pelo seguinte esquema, que corresponde à teoria da relatividade original

$$\left. \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right\}, \quad (4)$$

ou, mais sucintamente,³

$$\left. \begin{array}{l} g_{\rho\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \\ g_{44} = 1 \end{array} \right\}. \quad (4a)$$

Aqui, ρ e σ significam os índices 1,2,3; $\delta_{\rho\sigma}$ é igual a 1 se $\rho = \sigma$ ou 0 se $\rho \neq \sigma$.

A seguir, assumiremos que os $g_{\mu\nu}$ diferem dos valores dados em (4a) apenas por quantidades que são pequenas em comparação com a unidade. Trataremos esse desvio como uma pequena quantidade de primeira ordem, e as funções de grau n desses desvios como quantidades de ordem n . As equações (1) e (3) nos permitem, a partir de (4a), calcular o campo gravitacional com precisão até quantidades de ordem n por aproximações sucessivas. Nesse sentido, falamos da n -ésima aproximação; as equações (4a) formam a aproximação de ordem zero.

A solução dada abaixo tem as seguintes propriedades que definem o sistema de coordenadas:

1. Todas as componentes são independentes de x_4 .
2. A solução é espacialmente simétrica em torno da origem do sistema de coordenadas, no sentido de que encontramos a mesma solução novamente se a submetemos a uma transformação linear espacial ortogonal.
3. As equações $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ têm validade exata para $\rho = 1,2,3$.
4. Os $g_{\mu\nu}$ possuem os valores dados na equação (4a) no infinito.

³Nota do tradutor: Parece ter ocorrido um erro tipográfico na primeira equação, pois o certo é $g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma}$.

PRIMEIRA APROXIMAÇÃO.

É fácil verificar que as equações (1) e (3), bem como as quatro condições mencionadas acima, são satisfeitas para quantidades de primeira ordem pela solução

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} + \alpha \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \frac{\delta_{\rho\sigma}}{r} \right) = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (4b)$$

Os $g_{4\rho}$ e $g_{\rho 4}$ são determinados pela condição 3, r significa a distância $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, e α é uma constante determinada pela massa solar.

Vê-se imediatamente que a equação (3) é satisfeita por termos de primeira ordem. Para ver de forma simples que as equações de campo (1) também se cumprem em uma primeira aproximação, basta ter em mente que, se quantidades de segunda ordem e superiores forem desprezadas, o lado esquerdo da equação (1) pode ser permutado sucessivamente através de

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\begin{array}{c} \mu\nu \\ \alpha \end{array} \right],$$

com α indo somente de 1 até 3.

Como pode ser visto na equação (4b), minha teoria implica que no caso de uma massa em repouso, as componentes g_{11} a g_{33} já são diferentes de zero na primeira ordem. Mais adiante provaremos que não há contradição com a lei de Newton (na primeira aproximação), mas isso resulta em uma influência um pouco diferente do campo gravitacional em um feixe de luz do que em meu trabalho anterior, porque a velocidade da luz é determinada pela equação

$$\sum g_{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu} = 0, \quad (5)$$

precisamente. Usando o princípio de Huygens, encontra-se com as equações (5) e (4b), por um cálculo simples, que um raio de luz que passa pelo sol a uma distância Δ sofre uma deflexão angular de magnitude $2\alpha/\Delta$, enquanto os cálculos anteriores, que não foram baseados na hipótese $\sum T_{\mu}^{\mu} = 0$, resultaram no valor α/Δ . Assim, um raio de luz que passa bem próximo da superfície do sol sofre uma deflexão de $1,7''$ (em vez de $0,85''$). Por outro lado, o resultado do deslocamento das linhas espectrais pelo potencial gravitacional, confirmado pelo Sr. Freundlich em ordem de grandeza para as estrelas fixas, permanece inalterado, pois este depende apenas de g_{44} .

