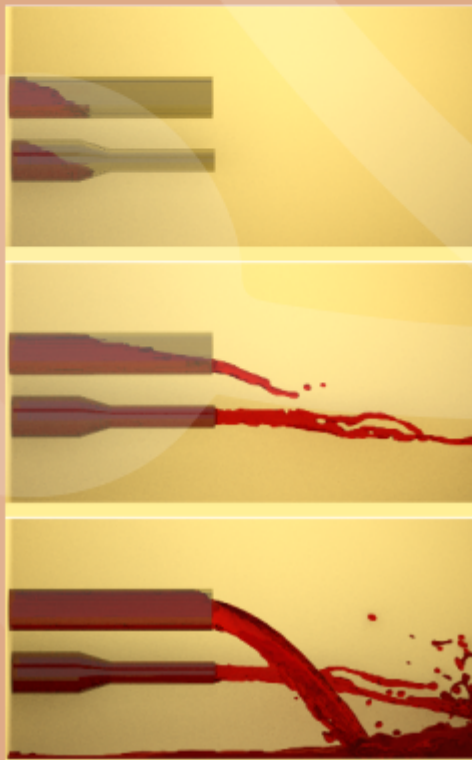




# PHYSICÆ ORGANUM

v. 5, n. 2 (2019)

ARS GRATIA PHYSICAE



## Mediando a aprendizagem de circuitos elétricos em física

Marco Paulo do Nascimento Maia Soares, Marcello Ferreira,  
Alexandre Betinardi Strapasson, Olavo Leopoldino da Silva Filho

## Desenvolvimento de um programa de ajuste da curva de magnetização de ferrofluidos polidispersos

Tiago de Araújo Sousa Cassiano, Samuel Guedes dos Santos, Vanessa Pilati,  
Fábio Luís de Oliveira Paula, Leonardo Luiz e Castro

## Simulação de fluidos com Blender para ilustração científica

Tiago de Araújo Sousa Cassiano, Henrique Alves de Lima,  
Leonardo Luiz e Castro, Alexandre Adriano Neves de Paula

## Ligação diatômica: Uma Abordagem Clássica e Quântica

Pedro Henrique Pinheiro Cintra

## Teoria econômica neo-clássica e o princípio variacional na dinâmica de mercados

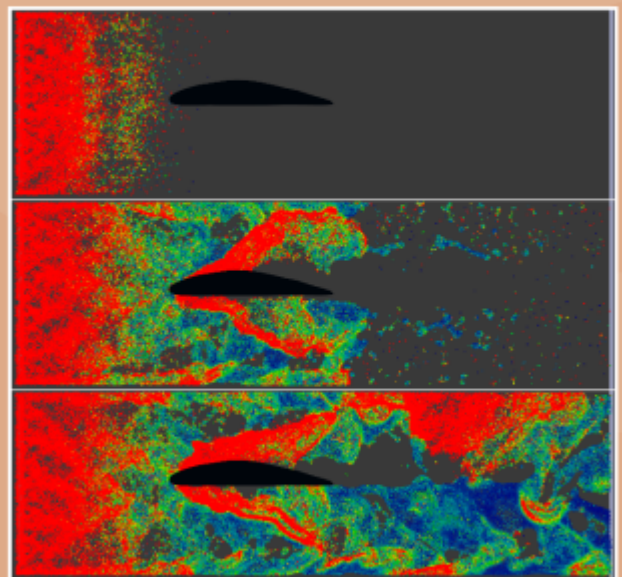
Henrique Alves de Lima

## Uma abordagem alternativa para o ensino da transmissão e recepção de ondas eletromagnéticas

Rodrigo Teixeira Rossi

## Jogos didáticos no ensino da eletrodinâmica

Mariele Andressa Auler Maciel, Fábio Lombardo Evangelista,  
Luciano Lewandoski Alvarenga



Capa: Leonardo Luiz e Castro, Fábio Luís de Oliveira Paula, Henrique Alves de Lima, Tiago de Araújo Sousa Cassiano

Editores

Editor-Gerente  
**Olavo Leopoldino da Silva Filho**

**Marcello Ferreira**  
**Leonardo Luiz e Castro**  
**Fábio Luís de Oliveira Paula**

## Nota editorial

A presente edição teve sua composição final realizada posteriormente à sua publicação original, com o objetivo de padronização editorial e atribuição de identificadores digitais (DOIs) aos artigos. Esse processo não alterou o conteúdo dos trabalhos originalmente publicados.

A equipe desta edição foi composta por Olavo Leopoldino da Silva Filho como editor gerente, Marcello Ferreira, Leonardo Luiz e Castro e Fábio Luís de Oliveira Paula como editores. A capa foi criada por Leonardo Luiz e Castro, Fábio Luís de Oliveira Paula, Henrique Alves de Lima e Tiago de Araújo Sousa Cassiano.

A equipe editorial agradece à Biblioteca Central da Universidade de Brasília (BCE/UnB) pelo apoio na configuração e no registro dos DOIs da revista, especialmente à bibliotecária Luísa Chaves Café.

— Leonardo Luiz e Castro, responsável pela composição final, 2026

## Editorial Note

This issue had its final composition prepared after its original publication, with the aim of editorial standardization and the assignment of digital object identifiers (DOIs) to the articles. This process did not alter the content of the originally published works.

The editorial team for this issue consisted of Olavo Leopoldino da Silva Filho (Managing Editor), Marcello Ferreira, Leonardo Luiz e Castro, and Fábio Luís de Oliveira Paula (Editors). The cover was created by Leonardo Luiz e Castro, Fábio Luís de Oliveira Paula, Henrique Alves de Lima, and Tiago de Araújo Sousa Cassiano.

The editorial team thanks the Central Library of the University of Brasília (BCE/UnB), especially librarian Luísa Chaves Café, for their support in configuring and registering the journal's DOIs.

— Leonardo Luiz e Castro, responsible for the final composition, 2026

## **Apresentação**

Lançamos mais um número da Revista *Physicae Organum*. Com isso, mantemos nossa missão de fomentar trabalhos relacionados com ações pedagógicas no Ensino de Física, tanto voltadas para o Ensino Superior, quanto direcionadas para o Ensino Médio. Neste número, apresentamos um artigo muito interessante sobre simulações em Física (Fluidos), artigos sobre o ensino de Física no Ensino Médio e outras abordagens. Esperamos que tais discussões sejam de grande utilidade para a comunidade acadêmica.

Atenciosamente, os Editores.

# Sumário

1	Mediando a aprendizagem de circuitos elétricos em Física	1
2	Desenvolvimento de um programa de ajuste da curva de magnetização de ferrofluidos polidispersos	14
3	Simulação de fluidos com Blender para ilustração científica	25
4	Ligação diatômica	42
5	Teoria econômica neo-clássica e o princípio variacional na dinâmica de mercados	63
6	Uma abordagem alternativa para o ensino da transmissão e recepção de ondas eletromagnéticas	79
7	Jogos didáticos no ensino da eletrodinâmica	89



# Mediando a aprendizagem de circuitos elétricos em física: proposta de sequência didática utilizando o modelo flipped classroom

Mediating the learning of electrical circuits in physics: teaching unit proposal using the flipped classroom model

MARCO PAULO DO NASCIMENTO MAIA SOARES<sup>1</sup>, MARCELLO FERREIRA\*<sup>1</sup>,  
ALEXANDRE BETINARDI STRAPASSON<sup>2</sup>, OLAVO LEOPOLDINO DA SILVA FILHO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física, Universidade de Brasília

<sup>2</sup>Imperial College London, Inglaterra

---

## Resumo

*A mediação da aprendizagem de circuitos elétricos no âmbito do ensino de Física é desafiadora, pois requer elevada capacidade de abstração dos alunos e habilidade de inovação didática do professor. O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de sequência didática reflexiva para o ensino de circuitos elétricos, voltada a alunos do ensino médio, adequada aos parâmetros curriculares nacionais vigentes no Brasil. Para isso, foi utilizado o modelo de flipped classroom (sala de aula invertida) à luz da teoria de desenvolvimento cognitivo de Lev Vygotsky, tanto na perspectiva social dos alunos em sala de aula, quanto em suas atividades fora do ambiente escolar. Foram utilizadas diferentes estratégias metodológicas de ensino, a fim de fomentar situações em que o aluno seja protagonista da aprendizagem, explorando de forma consciente e consistente o seu potencial. Como resultado, espera-se que o aluno, ao final da sequência didática, tenha capacidade de reconhecer e relacionar os conceitos estudados com situações práticas de seu cotidiano. Além disso, espera-se que tenha adquirido autonomia no processo de aprendizagem e desenvolvido habilidades sociais e cognitivas, além de ter conseguido criar modelos gráficos e mentais sobre o funcionamento e aplicação de circuitos elétricos.*

**Palavras-chave:** Circuitos Elétricos. Ensino de Física. Lev Vygotsky. Autonomia da Aprendizagem. Flipped Classroom.

---

\*marcellof@unb.br

---

### Abstract

*Mediating the learning of electrical circuits in the field of Physics teaching is challenging, requiring high abstraction skills from the student and innovative didactics from the teacher. The objective of this paper is to propose a reflexive teaching unit on electrical circuits for high school students, adequate to Brazil's current national curriculum standards. The proposal is based on the use of the flipped classroom model in the light of Lev Vygotsky's cognitive development theory, both in the social perspective of students in classroom and in their activities outside the school premises. Different methodological teaching strategies were used in order to foster situations in which students are the protagonists of their own learning, while consciously and consistently exploring their potential. As a result, at the end of the proposed teaching unit, the students are expected to be able to recognize and associate the concepts studied with practical situations of their daily lives. In addition, it is expected that the students would have acquired autonomy in their learning processes and developed social and cognitive skills, as well as would be able to create graphic and mental models on the operation and application of electrical circuits.*

**Keywords:** *Electrical Circuits. Physics Teaching. Lev Vygotsky. Autonomous Learning. Flipped Classroom.*

---

## I. INTRODUÇÃO

O estudo de circuitos elétricos na disciplina de Física do ensino médio é fundamental ao entendimento de situações práticas da vida diária dos alunos e requisito para progresso em cursos superiores, sobretudo nas áreas de ciências exatas e engenharia. Uma dificuldade comum entre os alunos é a de interpretar modelos e esquemas apresentados pelo professor, bem como associá-los à respectiva teoria física. Entre as múltiplas causas dessa dificuldade, observa-se, frequentemente, um enfoque excessivo na aplicação de equações matemáticas por parte do professor, sem a devida contextualização e vinculação entre o que é estudado em sala de aula e a realidade dos alunos (RICARDO; FREIRE, 2007), seja por falta de atividades que façam essa conexão, seja pelo tempo reduzido que os alunos têm em sala de aula para poderem explorar melhor os assuntos, considerando-se os diferentes ritmos de aprendizagem de cada estudante (OLIVEIRA *et al.*, 2016).

Uma proposta didática para lidar com esse problema é a utilização do modelo *flipped classroom*, ou sala de aula invertida (BERGMANN; SAMS, 2012), em conjunto com a teoria de desenvolvimento cognitivo de Vygotsky e o uso de simulações em classe, buscando subsidiar o aluno na aprendizagem de circuitos elétricos, por meio da interação entre pares, mediada pelo professor. Além disso, o modelo busca auxiliar o aluno no desenvolvimento de suas capacidades de interpretação, investigação e resolução de problemas, bem como sua capacidade de trabalhar em equipe, respeitando o ritmo de aprendizado e a experiência prévia de cada indivíduo.