Uma vez obtidos os $g_{\mu\nu}$ em primeira aproximação, nós também podemos calcular uma aproximação de primeira ordem para as componentes $T_{\mu\nu}^{\alpha}$ do campo gravitacional. De (2) e (4b) segue que

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} = -\alpha \left(\delta_{\rho\sigma} \frac{x_{\tau}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{x_{\rho} x_{\sigma} x_{\tau}}{r^5} \right), \quad (6a)$$

onde ρ, σ, τ significam qualquer um dos índices 1, 2, 3, e

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = \Gamma_{4\sigma}^4 = -\frac{\alpha}{2} \frac{x_{\sigma}}{r^3}, \quad (6b)$$

onde σ significa os índices 1, 2 ou 3. Aquelas componentes nas quais o índice 4 aparece uma vez ou três vezes desaparecem.

SEGUNDA APROXIMAÇÃO.

Veremos mais adiante que precisamos determinar apenas as três componentes Γ_{44}^{σ} em magnitudes de segunda ordem para sermos capazes de determinar as órbitas dos planetas com o grau de precisão desejado. A última equação de campo junto com as condições gerais que impusemos à nossa solução são suficientes para isso. A última equação de campo

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \Gamma_{44}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \sum_{\sigma, \tau} \Gamma_{4\tau}^{\sigma} \Gamma_{4\sigma}^{\tau} = 0,$$

torna-se, levando em conta a equação (6b) e ignorando quantidades de terceira ordem e superior,⁴

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \Gamma_{44}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} = -\frac{\alpha^2}{2r^4}.$$

A partir disso, nós concluimos, levando em conta novamente a equação (6b) e as propriedades de simetria de nossa solução, que

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = -\frac{\alpha}{2} \frac{x_{\sigma}}{r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \quad (6c)$$

§2. O movimento dos planetas.

As equações de movimento de um ponto material no campo gravitacional fornecidas pela teoria da relatividade geral são:

$$\frac{d^2 x_{\nu}}{ds^2} = \sum_{\sigma, \tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} \frac{dx_{\sigma}}{ds} \frac{dx_{\tau}}{ds}. \quad (7)$$

A partir desta equação, vamos primeiro mostrar que elas contêm as equações de movimento de Newton como uma primeira aproximação. Obviamente, se o movimento do planeta ocorre a uma velocidade [muito] menor que a velocidade da luz, então dx_1, dx_2, dx_3 são pequenos em comparação com dx_4 . Consequentemente, obtemos uma primeira aproximação considerando apenas o termo com $\sigma = \tau = 4$ no lado direito. Levando em conta a equação (6b), obtemos então

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_{\nu}}{ds^2} &= \Gamma_{44}^{\nu} = -\frac{\alpha}{2} \frac{x_{\nu}}{r^3} \quad (\nu = 1, 2, 3) \\ \frac{d^2 x_4}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7a)$$

⁴Nota do tradutor: No texto original, Einstein esqueceu do sinal negativo no lado direito dessa equação.

Estas equações mostram que, para uma primeira aproximação, pode-se por $s = x_4$. Então, as três primeiras equações são exatamente as equações [de movimento] newtonianas. Se introduzirmos as coordenadas polares r, ϕ no plano orbital, então, como é bem conhecido, a lei da conservação da energia e a lei das áreas [i.e., a 2ª lei de Kepler] fornecem as equações

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} u^2 + \Phi &= A \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

onde A e B são as constantes da lei da energia, e onde

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= -\frac{\alpha}{2r} \\ u^2 &= \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

estão bem definidos.

Agora nós temos que avaliar as equações até a próxima ordem de aproximação. A última das equações (7) fornece, então, juntamente com a equação (6b),

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 2 \sum_{\sigma} \Gamma_{\sigma 4}^4 \frac{dx_{\sigma}}{ds} \frac{dx_4}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds} \frac{dx_4}{ds},$$

ou, o que é correto até a primeira ordem,

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r}. \quad (9)$$

Agora, vamos voltar para a primeira das equações (7). O lado direito dela fornece:

a) para a combinação de índices $\sigma = \tau = 4$, teremos

$$\Gamma_{44}^{\nu} \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2$$

ou, considerando as equações (6c) e (9) corretas até a segunda ordem,

$$-\frac{\alpha}{2} \frac{x_{\nu}}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right);$$

b) para as combinações de índices com $\sigma \neq 4, \tau \neq 4$ (as quais ainda precisam ser consideradas), levando em conta o produto $(dx_{\sigma}/ds)(dx_{\nu}/ds)$ e usando a equação (8) em primeira ordem,⁵ correta até a segunda ordem,

$$-\frac{\alpha}{r^3} \sum_{\sigma, \tau} \left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2} \frac{x_{\sigma} x_{\tau}}{r^2} \right) \frac{dx_{\sigma}}{ds} \frac{dx_{\tau}}{ds}.$$

⁵Nesta circunstância, podemos nos contentar com as componentes do campo $\Gamma_{\sigma\tau}^{\nu}$ com a primeira aproximação dada na equação (6a).