O ensino de circuitos elétricos na disciplina de Física, com as características aqui propostas, guarda respaldo legal nos seguintes normativos: Parâmetros Curriculares Nacionais

para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000); e Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006). Ambos visam à organização do ensino de circuitos elétricos em torno de elementos introdutórios de eletrônica, equipamentos elétricos e telecomunicações, que se encontram presentes no cotidiano do aluno. A ideia é que o aluno seja capaz de estabelecer conexões entre os conceitos teóricos estudados e suas aplicações, assim como interpretar e resolver problemas propostos na disciplina de Física. O atual modelo educacional propõe uma alfabetização tecnológica e a socialização do indivíduo, tornando-o capaz de entender e interpretar informações relativas aos temas estudados, como, por exemplo, saber ler valores nominais de tensão ou potência de aparelhos elétricos e ler manuais com determinada clareza. Também requer que o aluno seja capaz de empregar seus símbolos, utilizar e dominar a linguagem física corretamente, dentre outras habilidades e competências. Para além do ensino de Física, os normativos citados também preveem um ensino que coloca em foco o desenvolvimento cognitivo do aluno e o processo de investigação, promovendo a autonomia para aprender e a contextualização de tópicos estudados, visando à integração entre ciência, tecnologia e a sociedade em que estão inseridas, conforme disposto nas Diretrizes e Bases da Educação Nacional, por meio da Lei Federal nº 9.394/1996 (BRASIL, 1996).

Dessa forma, o conjunto de aulas aqui proposto utiliza o modelo de *flipped classroom*, concebido originalmente por Bergmann e Sams (2012), em que aluno tem contato com o material didático antes da aula. O aparato instrucional pode ser no formato de texto ou em mídias – como videoaulas, por exemplo – que fazem a introdução do conteúdo, podendo vir acompanhado de roteiros de estudo, questionários ou exercícios introdutórios. Na presente proposta, o material é composto por videoaulas, questionários, roteiros de estudo com exercícios e problemas sobre os temas escolhidos, bem como exercícios e problemas de modelagem utilizando um *software* para realização de simulações de circuitos elétricos. Em sala de aula, são propostas situações-problema e trabalhos de pesquisa, a fim de despertar o interesse científico e o processo de investigação autônoma. O professor tem papel de mediador, auxiliando os alunos, verificando dificuldades individuais e corrigindo erros conceituais eventualmente não dirimidos apenas com a leitura do material previamente disponibilizado. Dessa forma, o aluno tem mais tempo em sala de aula para trabalhar os conceitos e modelos propostos, e o professor, para interagir com os alunos e identificar suas necessidades particulares.

Além disso, a proposta dessa sequência é baseada na teoria de desenvolvimento cognitivo de Lev Vygotsky, em que a aprendizagem se dá por meio de processo dialógico-dialético entre professor e alunos (MOREIRA, 2011). Portanto, o professor ocupa papel de mediador, ao invés de mero transmissor de conteúdo. Cabe ao professor incitar discussões sobre os temas estudados, encorajar a pesquisa, a investigação e o trabalho em grupo, participando ativamente no desenvolvimento dos estudantes em coletivo. Assim, a construção do conhecimento se dá pela interação com o outro, atribuindo significados aos símbolos discutidos em classe, bem como pelo estudo individualizado e pela utilização de instrumentos didáticos dinâmicos, que possuem papel de mediação e desenvolvimento da linguagem durante o processo de ensino-aprendizagem coletivo.

Vygotsky sugere que as funções mentais superiores são formadas por meio da interação social e da transmissão cultural e que o processo de aprendizado dá origem a variados

processos de desenvolvimento, criando uma zona de desenvolvimento iminente (ZDI), representada pela diferença entre o nível de conhecimento real do indivíduo e seu potencial de desenvolvimento (VYGOTSKY, 1991; 2000; 2010). Sendo assim, o processo de avaliação dos estudantes deve estar baseado em indicadores que captem a efetividade da aprendizagem por meio da interação social, além do desempenho individual.

Tendo em vista tais elementos, este trabalho tem por objetivo propor uma sequência didática de aprendizagem ativa na área de circuitos elétricos, alinhada à teoria de desenvolvimento cognitivo de Vygotsky, como contribuição didática ao ensino de Física no Ensino Médio. Busca-se, portanto, a interação entre os alunos, seu desenvolvimento individual e social, e indicadores para a sua avaliação. Mais especificamente, o modelo de sequência didática deve propiciar a compreensão e a diferenciação dos conceitos de carga, corrente elétrica, resistência elétrica, associação de resistores, efeito Joule, potencial elétrico, potência elétrica, diferença de potencial, curto circuito e geradores. A proposta é apresentar e discutir a relação entre esses conceitos, incluindo o desenvolvimento de modelos gráficos e a utilização de simuladores on-line para experimentos físicos, bem como estimular o aluno a utilizar ferramentas de pesquisa em atividades extraclasse.

Ao atingir os objetivos propostos, a hipótese de sucesso é a de que o aluno tenha um rendimento individual (desenvolvimento real) potencializado pela interação em grupo (potencial de desenvolvimento) por meio de processo dialógico-dialético ocorrido em classe, sendo capaz de interpretar os modelos propostos e desenvolver as capacidades de investigação e compreensão de situações-problema, aprendendo a obter informações e reconhecer fontes relevantes de forma autônoma.

O tema trabalhado neste artigo é voltado a alunos do Ensino Médio, em particular àqueles cursando o terceiro ano, uma vez que os conceitos associados a circuitos elétricos normalmente são apresentados nessa série e têm como pré-requisito conhecimentos de eletrostática abordados em séries anteriores. É necessário, também, no início do período das aulas, orientar os estudantes sobre como assistir aos vídeos e ler os materiais de forma efetiva, encorajando-os a retornar as partes em que tiveram dúvidas e a fazer anotações sobre os temas-chave do assunto; isso auxiliará o professor a identificar os potenciais erros conceituais e as dificuldades que deverão ser objeto de ação didática mais detida em aulas subsequentes. As estratégias aqui sugeridas necessitam que o aluno tenha acesso a computador ou *smartphone* conectado à internet, em casa ou na escola.

## II. BASE EPISTEMOLÓGICA

Vygotsky parte da premissa construtivista de que o desenvolvimento cognitivo de um sujeito não pode ser entendido sem referência ao contexto social e cultural no qual ele ocorre (MOREIRA, 2011). Três aspectos principais de sua teoria cabem ser destacados: i) os processos mentais superiores do indivíduo têm origem em processos sociais; ii) os processos mentais devem ser entendidos a partir dos instrumentos e signos que os mediam; iii) o conceito de “método genético-experimental”, em que a gênese da aprendizagem se dá pelo processo de experimentação e interação com o outro. Tais conclusões foram hauridas de estudo experimental do desenvolvimento cognitivo do indivíduo, com o intuito de tornar objetivos seus processos psicológicos interiores, quando são apresentadas situações que

não sejam rigidamente controladas e ofereçam oportunidades para que se tornem claros os processos de seu desenvolvimento real, com a introdução de obstáculos de complexidade crescente de atividades em grupo e individuais. Busca-se, portanto, desafiar as operações cognitivas do educando, evidenciando qual seria sua ZDI (VYGOTSKY, 1991).

Além disso, Vygotsky diz que o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem como um instrumento linguístico, bem como pela experiência sociocultural do indivíduo. Assim, o desenvolvimento de suas funções lógicas seria função direta de seu discurso socializado. Já a ação de escrever exige uma análise do indivíduo, que tem de tomar consciência da estrutura sonora de cada palavra, dissecá-la e produzi-la em símbolos alfabéticos que devem ser memorizados e estudados de antemão (VYGOTSKY, 2000). Essa abordagem também dialoga com a pedagogia crítica de Paulo Freire, que valoriza a importância de o processo de aprendizagem estar conectado à realidade do indivíduo, a fim de torná-lo um cidadão autônomo e com visão crítica de seu papel na sociedade (FREIRE, 2005; 2011).

Para o ensino de circuitos elétricos em Física, podemos considerar que o uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) pode servir de instrumento à execução de atividades didáticas na internalização do sistema de signos matemáticos e físicos (MACÊDO *et al.*, 2012). Isso se conecta ao fato de que elas podem auxiliar processos cognitivos humanos, como a memorização, a imaginação, a percepção e o raciocínio lógico, por intermédio de arquivos digitais, bancos de dados e formas de acesso e busca de informações, incluindo o uso de *softwares* interativos (LEVY, 1999). A utilização de simulações interativas para o ensino de circuitos elétricos torna os alunos capazes de representar e visualizar uma quantidade maior de aplicações de modelos físicos e matemáticos, resguardados os limites do aplicativo utilizado para tal.

Por meio de dispositivos eletrônicos, como *smartphones* e computadores, e do uso da internet, o aluno é capaz de acessar e adquirir informações praticamente em tempo real, assim como trocar informações com outros colegas. Portanto, a função do professor não pode ser apenas a de transmitir conhecimento, não obstante as diferentes formas de se difundir conhecimento, mas a de mediador e catalizador de uma aprendizagem coletiva. A atividade do professor deve estar “centrada no acompanhamento e na gestão das aprendizagens: o incitamento à troca dos saberes, a mediação relacional e simbólica, a pilotagem personalizada dos percursos de aprendizagem etc.” (LEVY, 1999, p. 171).

Portanto, a importância da mediação reside na internalização das atividades e dos comportamentos sociais e culturais na forma de funções mentais, procedimento este que é indireto e dependente da mediação pelo uso de instrumentos e signos que, ao serem interiorizados, permitem o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Todas as atividades propostas pelo professor-mediador visam ao desenvolvimento na ZDI, encorajando o trabalho em grupo e o engajamento dos alunos na atividade, possibilitando o diálogo e a interação entre eles. No âmbito da teoria de Vygotsky, é por meio da interação social e da mediação que o indivíduo, no caso o aluno, vai passar pelo processo de internalização de signos, portanto, pelo processo de reconstrução interna (MOREIRA, 2011).

Somente interagindo com outros alunos ele pode verificar se o significado de suas estruturas simbólicas é socialmente aceito em relação aos significados compartilhados por outros e por ele mesmo. Como o trabalho em grupo pressupõe comunicação entre

seus integrantes, é fundamental que todos os alunos falem e tenham a oportunidade de falar, respeitando-se as diferenças de cada indivíduo. A fala permite a flexibilização do pensamento conceitual e proposicional por meio do domínio da linguagem; portanto, permite o pensamento abstrato flexível, importante ferramenta para o ensino de Física. A capacidade de abstrair os conceitos aplicados e de extrapolar outros casos que não apenas o estudado é parte do processo de interpretação de qualquer problema ou exercício proposto (VYGOTSKY, 1991; 2000; 2010).

Conforme mencionado anteriormente, a ZDI representa o potencial que o aluno tem para assimilar novos conhecimentos, ativando as funções cognitivas que estão em processo de amadurecimento. Essa zona está em constante mudança, uma vez que sua dinâmica é uma relação entre a capacidade do aluno de resolver problemas individualmente, que representa o limite inferior da ZDI, e seu nível de desenvolvimento potencial, medido por sua capacidade de resolver problemas em colaboração com companheiros que estejam mais avançados na compressão dos conteúdos do curso ou com o professor, representando o limite superior da ZDI (VYGOTSKY, 1991). Portanto, na abordagem vygotskiana, o resultado do desenvolvimento se encontra muito mais nos processos, do que no produto. A proposta de sequência didática apresentada a seguir também reconhece o valor dos conhecimentos prévios dos alunos, entendendo que a mediação parte exatamente dessa especificação.

Cabe também destacar a importância da dosagem em atividades extraclasse, uma vez que o aluno também está sujeito a demandas de outros docentes em sua instituição, além de outras eventuais responsabilidades profissionais e pessoais da vida particular do estudante. A sobrecarga de atividades externas pode comprometer o bem-estar do aluno e o prazer na realização das atividades externas, tornando-as uma mera burocracia para obtenção de nota e aprovação. Idealmente, o professor deve discutir suas práticas com seus colegas professores da mesma instituição e buscar sinergias e integração entre práticas, inclusive na eventual realização de trabalhos interdisciplinares conjuntos, dentro do projeto político-pedagógico maior da escola. Assim, é importante que o processo de ensino-aprendizagem seja dinâmico e em diálogo tanto com o aluno, quanto com a instituição. Além disso, o estudo individual também deve ser valorizado e não apenas o relacionamento social, pois diferentes formas de interação entre o sujeito e meio resultam em diferentes modelos mentais no processo de assimilação, acomodação e equilíbrio do conhecimento (MONTROYA *et al.*, 2011; PREUSSLER, 2012; JOHNSON-LAIRD, 1995).

### III. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esta proposta de sequência didática e suas estratégias foram planejadas seguindo principalmente os conceitos apresentados na teoria de desenvolvimento cognitivo de Vygotsky. Dessa forma, praticamente todas as atividades de sala de aula foram planejadas para serem executadas em grupo, enquanto as atividades extraclasse são individuais. Para isso, foi utilizado o modelo *flipped classroom*, em que o aluno recebe o material antes da aula, já preparado e organizado de acordo com a sequência de aulas que vão acontecer. Assim, em sala de aula, o estudante tem mais tempo para aprofundar o conhecimento junto a seus colegas e ao professor. Nesse modelo, o docente assume o papel de mediador e o aluno se torna protagonista de seu aprendizado. Isso significa que o aluno passa a ter liberdade em relação

ao seu ritmo de estudo e aos seus processos de aprendizado. O professor motiva os alunos a pesquisar as respostas para as tarefas de sala ao invés de simplesmente dar a resposta, corrigindo e alinhando os conceitos por eles adquiridos, conforme a necessidade. Portanto, uma participação ativa de todas as partes nesse processo é importante na construção do conhecimento, de forma a incentivar o processo de investigação em coletivo.

O material enviado anteriormente às aulas contém a parte didática necessária para as atividades em classe, assim como as instruções para o uso das simulações e como elas devem auxiliar o aluno em seus estudos individuais. No caso em tela, o aluno deve ser capaz de montar modelos de circuitos elétricos no simulador e usar suas ferramentas para verificar se seus estudos estão corretos, usando a tecnologia como instrumento de seu aprendizado, assim como para responder os questionários que acompanham o material. Os questionários também têm a função de roteiro de estudo, uma vez que trazem propostas de circuitos para modelagem e as perguntas são feitas a propósito delas.

Para as simulações, será utilizado o Kit de Construção de Circuito (KCC), que pode ser encontrado no site desenvolvido pelo projeto Tecnologia no Ensino de Física<sup>1</sup> (PhET – *Interactive Simulation*), desenvolvido pela Universidade do Colorado em Boulder, Estados Unidos, e disponível gratuitamente on-line. O próprio projeto traz roteiros com propostas de questionários e modelos a serem estudados.

Na primeira aula, o professor institui diálogo com os alunos, de forma a alinhar as expectativas em relação à sequência didática e ao que é esperado deles ao final. Também é verificado em que nível os alunos conseguem relacionar os conhecimentos previamente adquiridos pelo material enviado e os conhecimentos que são pré-requisitos desta sequência, no caso, a relação entre eletrostática e eletrodinâmica. Uma série de questões motivadoras deve ser levantada, contextualizando o assunto com o cotidiano do aluno, por exemplo, fazendo relações com sistemas elétricos residenciais e motivando os alunos a explorarem a ligação entre conceitos de eletrostática e eletrodinâmica.

À medida que as aulas avançam, o nível de complexidade das tarefas propostas aumenta, acompanhando a quantidade de assuntos abordados pelo material e trabalhados em sala de aula. Em cada aula, o professor tem espaço para interagir com os alunos e buscar evidências de seus desenvolvimentos cognitivos, observando suas capacidades de trabalho em grupo e auxiliando os que têm mais dificuldade para tal. O professor também deve atentar para que os grupos possuam alunos com diferentes experiências, alocando, na medida do possível, aqueles com maior domínio sobre o conteúdo com colegas em maior dificuldade.

A sequência didática proposta sugere a utilização de oito aulas de aproximadamente 50 minutos cada, tempo frequentemente alocado para aulas de Física no Ensino Médio em todo o país. Esse é o tempo destinado para a execução das tarefas de sala, uma vez que o material já deve ter sido previamente estudado. A observação prévia dos materiais é de suma importância; caso não ocorra, o processo de mediação em sala de aula ficará comprometido. As propostas de aulas e atividades estão descritas no Quadro 1 e foram elaboradas com base na experiência docente dos autores e na fundamentação teórica previamente discutida neste trabalho.

---

<sup>1</sup>PhET: Simulações Interativas em Ciências e Matemática. Acessível em: [https://phet.colorado.edu/pt\\_BR/](https://phet.colorado.edu/pt_BR/)  
Acessado em: 12 de jun. 2019.

**Quadro 1:** Sequência didática para ensino de circuitos elétricos ao ensino médio.

<b>Aula 1</b>	<b>Tema: Relacionando carga elétrica e corrente elétrica</b>
Objetivo	Explorar as relações entre os temas de eletrostática e circuito elétrico.
Metodologia da aula	Momento 1: Alinhamento das expectativas da sequência didática e o que será esperado dos alunos durante as próximas aulas, explicitando quais são os objetivos e metas gerais que eles devem alcançar. Neste momento deve ser verificado como foi a interação dos alunos com o material previamente enviado no modelo <i>flipped classroom</i> . Em diálogo com a turma, o professor deve pedir que os alunos falem sobre as notas que cada um tomou durante o estudo do material, explorando dúvidas ou pontos de dificuldade, buscando homogeneizar o nível de conhecimento e desenvolvimento da turma. Momento 2: Aplicação de roteiro de pesquisa com questões abertas, relacionando os conceitos vistos em eletrostática e o que foi estudado sobre corrente elétrica. Alunos devem pesquisar em grupos de preferencialmente três ou quatro pessoas e responder sobre as relações conceituais e matemáticas encontradas. O roteiro deve ser recolhido e o professor deve atribuir uma nota, como parte da avaliação de progresso de cada aluno. Observação: Tanto a discussão com a turma, quanto o trabalho em grupo, visam à integração dos conceitos de Vygotsky sobre os processos de aprendizado originados pelas interações sociais, assim como avaliar o potencial de desempenho de cada aluno em ambiente social.
Pontos a serem pesquisados e desenvolvidos através do roteiro de pesquisa	Quais os conceitos (físicos e matemáticos) e as relações entre: carga, força elétrica, campo elétrico, potencial elétrico, trabalho e corrente elétrica? Qual a diferença entre Corrente Alternada e Corrente Contínua?
<b>Aula 2</b>	<b>Tema: Potência elétrica e consumo de energia elétrica</b>
Objetivo	Entender a relação entre potência elétrica e o consumo de energia elétrica, assim como reconhecer informações de voltagem, amperagem e potência elétrica em aparelhos elétricos e eletrônicos.
Metodologia	No material enviado previamente, as diretrizes para a aula 2 podem conter direcionamentos para que os alunos tragam fotos das etiquetas de aparelhos elétricos e eletrônicos com suas informações de potência, corrente, voltagem características do aparelho. Esse material será utilizado em sala para desenvolver modelos matemáticos relacionando as informações com o consumo de energia elétrica de cada aparelho. Os alunos devem trabalhar em grupo para desenvolver os conceitos físicos do tema, montar propostas de economia no consumo de energia elétrica e formas alternativas de geração de energia elétrica. Os trabalhos e modelos de cada grupo devem ser recolhidos para avaliação e atribuição de nota de desempenho, como parte da avaliação de progresso individual dos alunos.
Pontos a serem pesquisados e desenvolvidos em sala	Qual a relação da potência elétrica de um aparelho com seu consumo de energia? Como podemos economizar no consumo de energia elétrica no nosso cotidiano?
<b>Aula 3</b>	<b>Tema: Circuito Elétrico, Lei de Ohm e Resistores</b>
Objetivo	Aprofundar conhecimentos sobre circuito elétrico e conceitos envolvidos nas Leis de Ohm e Resistores.
Metodologia	Nesta aula, os alunos devem trabalhar em grupo, resolvendo questionário com perguntas conceituais, problemas abertos e fechados de complexidade crescente sobre o tema. O questionário é recolhido para avaliação.
Pontos a serem desenvolvidos pelos alunos	O que é um circuito elétrico? O que é a Lei de Ohm? Qual a relação entre os conceitos? Qual a relação matemática entre eles? Qual a diferença entre sentido real e sentido e sentido convencional da corrente elétrica.
<b>Aula 4</b>	<b>Tema: Associação de resistores</b>
Objetivo	Trabalhar o conceito de resistor, desenvolver modelos simulados com os alunos e suas representações matemáticas.
Metodologia	O professor deve trazer um roteiro de estudos com problemas conceituais e matemáticos envolvendo diferentes montagens de circuitos com os tipos de associação de resistores. Em sala, os alunos devem trabalhar em grupo para resolver os problemas, podendo usar o KCC para ajudar na compreensão e visualização do assunto em seus aparelhos eletrônicos. Caso a escola tenha acesso a laboratório computacional ou <i>tablets</i> eletrônicos, o professor pode levar os alunos ao laboratório ou disponibilizar os aparelhos para os alunos utilizarem o KCC neles. Alternativamente, o professor pode utilizar um projetor e fazer simulações juntamente com os alunos de forma agregada. As respostas dos problemas resolvidos devem ser recolhidas para avaliação.
Pontos a serem desenvolvidos	Quais são os tipos de associação e qual a relação entre eles? Quais são as principais características de cada associação e seus respectivos desdobramentos matemáticos?
<b>Aula 5</b>	<b>Tema: Efeito Joule e curto circuito</b>
Objetivo	Trabalhar os conceitos do Efeito Joule e situações de curto circuito, correlacionando com aplicações e fenômenos do cotidiano.