A soma final fica

$$-\frac{\alpha x_v}{r^3} \left[u^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right].$$

Usando este valor, nós obtemos para a equação de movimento a forma, correta até a segunda ordem,

$$\frac{d^2 x_v}{ds^2} = -\frac{\alpha x_v}{2 r^3} \left[1 + \frac{\alpha}{r} + 2u^2 - 3 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right], \quad (7b)$$

que junto com a equação (9) determina o movimento da massa puntiforme. Aliás, deve-se notar que as equações (7b) e (9) não produzem nenhum desvio em relação às três leis de Kepler para o caso de movimentos circulares.

Da equação (7b) segue-se a validade exata da equação

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = B, \quad (10)$$

onde B é uma constante. A lei das áreas é válida até a segunda ordem se usarmos o “tempo próprio” do planeta para medir o tempo. Para determinar a rotação secular da elipse orbital a partir da equação (7b), substitui-se os termos de primeira ordem entre colchetes vantajosamente usando a equação (10) e a primeira das equações (8), processo pelo qual os termos de segunda ordem no lado direito não são alterados. Com isso, o fator entre colchetes assume a forma

$$\left(1 - 2A + \frac{3B^2}{r^2} \right).$$

Por fim, se escolhermos $s\sqrt{1-2A}$ como a variável tempo, e se a rebatizarmos de s , nós teremos, com um significado ligeiramente diferente da constante B :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_v}{ds^2} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_v} \\ \Phi &= -\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{B^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (7c)$$

Para determinar a equação da órbita, nós agora vamos proceder exatamente como no caso newtoniano. Partindo da equação (7c), nós primeiro obtemos

$$\frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi.$$

Eliminando ds desta equação com a ajuda da equação (10), nós obtemos

$$\left(\frac{dx}{d\phi} \right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} x - x^2 + \alpha x^3, \quad (11)$$

onde estamos denotando por x a quantidade $1/r$. Esta equação difere da correspondente na teoria newtoniana somente pelo último termo do lado direito.

O ângulo descrito pelo raio-vetor entre o periélio e o afélio é, portanto, dado pela integral elíptica

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}},$$

onde α_1 e α_2 são as raízes da equação

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 = 0$$

que correspondem às raízes vizinhas da equação que resulta desta quando omitimos o último termo.

Assim, pode-se estabelecer, com a precisão que exigimos, que⁶

$$\phi = \left[1 + \alpha \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \right] \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(1 - \alpha x)}},$$

ou, usando a expansão binomial de primeira ordem para aproximar $(1 - \alpha x)^{-1/2}$,

$$\phi = \left[1 + \alpha \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \right] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(1 + \frac{\alpha}{2}x) dx}{\sqrt{-(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}}.$$

A integração fornece

$$\phi = \pi \left[1 + \frac{3}{4} \alpha (\alpha_1 + \alpha_2) \right],$$

ou, considerando que α_1 e α_2 são os recíprocos das distâncias máxima e mínima até o Sol, respectivamente,

$$\phi = \pi \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a(1 - e^2)} \right). \quad (12)$$

Portanto, após uma órbita completa, o periélio se desloca

$$\epsilon = 3\pi \frac{\alpha}{a(1 - e^2)} \quad (13)$$

no mesmo sentido do movimento orbital, onde a denota o semi-eixo maior e e denota a excentricidade da elipse. Se chamarmos o período orbital de T (em segundos), obtém-se, se c é a velocidade da luz em cm/s :

$$\epsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}. \quad (14)$$

Para o planeta Mercúrio, o cálculo dá um avanço do periélio de $43''$ por século, enquanto os astrônomos obtiveram $45'' \pm 5''$ por século como sendo a diferença não explicada entre as observações e a teoria de Newton. Isso significa total concordância da teoria relativística com as observações.⁷

⁶Nota do tradutor: No texto original, falta dividir a soma $\alpha_1 + \alpha_2$ por 2. Este mesmo fator $1/2$ também foi acrescentado na equação seguinte.