Metodologia	Essa aula se baseia em uma apresentação dos grupos sobre os conceitos abordados no tema, suas aplicações no cotidiano e as diferenças da teoria estudada e os fenômenos reais. O professor prepara estudos de caso apresentando situações-problema sobre os temas-chave e os disponibiliza previamente para que os alunos trabalhem em cima deles e o apresentem para a turma durante a aula, explicando a situação-problema e a forma como decidiram abordá-la. O desempenho individual do aluno durante a apresentação e seu domínio sobre o tema deve ser avaliado pelo professor, assim como o desempenho do grupo. É necessário que se faça anotações e observações sobre os desempenhos individuais e em grupo como base para a avaliação
Proposta de discussões discutidas em sala:	<p>Questão 1: O que é o efeito Joule?                  Como está presente no cotidiano?                  Qual sua importância para nosso dia a dia?                  Quais suas aplicações, e como se relaciona com os conceitos previamente estudados?</p> <p>Questão 2: O que é curto circuito?                  Por que ocorre?                  Suas consequências em um modelo de circuito elétrico.                  Suas consequências no cotidiano e como evitar, diferenças para o modelo teórico e o real.</p>
<b>Aula 6</b>	<b>Tema: Geradores</b>
Objetivo	Trabalhar o conceito de gerador, desenvolver modelos simulados com os alunos e suas representações matemáticas.
Metodologia	O professor deve trazer um roteiro de estudos com problemas conceituais e matemáticos envolvendo diferentes montagens de circuitos com os tipos de associação de resistores e geradores. Em sala, os alunos devem trabalhar em grupo para resolver os problemas, podendo usar o KCC para ajudar na compreensão e visualização do assunto em seus aparelhos eletrônicos. Caso a escola tenha acesso à laboratório computacional ou <i>tablets</i> eletrônicos, o professor pode levar os alunos ao laboratório ou disponibilizar os aparelhos para os alunos utilizarem o KCC neles. Alternativamente, o professor pode utilizar um projetor e fazer simulações juntamente com os alunos de forma agregada. As respostas dos problemas resolvidos devem ser recolhidas para avaliação.
Pontos a serem desenvolvidos	<p>O que são geradores e quais os tipos de geradores estudados?                  Descreva a Lei de Poilet.                  Qual a relação entre resistores e geradores?                  Qual a relação com a lei de Ohm e seus desdobramentos matemáticos?</p>
<b>Aula 7</b>	<b>Tema: Trabalho Final – Reostatos e Potenciômetros</b>
Objetivo	Desenvolver pesquisa aprofundada sobre o tema, explorar suas aplicações no cotidiano, bem como sua importância no controle de sistemas elétricos e eletrônicos.
Metodologia	Os alunos são organizados em grupos e devem desenvolver uma pesquisa aprofundada sobre o tema, trazendo uma situação-problema e como ela poderia ser resolvida pelo uso de reostatos e potenciômetros. O professor deve instigar o processo de pesquisa e investigação dos alunos, deixando que eles desenvolvam o trabalho de forma autônoma, estando atento à participação dos alunos em seus grupos. Ao final da aula o professor recolhe os trabalhos.
Pontos a serem explorados no trabalho	<p>Explorar as aplicações de reostatos e potenciômetros (ex.: usina hidroelétrica), a diferença entre os dois e se existem métodos mais eficazes atualmente para a mesma aplicação (para essa última parte, não há a necessidade de se aprofundar; ela serve apenas para demonstrar se o aluno é capaz de reconhecer as evoluções tecnológicas que se originaram a partir da utilização do reostato e do potenciômetro).                  Desenvolver um modelo (com demonstração gráfica e matemática) de circuito complexo utilizando geradores, resistores, reostatos e potenciômetros, utilizando os conceitos trabalhados anteriormente. O professor pode pedir para os grupos criarem modelos próprios, ou trazer um problema complexo para que os alunos resolvam em sala.</p>
<b>Aula 8</b>	<b>Tema: Entrega do trabalho e finalização da sequência de aulas</b>
Objetivo	Rever e reforçar os principais temas vistos durante a sequência de aulas, sanar dúvidas que podem ter restado e preparação para a última meta individual.
Metodologia	Esta aula tem formato de discussão aberta em que os alunos têm oportunidade de fazer perguntas sobre temas a respeito dos quais possa remanescer dúvida. É requisitado que os alunos façam comentários sobre o que mais aprenderam na sequência de aula e suas maiores dificuldades. Compartilhar essas informações faz parte do processo de socialização dos alunos e é um marcador para o professor avaliar o desenvolvimento do grupo de alunos durante a sequência. A última meta contendo uma prova individual final é liberada para os alunos na sequência dessa aula.
Temas a serem discutidos	<p>Discussão em sala de aula sobre as aplicações dos conceitos vistos em sala de aula. Compartilhar isso em sala de aula faz com que eles percebam que não são os únicos com as mesmas dificuldades.                  Tirar dúvidas que tenham restado nos alunos.                  Como eles aplicariam os conhecimentos adquiridos em seu cotidiano?                  Preparação para próxima sequência de aulas se for o caso.</p>

#### IV. PROPOSTA DE AVALIAÇÃO

Conforme apresentado, a sequência didática tem como objetivo o desenvolvimento de indivíduos socialmente ativos e com capacidade de reconhecer e solucionar problemas, tanto em grupo, como individualmente. Deste modo, propõe-se resolução de problemas e questionários de complexidade gradual e crescente, descritos como metas de aprendizagem. Todos os alunos têm metas individuais para cumprir fora de sala e metas em grupo para cumprir dentro dela, com limite de tempo de entrega. As metas têm por objetivo estimular os alunos a progredirem criticamente e se manterem comprometidos com o curso, bem como avaliar gradativamente a evolução de seus aprendizados.

A primeira meta individual é encaminhada junto da matéria de estudo preparatória para a aula e tem o formato de questionário, com a finalidade de verificar se o aluno foi capaz de entender os conceitos explicados no material. O limite de entrega, portanto, é o início da primeira aula. Cada meta individual segue o mesmo padrão de tempo limite, sendo liberado ao final de uma aula para ser entregue até a seguinte. A partir da segunda meta individual, além do questionário, é proposto um problema de baixa complexidade que vai aumentando conforme o aluno avança para as próximas metas. A última meta individual é uma prova contendo uma sequência de problemas com níveis crescentes de complexidade, porém dentro do potencial de aprendizagem significativa do aluno, no amparo dos conteúdos discutidos em classe. Essa segue os padrões das instituições de ensino, podendo ser adaptada e modelada de acordo com eles, tais como avaliação mensal ou bimestral, a depender da escola.

As metas de sala de aula deverão ser em grupo e pressupõem envolvimento de todos os componentes na sua execução. Para cada aula são apresentadas discussões, problemas e questionamentos para que os alunos investiguem sobre o assunto com certo grau de autonomia, e trabalhem em respostas de acordo com as pesquisas feitas. Dessa parte, é esperado que os alunos consigam trabalhar assuntos contextualizados em paralelo. Para a aula 7 (Quadro 1), os alunos devem desenvolver e entregar um trabalho de maior complexidade, envolvendo os assuntos abordados no conjunto completo das aulas.

Por meio das metas individuais e em grupo, o professor pode verificar os indicativos de desenvolvimento dos alunos, tanto individualmente quanto em grupo, verificando as habilidades de cada um. As metas são um processo de avaliação somativa e formativa, uma vez que é composta por aplicação de questionários, resolução de problemas abertos e fechados, pesquisas, uma prova e um trabalho final. Os alunos devem ser avaliados ao final de cada etapa e pelo desenvolvimento de suas capacidades, observadas na forma como desenvolvem os conceitos estudados e organizam suas ideias. Dessa forma, ao avaliar os alunos durante esta sequência didática, o professor estará avaliando seus processos de desenvolvimento, os erros, acertos, organização, participação e evolução do aluno e não somente o produto final de sua nota. Portanto, será verificado em sala, nos trabalhos e nas resoluções dos problemas e dos questionários se os alunos:

1. participaram das discussões de sala e na resolução das metas de grupo;
2. alcançaram a resolução das metas individuais;

3. souberam diferenciar e relacionar os conceitos de carga, corrente elétrica, potencial elétrico, diferença de potencial, potência elétrica, resistência elétrica, associação de resistores, curto circuito e geradores;
4. conseguiram correlacionar conceitos de eletrostática e eletrodinâmica;
5. entenderam a diferença dos modelos propostos e dos modelos reais dos circuitos elétricos;
6. observaram a relação entre potência elétrica e o consumo de energia elétrica, conseguindo extrapolar os conceitos para seu cotidiano; e
7. correlacionaram corrente elétrica com o efeito Joule e como isso é observado em situações reais.

Ao avaliar os resultados das metas, o professor deve buscar indicadores de que houve desenvolvimento na ZDI dos alunos, comparando seus resultados individuais com os resultados em grupo por meio do desempenho qualitativo nos trabalhos, da sua participação nas tarefas de grupo e das discussões em sala. A progressão de dificuldade e complexidade das metas individuais faz com que o aluno tenha que desenvolver novas habilidades e indica seu desenvolvimento real, informando também sobre a qualidade da mediação; já os trabalhos assistidos por outros colegas ou pelo professor mostram qual é o potencial de cada aluno (VYGOTSKY, 1991; 2010). Destarte, a aproximação das notas individuais das notas das atividades assistidas é um indicador do desenvolvimento real do aluno.

Cabe mencionar que as avaliações não devem ser vistas como um instrumento punitivo, mas de aprimoramento e estímulo ao aprendizado. A capacidade de contextualizar os conceitos explorados didaticamente é outro indicador que está presente nas metas de sala de aula e, ainda que represente de forma incompleta um determinado fenômeno natural, se os conceitos utilizados apresentarem coerência entre si, haverá um indício de que foram bem assimilados pelo aluno. Além disso, sugere-se que, ao final do ciclo de sequência didática, o professor também seja avaliado pelos alunos, de forma anônima, para proteger suas identidades. Isso pode ser feito com o subsídio de formulário padronizado, fornecendo indicadores para que o professor reflita e qualifique suas abordagens de mediação.

### V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência didática proposta teve como objetivo o ensino de circuitos elétricos e seus conceitos para alunos de Física do Ensino Médio, explorando seus potenciais cognitivos de forma interativa, por meio do modelo de sala de aula invertida (*flipped classroom*). Tendo como foco a teoria de aprendizagem cognitiva de Vygotsky, buscou-se associar as estratégias, objetivos e proposta de avaliação a indicadores que pudessem demonstrar, de forma clara, se houve desenvolvimento do aluno. Conclui-se que o modelo de *flipped classroom* é compatível com a proposta de Vygotsky, uma vez que o professor assume o papel de mediador e os alunos se tornam protagonistas de seu aprendizado (desenvolvimento).

Ao término da sequência didática, espera-se que os alunos sejam capazes de explicar os conceitos estudados com propriedade, desenvolvendo autonomia parcial para estudar e

aprender os assuntos propostos com criticidade. Em particular, isso se favorece em temáticas que exigem grande abstração, como é o caso do estudo de circuitos elétricos.

Adicionalmente, observa-se que esta proposta tem cunho social, uma vez que trabalha a capacidade do indivíduo de ser socialmente ativo e participativo nas atividades em classe, com alteridade, assim como evidencia suas habilidades individuais, por meio das metas aplicadas. Toda a proposta se baseia no uso de tecnologias digitais e na capacitação do indivíduo de aplicá-las em prol da construção do conhecimento por meio da interação com o outro.

A proposta aqui sugerida também pode ser explorada em outras partes do ensino de Física que não somente em circuitos elétricos e, eventualmente, também em outras disciplinas, guardadas as devidas adaptações necessárias. Além disso, os autores deste trabalho recomendam que sequências didáticas análogas e adicionais sejam desenvolvidas, testadas e aprimoradas em estudos futuros, com vistas a fomentar a troca de experiências em propostas de ensino com diferentes amparos epistemológicos.

## REFERÊNCIAS

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de Aula Invertida: uma Metodologia Ativa de Aprendizagem**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BRASIL. Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/19394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm)>. Acesso em: 28 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 28 jun. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf)>. Acesso em: 28 jun. 2019.

FREIRE, P. **A Pedagogia do Oprimido**. Brasil: Paz e Terra, 2005. 45<sup>l.</sup> ed. 213p.

FREIRE, P. **A Pedagogia da Autonomia**. Brasil: Paz e Terra, 2011. 43<sup>l.</sup> ed.

JOHNSON-LAIRD, P. N. **Mental Models: Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness**. Cambridge MA, Estados Unidos: Harvard University Press, 1995. LÉVY, P. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34, 1999.

MACÊDO, J. A.; DICKMAN, A. G.; ANDRADE, I. S. F. Simulações Computacionais como Ferramentas para o Ensino de Básicos de Eletricidade. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v. 29, n.

Especial 1: p. 562-613, set. 2012. DOI: 10.5007/2175-7941.2012v29 nesp1p562

MONTOYA, A. O. D.; MORAIS-SHMIZU, A.; MARÇAL, V. E. R.; MOURA, J. F. B. (Org.). **Jean Piaget no Século XXI: Escritos de Psicologia e Epistemologia Genéticas**. Marília, SP: Editoras Cultura Acadêmica e Oficina Universitária, 2011.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999. 2ª ed.

OLIVEIRA, T. E.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Sala de aula invertida (*flipped classroom*): Inovando as aulas de física. **Física na Escola**, v. 14, n. 2, 2016.

PREUSSLER, R. Análise dos Processos de Assimilação, Acomodação e Equilibração na Aprendizagem da Matemática: Uma Experiência Envolvendo a Geometria. **Anais da IV Jornada Nacional de Educação Matemática**. Rio Grande do Sul, RS: Universidade de Passo Fundo (UPF), 6-9 de maio de 2012. 15p.

RICARDO, E. C; FREIRE, J. C. A. A concepção dos alunos sobre a física no ensino médio: um estudo exploratório. **Rev. Brasileira de Ensino de Física**, Brasília, v.29, n. 2, p. 251-266, 2007.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKY, L. S; LEONTIEV, A. N.; LURIA, A. R. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 11ª ed. São Paulo: Ícone, 2010.



# Desenvolvimento de um programa de ajuste da curva de magnetização de ferrofluidos polidispersos

Development of a program to fit the magnetization curve of polydisperse ferrofluids

TIAGO DE SOUSA ARAÚJO CASSIANO\*<sup>1</sup>, SAMUEL GUEDES DOS SANTOS<sup>†1</sup>,  
VANESSA PILATI<sup>1</sup>, FÁBIO LUÍS DE OLIVEIRA PAULA<sup>1</sup>,  
LEONARDO LUIZ E CASTRO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física – Universidade de Brasília – UnB

---

## Resumo

*Um ferrofluido é uma dispersão coloidal de nanopartículas magnéticas. Sua curva de magnetização reflete uma competição entre a agitação térmica e a tendência de alinhamento com um campo magnético aplicado. A interação entre as partículas magnéticas torna-se menor à medida que o sistema é diluído. Portanto, a curva de magnetização de um ferrofluido com baixa concentração de partículas pode ser aproximada pela curva de Langevin, que descreve partículas isoladas que apenas interagem com um campo magnético aplicado. A curva de Langevin aplica-se a um sistema de partículas magnéticas de diâmetros iguais, ou seja, um ferrofluido monodisperso. Num ferrofluido real, porém, os diâmetros das partículas são diferentes, sendo melhor descritos por uma distribuição log-normal. Nesse sistema polidisperso, a curva de Langevin deve ser corrigida através de uma integral ponderada pela frequência relativa dos diâmetros na distribuição. Neste trabalho, apresentamos um programa desenvolvido em Java para ajuste da magnetização pela curva de Langevin generalizada, calculada por meio de integração numérica. O programa tem uma interface gráfica que permite fácil utilização por pesquisadores experimentais.*

**Palavras-chave:** ferrofluido, magnetização, curva de Langevin, ajuste de curva, polidispersão.

---

\*T. S. A. Cassiano participou deste trabalho na condição de bolsista da FAP-DF e estudante de iniciação científica do ProIC/DPG/UnB.

<sup>†</sup>S. G. dos Santos participou deste trabalho na condição de estudante de iniciação científica do ProIC/DPG/UnB.

---

### Abstract

*A ferrofluid is a colloidal dispersion of magnetic nanoparticles. Its magnetization curve reflects a competition between the thermal agitation and the tendency of alignment with an applied magnetic field. The interaction between the magnetic particles becomes smaller as the system is diluted. Therefore, the magnetization curve of a ferrofluid with low particle concentration can be approximated by the Langevin curve, which describes isolated particles that only interact with an applied magnetic field. The Langevin curve applies to a system of magnetic particles with equal diameters, that is, a monodisperse ferrofluid. In a real ferrofluid, however, the particle diameters are different, and are best described by a log-normal distribution. In this polydisperse system, the Langevin curve must be corrected by an integral weighted by the relative frequency of the diameters in the distribution. In this work, we present a computer program developed in Java to adjust the magnetization by the generalized Langevin curve, calculated by means of numerical integration. The program has a graphical interface that allows easy use by experimental researchers.*

**Keywords:** *ferrofluid, magnetization, Langevin curve, curve fitting, polydispersity.*

---

## I. INTRODUÇÃO

### I. Ferrofluido

Ferrofluido (ou fluido magnético) é um tipo de coloide que reage a campos magnéticos externos (ROSENSWEIG, 1997). Este coloide consiste em uma dispersão de nanopartículas magnéticas com um meio contínuo. O estudo deste tipo de material é interessante pois permite investigarmos as suas propriedades magnéticas juntamente com as suas propriedades de fluidos, deste modo, o ferrofluido é um material único. Esta combinação, vem sendo investigada em diversas áreas. Tecnologias desenvolvidas utilizando ferrofluidos podem ser vistas nas mais diversas áreas, esta tendência, observada em toda parte do mundo, justificando a importância de estudos sobre este material.

A primeira patente relacionada ao chamado ferrofluido ultra-estável (aquele que se mantém estável durante um tempo considerável) foi desenvolvida por Papell (S.S, 1965) na NASA. A motivação desta patente estava no desenvolvimento de algum controle de combustível em microgravidade. Tópico altamente relevante no desenvolvimento de foguetes espaciais. Atualmente, aplicações em estágio final de desenvolvimento podem ser encontradas na biomedicina e mecânica. Entre algumas destas aplicações destacam-se a vetorização de fármacos (MAVER, 2009), na hipertermia (SATO, 2009), e selamento de motores (MAHONEY; HELGELAND, 2017).

Até o momento, ferrofluidos só podem ser produzidos artificialmente. A produção é feita juntando dois materiais distintos. Nanopartículas oriundas de algum material magnético são imersas em um solvente contínuo, material este que geralmente consistem em óxidos de ferro.

Uma das propriedades características do ferrofluido refere-se a sua propriedade magnética. A imersão de nanopartículas magnéticas em meios contínuos confere ao ferrofluido a propriedade de superparamagnetismo (GRIFFITHS, 1999). Objetos com este atributo, não possuem a chamada magnetização remanescente. Desta forma, a magnetização deste material não sofre um efeito de memória. De fato, poucos materiais apresentam o superparamagnetismo.

Talvez a medida mais canônica para materiais magnéticos, seja sua relativa curva de magnetização. Esta medida busca investigar a resposta de um material a presença de um campo magnético externo. Por conta do superparamagnetismo, ferrofluidos apresentam uma curva de magnetização bem característica. Esta curva, conhecida como **curva de Langevin**, é capaz de revelar muitas propriedades de uma amostra, sendo utilizada rotineiramente na caracterização magnética de deste tipo de amostras.

A literatura apresenta uma solução analítica da curva de magnetização apenas para um caso muito simplificado. As chamadas amostras monodispersas, ou seja, aquelas em que todas as nanopartículas apresentam o mesmo diâmetro, são o único caso com uma curva de Langevin analítica. Apesar de seu valor teórico, amostras monodispersas não tem relevância prática, uma vez que as amostras reais apresentam uma distribuição de diâmetros. Inicialmente esta realidade destoante poderia impossibilitar o uso do formalismo monodisperso. Entretanto, através de algumas adaptações torna-se possível a utilização do formalismo de Langevin para investigação de amostras reais, polidispersas.

Através do método de Monte Carlo, desenvolvemos um aplicativo em *java* capaz de automatizar o ajuste da curva de Langevin em amostras reais. O ajuste é realizado com a menor intervenção externa possível. Além disso, o *software* final apresenta deve seguir os princípios da usabilidade, podendo ser operado sem um conhecimento antecipado de programação. O *software* final foi apelidado de "Lajavan".

Neste trabalho, desenvolvemos uma ferramenta que pretende eliminar a participação subjetiva do cientista. A ferramenta, um software baseado no método de Monte Carlo, é capaz de ajustar a curva de Langevin para casos polidispersos de forma automatizada, por meio de critérios estatísticos, com o mínimo de interferência externa.

## II. Dedução da curva de Langevin

Considere um sistema com  $N$  nanopartículas não interagentes. Se o sistema estiver em equilíbrio térmico, sem a presença de um campo magnético externo, espera-se que a distribuição destas  $N$  nanopartículas seja uniforme. Considerando cada nanopartícula como um pequeno "bastão"(devido a orientação), a distribuição angular ( $n_{eq}(\theta)$ ) destas nanopartículas dentro de uma esfera de raio  $R$  na região entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é (ROSENSWEIG, 1997)

$$n_{eq}(\theta)d\theta = N \frac{2\pi \sin\theta R}{4\pi R^2} d\theta. \quad (1)$$

Em nome da simplicidade, façamos  $R = 1$ . Desta forma, a equação 1 é simplificada para

$$n_{eq}(\theta)d\theta = (N/2)\sin\theta d\theta. \quad (2)$$

Na presença de um campo magnético externo, a distribuição é modificada e cada nanopartícula passa a interagir com o campo. Esta interação altera o perfil da distribuição. Se o sistema estiver isolado, ao atingir o equilíbrio, a estatística de Maxwell – Boltzmann passa a ser válida (MANDL, 1980) e o sistema passa a ser canônico. Desta forma, a probabilidade associada ao sistema, com energia  $E$ , temperatura absoluta  $T$  deve ser proporcional ao fator de Boltzmann:

$$e^{-E/kT}. \quad (3)$$

A nova distribuição angular,  $n(\theta)$ , será proporcional ao produto das distribuição em equilíbrio, com o fator de Boltzmann

$$n(\theta)d\theta \propto e^{-E/kT} N/2 \sin \theta d\theta. \quad (4)$$

A constante de proporcionalidade é definida ao integrar a distribuição sob toda sua região:

$$\int_0^\pi n(\theta)d\theta = N \quad (5)$$

Nanopartículas magnéticas em um ferrofluido podem interagir entre si por diversos efeitos distintos (ISRAELACHVILI, 1992). Quando a densidade destas nanopartículas é pequena, pode-se negligenciar estas interações (ROSENSWEIG, 1997). Nestes casos, apenas a interação das nanopartículas com o campo se torna relevante. Nanopartículas magnéticas são modeladas como dipolos perfeitos, com  $\vec{m}$  bem definido. Desta forma, a presença de um campo de indução  $\vec{B}$  provoca um torque  $\vec{\tau}$  nas nanopartículas (GRIFFITHS, 1999)

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (6)$$

Seja  $\vec{M}$  a magnetização das nanopartículas,  $\vec{H}$  o campo magnético e  $\mu_0$  a permissibilidade magnética no vácuo, podemos reescrever o campo de indução como (ROSENSWEIG, 1997)

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \quad (7)$$

A magnetização é proporcional ao momento de dipolo magnético. Desta forma, ao combinar as equação 6 e 7, o produto vetorial com  $\vec{M}$  e  $\vec{m}$  será nulo. O torque resultante é então:

$$\vec{\tau} = \mu_0(\vec{m} \times \vec{H}). \quad (8)$$

O trabalho associado a orientação uma nanopartícula defasada em  $\theta'$  em seu ângulo azimutal, em relação ao campo magnético é

$$\int_0^{\theta'} \tau d\theta = \int_0^{\theta'} \mu_0(mH \sin \theta) d\theta. \quad (9)$$

Se consideramos um campo uniforme, o trabalho ( $W$ ) é simplesmente:

$$W = mH(1 - \cos \theta'). \quad (10)$$

Substituindo a energia da equação 4 pelo trabalho da equação 10, a distribuição angular das nanopartículas em uma amostra de ferrofluido monodisperso não interagente é:

$$n(\theta)d\theta \propto e^{-mH(1-\cos\theta)/kT} N/2 \sin \theta d\theta. \quad (11)$$

Sobre o banho térmico, em cada nanopartícula o vetor de momento de dipolo varia constantemente de direção. O torque descrito na equação 6 tenta constantemente orientar as nanopartículas. Em contrapartida, a energia térmica associada a temperatura do sistema, devido a seu caráter aleatório, tende a dificultar esta orientação. A projeção do dipolo magnético na direção do campo é  $m\cos\theta$ , seu valor médio ( $\bar{m}$ ) é então (ROSENSWEIG, 1997)

$$\bar{m} = \langle m \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\theta (m \cos \theta) n(\theta) d\theta}{\int_0^\theta n(\theta) d\theta}, \quad (12)$$