⁷Nota do tradutor: Uma análise relativística mais precisa prediz $42.980''/\text{século}$. Atualmente, as melhores medidas da taxa de precessão do periélio de Mercúrio fornecem $(42.98 \pm 0.1)''/\text{século}$ [5].

Para a Terra e Marte, os astrônomos mediram um avanço do periélio de 11" e 9" por século, respectivamente, enquanto nossa fórmula dá apenas 4" e 1" por século, respectivamente. No entanto, devido à baixa excentricidade das órbitas desses planetas, esses dados parecem ter um valor pouco confiável. Mais decisivo para a determinação segura do movimento do periélio é o seu produto com a excentricidade ($e \, d\pi/dt$). Considerando os valores dados por Newcomb para este produto

	$e \, \frac{d\pi}{dt}$
Mercúrio	$8.48'' \pm 0.43$
Vênus	-0.05 ± 0.25 ,
Terra	0.10 ± 0.13
Marte	0.75 ± 0.35

pelos quais eu agradeço ao Dr. Freundlich, então fica-se com a impressão de que um avanço do periélio só foi realmente comprovado para Mercúrio. Contudo, eu gostaria de deixar o julgamento final sobre essa questão para os astrônomos especialistas.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o auxílio na revisão do texto final prestado pelo Sr. Paulo Speri de Souza Lima.

REFERÊNCIAS

- [1] F. M. S. Lima, “Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler”, *Physicae Organum* **10**(1), xxx (2024). 77
- [2] U. J. J. Le Verrier, “Theorie du Mouvement de Mercure”, *Annales de l’Observatoire Impérial de Paris* **V**, 1–196 (1859). 77
- [3] S. Newcomb, “Discussion and results of observations on transits of Mercury from 1677 to 1881”, *Astr. Pap. am. Ephem. naut. Alm.*, **1**, 367–487 (U.S. Govt. Printing Office, Washington D.C., 1882). 77
- [4] J.-P. Provost and C. Bracco, “Lorentz’s 1895 transformations, Einstein’s equivalence principle and the perihelion shift of Mercury”, *Eur. J. Phys.* **39**, 065602 (2018). 77, 78
- [5] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, and E. Bertschinger. *Exploring Black Holes*, 2nd Ed., Chap. 10. Freely available online at: <https://www.eftaylor.com/exploringblackholes/Ch10AdvanceOfMercurysPerihelion200331v1.pdf> 77, 85
- [6] H. Gutfreund, *The Einstein-Besso Manuscript, a Landmark on Einstein’s Road to the General Theory of Relativity*. Disponível em: <https://blog.frontiersin.org/2022/05/04/children-in-science-the-einstein-besso-manuscript> 78
- [7] A. Einstein, “Erklärung der perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie” [Explanation of the perihelion motion of Mercury from the General Theory of Relativity], *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 3), Vol. **11**, 831–839 (1915). 78, 79
- [8] A. Einstein, “Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie” [The foundation of the General Theory of Relativity], *Annalen der Physik* **49**, 769–822 (1916). 78
- [9] A. Einstein, “Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie” [Fundamental Ideas of the General Theory of Relativity and the Application of this Theory in Astronomy], *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 1), 315 (1915). 78
- [10] J. V. Narlikar. *An Introduction to Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2010. 78
- [11] Ana Luiza B. B. G. da Silva, *Desvio do periélio de Mercúrio na relatividade geral*. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC, Bacharelado em Física), Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. 78
- [12] K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein’schen Theorie”, *Reimer, Berlin, S.* 189 (1916). [Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916] 78
- [13] Letter from K. Schwarzschild to A. Einstein, dated 22 December 1915. In “The Collected Papers of Albert Einstein”, vol. 8a, doc.#169. 78