Substituindo a distribuição angular pela equação 4, temos que

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\pi (m \cos \theta) N \exp(-mH(1 - \cos \theta) / kT) \frac{\sin \theta d\theta}{2}}{\int_0^\pi N \exp(-mH(1 - \cos \theta) / kT) \frac{\sin \theta d\theta}{2}}. \quad (13)$$

Introduzindo a razão  $\alpha = mH/kT$  entre a magnitude máxima da energia magnética e a magnitude da energia térmica, seja a quantidade  $x = \alpha \cos \theta$ . A equação 13 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{m}/m = (1/\alpha) \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x e^x dx}{\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x dx}. \quad (14)$$

As integrais presentes na equação podem ser resolvidas analiticamente (ROSENSWEIG, 1997). A relação resultante é

$$\bar{m}/m = \coth \alpha - 1/\alpha. \quad (15)$$

A dependência com o momento de dipolo é, para fins práticos, não ideal. Geralmente reescreve-se a equação em função da magnetização. Sabe-se que a magnetização  $M$  do ferrofluido é, por definição (ROSENSWEIG, 1997)

$$\mu_0 M = n \bar{m}. \quad (16)$$

A magnetização de saturação  $M_s$  corresponde a magnetização na presença de alto campo. De maneira similar a equação 16,  $M_s$  é proporcional ao momento de dipolo correspondente. Ou seja,

$$\mu_0 M_s = n m. \quad (17)$$

Combinando as duas relações, temos que

$$M/M_s = \bar{m}/m. \quad (18)$$

A magnetização de saturação é proporcional a magnetização do sólido  $M_d$ . A constante

de proporção é simplesmente a fração volumétrica ( $\phi$ ). Em outras palavras,  $M_s = \phi M_d$ . Combinando os desenvolvimentos anteriores, podemos reescrever a fração  $\bar{m}/m$  em função da magnetização do sistema, ou seja (ROSENSWEIG, 1997)

$$\bar{m}/m = M/\phi M_d. \quad (19)$$

Ao inserir a mudança de variáveis, a equação 15 passa a ser conhecida como **equação de Langevin**. Sua forma é

$$M/\phi M_d = \coth \alpha - 1/\alpha. \quad (20)$$

### III. Adaptação Para Caso Polidisperso

Apesar da equação 20 ser um resultado importante, ela mostra ser de difícil verificação/utilidade experimental, principalmente pela sua imposição na monodispersão. A equação de Langevin então precisa ser modificada para casos mais gerais e reais.

#### III.1 Distribuição Log-Normal

Sabe-se que, na verdade, (GRANQVIST; BUHRMAN, 1975) o diâmetro das nanopartículas apresenta-se frequentemente como uma distribuição do tipo Log-Normal. Esta distribuição determina qual a probabilidade de se encontrar uma nanopartícula com certo diâmetro e apresenta:

$$f_{\log}(D) = \frac{\exp(-2\sigma^2)}{D_f^{max} \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln(D/D_f^{max})}{2\sigma^2}\right). \quad (21)$$

Em que  $D$  é o diâmetro,  $\sigma$  um parâmetro que define o quão dispersa é a distribuição e  $D_f^{max}$  é o diâmetro mais provável da distribuição. Sendo assim, para obter a equação 20 no caso polidisperso, devemos integrar a função de Langevin, para cada diâmetro, utilizando a probabilidade de encontrarmos esta partícula (com este diâmetro) como peso. Em outras palavras:

$$m_z/m_s = \frac{\int m(D)\mathcal{L}(D)f_{\log}(D)dD}{\int m f_{\log}(D)dD}. \quad (22)$$

Esta equação é conhecida como curva de Langevin para o caso polidisperso.

### IV. Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma técnica utilizada para obter valores médios de sistemas muito complexos. Inicialmente elaborado por John von Neumann e Stanislaw Ulam (CASTRO, 2009; METROPOLIS, 1953), o método foi desenvolvido durante a segunda guerra no estudo da difusão de nêutrons. Atualmente, seu uso pode ser visto nas mais diversas áreas da física. Talvez o caso mais bem sucedido esteja na física médica. A radioterapia, processo altamente difundido no combate ao câncer, utiliza o método de Monte Carlo ostensivamente no cálculo de transporte de radiação (ANDREO, 1991). Através deste cálculo, físicos médicos

são capazes de desenvolver protocolos de dosimetria(DASKALOV, 1998). Outras aplicações podem ser vistas na física estatística, mecânica quântica e até na economia.

A ideia essencial do método de Monte Carlo reside na forma como se calcula valores médios. Da física estatística, a média é uma integral normalizada sobre todo o espaço de fase. Seja  $x$  a grandeza qualquer do sistema, sua média é então

$$\langle x \rangle = \frac{\int x p(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \dots \vec{q}_{2N}) dV}{\int p(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \dots \vec{q}_{2N}) dV}. \quad (23)$$

Em que  $p$  é a probabilidade associada a configuração do sistema e  $q_n$  refere-se a  $n$ -ésima variável canônica (momento ou posição).

Sistemas minimamente realistas apresentam uma quantidade quase infinita de configurações possíveis. Por isso, o cálculo analítico da equação 23 é inviável na maioria dos casos relevantes. O método de Monte Carlo surge como uma alternativa para estes sistemas complexos. Através de técnicas de amostragem, o método consegue calcular, de forma aproximada, a média nestes sistemas. Estas técnicas tentam, através de algum critério específico, diminuir o espaço de fase, a fim de tornar o cálculo da equação 23 viável.

## II. OBJETIVO

Através do método de Monte Carlo, desenvolvemos um aplicativo em *java* capaz de automatizar o ajuste da curva de Langevin em amostras reais. O ajuste é realizado com a menor intervenção externa possível. Além disso, o *software* final apresenta deve seguir os princípios da usabilidade, podendo ser operado sem um conhecimento antecipado de programação. O *software* final foi apelidado de "Lajavan".

## III. O PROGRAMA

### I. Funcionamento Geral do Programa

Dada uma curva de magnetização experimental, desenvolvemos um software de ajuste, feito em Java, que aplica o método estocástico de Monte Carlo, e o algoritmo de Metropolis (CASTRO, 2009). O programa testa, utilizando parâmetros dentro de um intervalo estabelecido, várias curvas de magnetização.

Aplicando o método dos mínimos quadrados, assim como o algoritmo de Metropolis, selecionamos de forma dinâmica, entre as várias curvas geradas, a que melhor se ajusta à curva experimental. Chamamos estas curvas de ajuste teste (ou curva teste).

A motivação encontrada para esta abordagem é a grande limitação enfrentada pelos clássicos ajustes da teoria do calculo numérico. Por serem determinísticos, o desempenho destes ajustes depende completamente do "chute" fornecido, tendo uma eficiência instável. Monte Carlo não necessita deste tipo de entrada para funcionar, por fazer uso de variáveis aleatórias. O método, sozinho, percorre várias possibilidades, até encontrar o melhor candidato.

## II. *Design Pattern* do Programa

Tendo em mente a ideia de usabilidade de código, estruturamos o projeto com base nos chamados *desing patterns* (GAMMA, 1995). Escolhemos a estrutura MVC acrônimo para **M**odel, **V**iew, **C**ontroller; ela define uma abordagem, que prioriza separar o usuário da aplicação, possibilitando a utilização do código sem exigir qualquer conhecimento do programa em si. Esta relação é equivalente a de uma pessoa usando uma calculadora: ela sabe qual operação quer fazer, mas não precisa ter conhecimento de como a calculadora vai resolver a conta para ela.

Este tipo de paradigma é altamente desejável, principalmente na ciência, pois elimina a necessidade de que, cada pesquisador interessado no assunto, seja obrigado a fazer, sempre, o mesmo programa. Retomando a analogia da calculadora: é como se, cada pesquisador, fabricasse sua própria calculadora. Aqui, nos propomos a fazer uma calculadora para todos.

## III. Aparência e interação com o usuário

**Figura 1:** *Painel de controle do programa Lajavan - Elaboração dos autores.*

The screenshot shows the Lajavan control panel with the following details:

- Control:**
  - PATH TO EXPERIMENTAL DATA:
- METHOD OF INTEGRATION:**
  - Trapezium Method
- PARAMETERS:**
  - Interpolation of points in high field H. Máx. Iterations:
  - Activate this part with tolerance:   % Highest Fields
  - Interpolation of points on Langevin curve Máx. Iterations:
  - Activate this part with tolerance:   % Lowest Fields
  - Fix M in this part
- Parameter Table:**

	Minimum		Initial/Current		Maximum
Magnetization of solid (A/m):	<input type="text" value="10000"/>	<	<input type="text" value="170000"/>	<	<input type="text" value="200000"/>
Constant $6kT/\mu < d >^3$ (A <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> ):	<input type="text" value="0.01"/>	<	<input type="text" value="1000"/>	<	<input type="text" value="100000"/>
Modal diameter (nm) :	<input type="text" value="3"/>	<	<input type="text" value="4.5"/>	<	<input type="text" value="9"/>
Diameters dispersion:	<input type="text" value="0.1"/>	<	<input type="text" value="0.47"/>	<	<input type="text" value="0.6"/>

A arquitetura MVC permite o acesso indireto do usuário ao *software*. Este acesso é intermediado por um painel de controle. Este painel pode ser visto na figura 1. A primeira região no canto superior refere-se a aquisição do dados experimentais. A caixa de texto serve para inserir o nome do arquivo. Botões *Start*, *Clear* e *Path* realizam as respectivas operações: ler o arquivo experimental, limpar a caixa de texto, e inserir o caminho do arquivo

através de um "archive manager" do sistema operacional. Abaixo desta região, uma *list scroll* contém todos os métodos de integração suportados. Caixas de texto para inserir a incerteza e o número de interações máximo, para cada ajuste ficam logo abaixo. Na região inferior da janela, existem caixas de texto para definir as regiões de cada parâmetro.

O funcionamento padrão do software pode ser dividido nos dois tipos de ajuste possível, o ajuste de alto campo e o ajuste completo. O ajuste de alto campo preocupa-se em ajustar apenas a região de alto campo da curva. Já o ajuste completo, leva em conta todo o volume de dados. Recomenda-se executar um ajuste de alto campo inicialmente. Este ajuste inicial serve para melhorar o "chute" das regiões de cada parâmetro ajustado. Desta forma, o ajuste completo terá uma melhor chance de ser bem sucedido.

1. O usuário fornece o caminho do arquivo que contém os dados experimentais. O botão *path* pode ser utilizado para este fim;
2. Aperta-se o botão *Start* para o programa carregar os dados. Uma janela semelhante à figura 2;
3. O usuário escolhe um dos métodos de integração;
4. Estima-se um limite *range* para cada variável presente na curva de Langevin polidispersa. Os limites são adicionados nos campos "Magnetization of solid", "Constant", "Modal diameter" e "Diameters dispersion" de acordo com a intuição do usuário;
5. Determina-se a incerteza desejada no ajuste, assim como o número máximo de interações;
6. Finalmente, o ajuste é iniciado ao apertar o botão "Activate this part with tolerance".

A figura 2 mostra um exemplo de um carregamento bem sucedido de dados experimentais. O programa é capaz de apenas ajustar metade da histerese. Por isso, um tratamento inicial dos dados experimentais é geralmente requisitado.

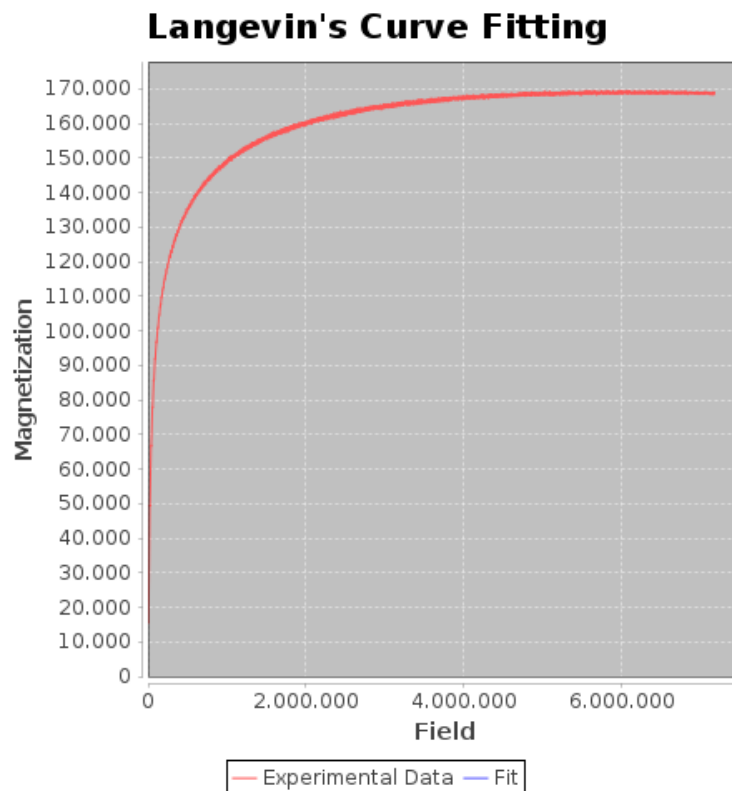
#### IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho, fomos capazes de implementar com êxito o método de Monte Carlo no ajuste de curvas. O software resultante possui a robusta estrutura *MVC*, que dispensa do usuário qualquer conhecimento prévio de programação. O ajuste é não determinístico, sendo totalmente autônomo em sua execução.

A curva escolhida para o ajuste foi a de Langevin para amostras polidispersas de ferrofluido. Esta medida, extremamente relevante na área de ferrofluidos, era até então ajustada por métodos manuais. Estes métodos, geralmente dependentes de uma análise subjetiva, tinha uma eficácia limitada. Nosso software final não depende desta intervenção subjetiva para funcionar. Portanto, através deste trabalho, apresentamos uma alternativa robusta, acessível e controlável, de se ajustar curvas de Langevin reais.

O êxito na implementação do método de Monte Carlo no ajuste de curvas abre um precedente para a aplicação em outros problemas da física.

**Figura 2:** Exemplo de um carregamento bem sucedido de dados experimentais - elaboração dos autores.



## V. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Prof. Jérôme Depeyrot e à Profa. Renata Aquino da Silva de Souza, pelo apoio científico durante o desenvolvimento do programa. Ao Centro de Apoio ao Desenvolvimento Tecnológico (CDT/UnB), por meio do qual o programa descrito neste artigo foi registrado no Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI) sob o número de registro BR512018000886-0. À Fundação de Apoio e Pesquisa (FAP-DF) e ao Programa de Iniciação Científica (ProIC) da Universidade de Brasília (UnB), pelo apoio dado aos estudantes que participaram deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ANDREO, P. Monte carlo techniques in medical radiation physics. *Physics in Medicine and Biology*, IOP Publishing, v. 36, n. 7, p. 861–920, jul 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0031-9155%2F36%2F7%2F001>>. 19
- CASTRO, L. L. e. *Simulação Monte Carlo de fluidos magnéticos voltados a aplicações tecnológicas e biomédicas*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2009. 19, 20
- DASKALOV, G. M.; LÖFFLER, E.; WILLIAMSON, J. F. Monte carlo-aided dosimetry of a new high dose-rate brachytherapy source. *Medical Physics*, v. 25, n. 11, p. 2200–2208, 1998. Disponível em: <<https://aapm.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1118/1.598418>>. 20

GAMMA, E.; HELM, R.; JOHNSON, R. E.; VLISSIDES, J. *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1995. (Addison-Wesley Professional Computing Series). 21

GRANQVIST, C. G.; BUHRMAN, R. A. Ultrafine metal particles. *Journal of Applied Physics*, v. 47, p. 2200, 1975. 19

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Nova Jersey: Prentice Hall - Upper Saddle River, 1999. 16, 17

ISRAELACHVILI, J. *Intermolecular e surface forces*. Londres: Academic Press, 1992. 17

MAHONEY, D. G.; HELGELAND, W. *Magnetic fluid seal with precise control of fluid volume at each seal stage*. [S.l.]: Google Patents, 2017. US Patent 9,816,617. 15

MANDL, F. *Statistical Physics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1980. 17

MAVER, U.; BELE, M.; MAKOVEC, D.; ČAMPELJ, S.; JAMNIK, J.; GABERŠČEK, M. Incorporation and release of drug into/from superparamagnetic iron oxide nanoparticles. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Elsevier, v. 321, n. 19, p. 3187–3192, 2009. 15

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.; ROSENBLUTH, M.; TELLER, A.; TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, v. 21, p. 1087, 1953. 19

ROSENSWEIG, R. E. *Ferrohydrodynamics*. Mineola, Nova York: Dover, 1997. 15, 16, 17, 18, 19

SATO, M.; YAMASHITA, T.; OHKURA, M.; OSAI, Y.; SATO, A.; TAKADA, T.; MATSUSAKA, H.; ONO, I.; TAMURA, Y.; SATO, N.; SASAKI, Y.; ITO, A.; HONDA, H.; WAKAMATSU, K.; ITO, S.; JIMBOW, K. N-propionyl-cysteaminyphenol-magnetite conjugate (nprcap/m) is a nanoparticle for the targeted growth suppression of melanoma cells. *Journal of Investigative Dermatology*, v. 129, n. 9, p. 2233 – 2241, 2009. 15

S.S, P. Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles. 10 1965. 15



# Simulação de fluidos com Blender para ilustração científica

## Fluid simulation with Blender for scientific illustration

TIAGO DE SOUSA ARAÚJO CASSIANO\*<sup>1</sup>, HENRIQUE ALVES DE LIMA<sup>†1</sup>,  
ALEXANDRE ADRIANO NEVES DE PAULA<sup>1</sup>, LEONARDO LUIZ E CASTRO<sup>‡1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física & Programa A3M (CEAD/DEG), Universidade de Brasília.

---

### Resumo

*Professores e estudantes de Física raramente têm acesso aos serviços de um ilustrador profissional, de modo que, quando querem escrever textos didáticos, têm que criar suas próprias ilustrações. Um grande desafio que encontram é representar fluidos de forma convincente, devido à complexidade dos fenômenos ópticos e reológicos que afetam a imagem de um fluido. Blender é um programa de computador voltado à computação gráfica que inclui uma ferramenta de simulação que permite representações realísticas de fluidos em movimento. O usuário tem a opção de selecionar atributos como viscosidade, transparência e cor, além de definir obstáculos sólidos ao escoamento do fluido. Como modelo de simulação do escoamento, é possível optar entre um fluido contínuo e um fluido representado por partículas. Mostramos aqui alguns resultados obtidos pelos participantes do projeto “Simulação de fluidos com programa Blender”, parte do Programa A3M (CEAD&DEC-UnB). Essas imagens apresentam os principais aspectos da simulação e ilustração de fluidos no Blender, ilustrados por meio de imagens produzidas no próprio programa por nossa equipe. Oferecemos assim uma opção de programa ao qual professores e estudantes possam se dedicar para aperfeiçoar a ilustração de fluidos em seus trabalhos didáticos e científicos.*

**Palavras-chave:** Física. Ilustração científica. Computação gráfica, Blender.

---

\*Tiago de Sousa Araújo Cassiano participou deste trabalho enquanto bolsista do Programa A3M (CEAD/DEG).

<sup>†</sup>Henrique Alves de Lima participou deste trabalho enquanto bolsista do Programa A3M (CEAD/DEG).

<sup>‡</sup>Autor correspondente – llcastro@unb.br.

---

### Abstract

*Physics teachers and students rarely have access to the services of a professional illustrator, so when they want to write didactic texts, they have to create their own illustrations. Representing fluids convincingly is a major challenge because of the complexity of the optical and rheological phenomena that affect the image of a fluid. Blender is a computer program with a simulation tool that allows realistic representations of fluids. The user has the option to set values of attributes such as viscosity, transparency and color, as well as defining solid obstacles to the fluid flow. As a simulation model, it is possible to choose between a continuous fluid and a fluid represented by particles. Here, we show some results created by the participants of "Fluid simulation with Blender", a project of the A3M Program (CEAD & DEC-UnB). These images present the main aspects of the simulation and illustration of fluids in Blender, illustrated through images produced in the program itself by our team. Thus, we offer an option of software to which teachers and students can devote themselves in order to improve the illustration of fluids in their teaching material and scientific texts.*

**Keywords:** *Physics, Scientific illustration, Computer graphics, Blender.*

---

## I. INTRODUÇÃO

Figuras são elementos essenciais do ensino de física. Seja para explicitar algum detalhe, ou auxiliar na visão geral de um problema, este recurso é utilizado desde os primórdios da física (NEWTON, 1833). Quanto mais elaborado o sistema, mais difícil se torna ilustrá-lo. Desta forma, educadores, professores e autores de livros estão constantemente em busca de novas estratégias e representações, afim de melhorar suas figuras. Na física, os conteúdos produzidos para fluidos clássicos sofrem especialmente desta dificuldade. Em quase toda sua essência, a teoria de fluidos clássicos lida com sistemas complexos onde há pouca margem de simplificação (ACHESON, 1991). Por isso, ilustrações manuais ou esboços tendem a reproduzir de forma insatisfatória até os fenômenos mais simples. Com a popularização da computação gráfica, este cenário tende a mudar. A possibilidade de modelar sistemas tri-dimensionais torna esta ferramenta especialmente eficaz na ilustração de fluidos clássicos. Por meio dela, é possível gerar ilustrações, animações ou recursos interativos sem perda de generalidade, mantendo a consistência física da fenomenologia. Espera-se que materiais didáticos produzidos via softwares de computação gráfica sejam mais efetivos na exposição de tópicos em ensino de física.

Desde 2017, o programa de aprendizagem para o terceiro milênio (A3M)(CASTRO, 2018) fomenta iniciativas que promovem a inserção de recursos tecnológicos na educação. Sob este contexto, o projeto "Simulação de Fluidos com Blender" foi desenvolvido em conjunto com o programa. A iniciativa foi concebida como uma forma de aprofundamento no uso de recursos de computação gráfica em um esforço para modernizar os recursos didáticos em ensino. O foco específico em fluidos é devido à especial dificuldade em representá-los graficamente. Além disso, um projeto de ilustração de fluidos tende a ser mais abrangente, por inevitável representar também recipientes e obstáculos sólidos.

O *software open source* Blender foi escolhido como o programa de computação gráfica a ser utilizado. Ele é amplamente utilizado pela comunidade, tendo uma extensa lista de aplicações de sucesso (NASA, ; DESCONHECIDO, ). Consequentemente, existe muito conteúdo dedicado ao desenvolvimento nesta plataforma, auxiliando novos usuários.

Neste trabalho iremos mostrar algumas das simulações desenvolvidas ao longo do projeto. No decorrer do texto, uma breve contextualização sobre cada fenômeno simulado será apresentada. Devido às limitações inerentes do formato de artigo, alguns recursos elaborados não serão apresentados na sua forma final. Por isso, convidamos o leitor interessado a acessar nossa página (GRA.FIS, 2019) para uma melhor apreciação.

## II. RESULTADOS

Concentramos o trabalho na produção de três classes de materiais didáticos: figuras, animações e infográficos. As figuras procuram ilustrar, aparatos ou fenômenos usualmente abordados em disciplinas que envolvem fluidos clássicos. Por outro lado, as animações tem um objetivo maior. Fenômenos que envolvem a evolução temporal de um sistema (não estáticos) geralmente são mal representados no formato de figuras. A animação tem por sua vez o propósito de auxiliar o entendimento do funcionamento de processos complexos que evoluem no tempo. Os dois recursos (figuras e animações) apesar de serem alternativas inovadoras na apresentação de tópicos da física dos fluidos clássicos, tratam-se de ferramentas avulsas. Para um uso eficiente destas técnicas, é necessário inseri-las em um contexto. Os infográficos são utilizados para esta finalidade. Ao reunir os materiais didáticos nesta estrutura, esperamos tornar a apresentação dos tópicos mais fluída.

### I. Imagens

Os primeiros resultados bem sucedidos de simulações foram obtidos na forma de imagens. Procuramos reproduzir princípios e fenômenos simples. Desta forma, ao final do processo, os integrantes estariam mais familiarizados com a ferramenta. Por questões de espaço, iremos exibir apenas uma parte das figuras.

#### I.1 Hidrelétrica

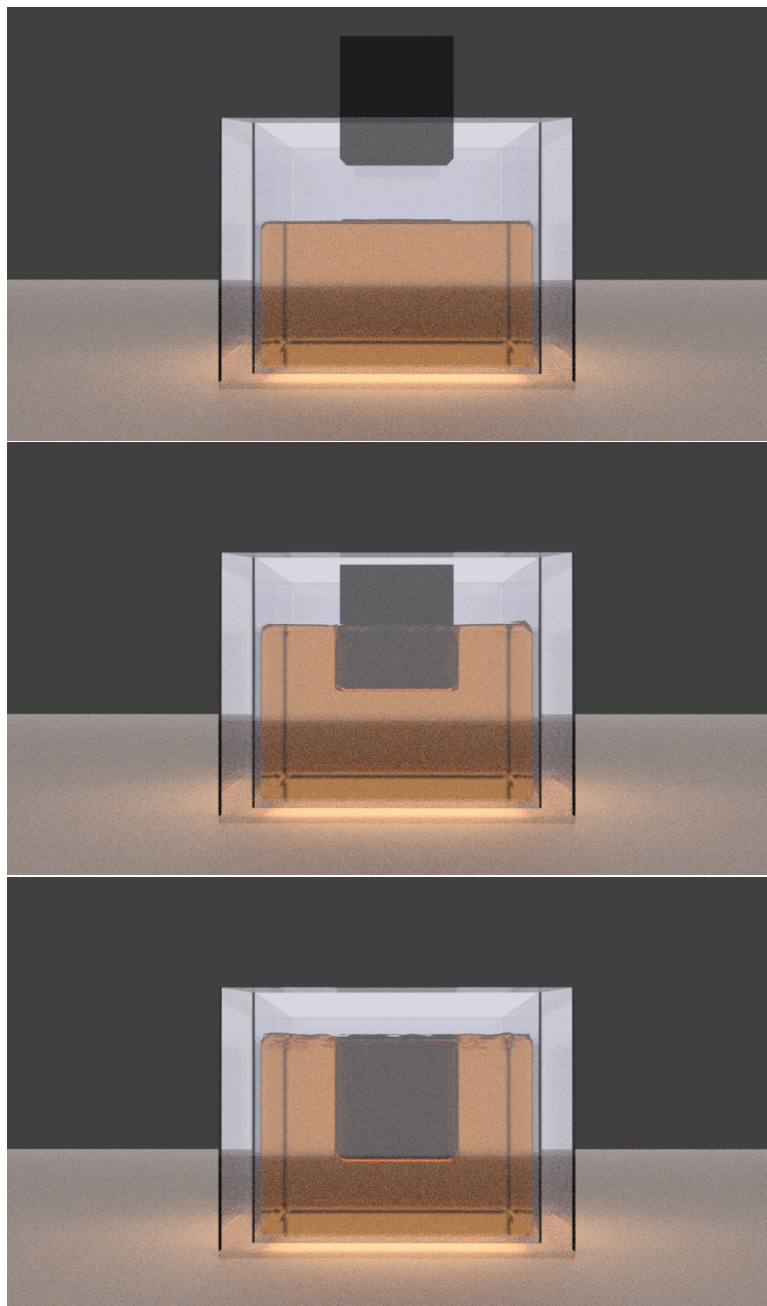
Muitos empreendimentos da engenharia utilizam as propriedades únicas dos fluidos. Configurações desenvolvidas há séculos são até hoje replicadas com poucas alterações. Um exemplo deste tipo de construção é a hidrelétrica. A primeira versão data de 1882 (HISTORY, ). Figura 1 mostra uma hidrelétrica simulada por nós. O modelo desenvolvido aqui apresenta o conceito de uma central hidrelétrica de pequeno porte. As imagens e animações criadas podem ser usadas para a apresentação de conceitos usados principalmente em engenharia, mas também de outras ciências naturais. As partes da central são coloridas de forma a destacar os objetos mais importantes.



**Figura 1:** *Simulação de uma pequena hidrelétrica. Nestes aparatos, a energia gravitacional armazenada no fluido é convertida em energia elétrica. Esta transferência é dada pela troca de energia cinética entre o fluido e a roda d'água. A ideia por trás desta configuração é usada até hoje.*

## **I.2 Princípio de Arquimedes**

Um dos princípios primordiais da teoria clássica dos fluidos, é o princípio de Arquimedes (NUSSENZVEIG, 2018). A figura 2 demonstra este fenômeno. As três sub figuras representam a evolução temporal do sistema. Um cubo (corpo rígido) é imerso em uma bacia com fluido. Pelo princípio, o volume de fluido que se realoca no recipiente, é igual ao do cubo. Desta forma, é possível medir de maneira indireta, o volume de objetos com geometria qualquer.

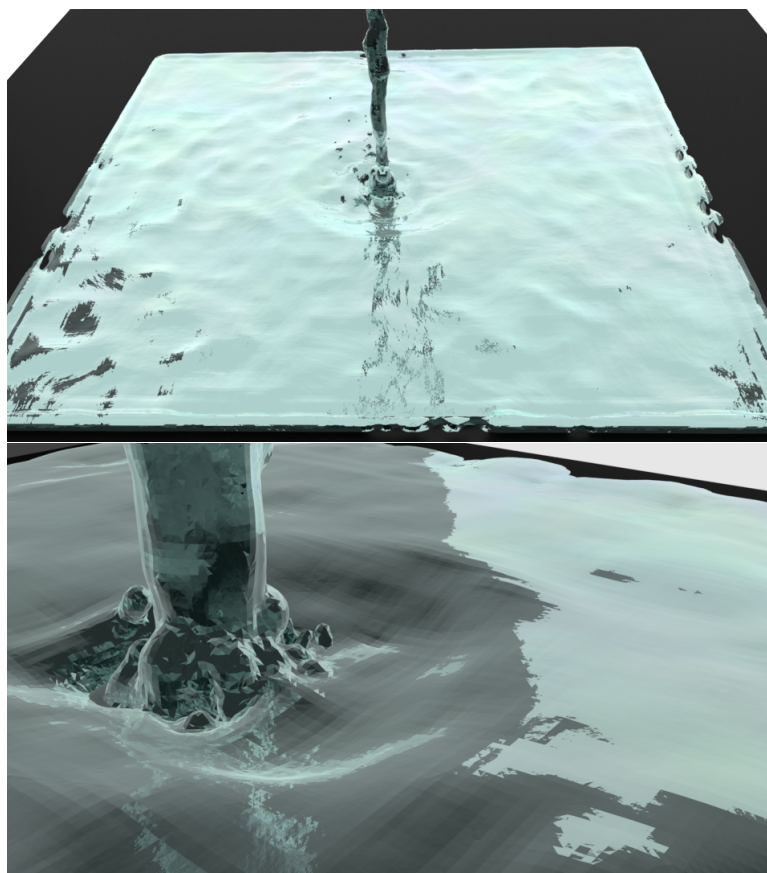


**Figura 2:** Sequência de figuras da simulação do princípio de Arquimedes em Blender. Um cubo rígido é imerso em uma bacia com fluido. À medida que o cubo afunda, o nível do fluido sobe. Para fluidos incompressíveis, o volume de fluido deslocado é o mesmo do cubo. Tal princípio é empregado amplamente na medição de volumes.

### I.3 Ondas superficiais

Figura 3 exhibe as chamadas ondas superficiais. Elas são consequência da perturbação do sistema. Quando um agente externo interfere em alguma propriedade do sistema, existe possibilidade de alterar o estado da configuração. No caso da figura, a perturbação é feita através de jatos de fluido, com momento não nulo. Esta injeção de momento perturba o sistema. Em ordem de dissipar esse fluxo de momento, o sistema passa a propagar ondas

superficiais ao longo da bacia.



**Figura 3:** Alguns exemplos da ondas superficiais em fluidos. Nas figuras, jatos de fluido são direcionados para bacias. A transferência de momento do jato para a bacia cria uma perturbação no sistema. Uma das manifestações desta perturbação é a propagação de ondas ao longo da superfície da bacia.

#### I.4 escoamento de uma torneira

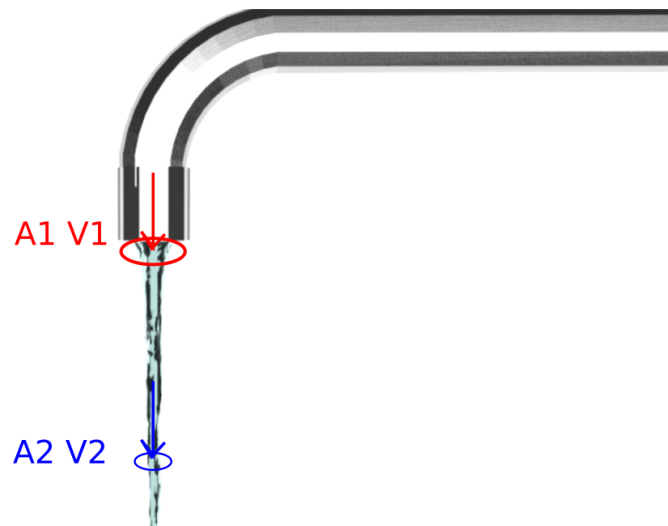
A física dos jatos de líquidos, é um ramo da física dos fluidos que tenta descrever sistemas onde ocorre algum tipo de ejeção de fluido. A torneira é um destes casos (talvez o mais simples). Assumindo a incompressibilidade do fluido, a explicação do fenômeno é de simples entendimento. Figura 4 mostra a simulação deste sistema. Quando o fluido é incompressível, pela conservação de massa, o fluxo de matéria de duas superfícies com áreas  $A_1, A_2$  distintas deve ser o mesmo. Em outras palavras

$$V_1 A_1 = V_2 A_2, \quad (1)$$

em que  $V_1$  e  $V_2$  são as velocidades do fluido perpendiculares às áreas  $A_1, A_2$ .

Supondo que  $A_2$  esteja localizada abaixo de  $A_1$ , pela ação da gravidade, a porção do fluido em  $A_2$  foi acelerada por mais tempo que o fluido em  $A_1$ . Portanto, a velocidade em  $A_2$ ,  $V_2$  será maior que  $V_1$ . Combinando com a condição de conservação de massa acima, temos que:

$$V_2 > V_1 \Rightarrow A_2 < A_1. \quad (2)$$



**Figura 4:** Simulação do escoamento de um fluido submetido à um campo gravitacional constante. Devida a presença de um campo de força constante, a medida que o fluido cai, maior é seu momento. Porém, se o fluido é incompressível, o fluxo de massa deve ser igual para qualquer duas seções transversais. Desta forma, em ordem de compensar o ganho de momento, a área transversal precisa diminuir.

Portanto, apenas pela presença da gravidade, a água é forçada a ter sua área transversal diminuída continuamente com o tempo.

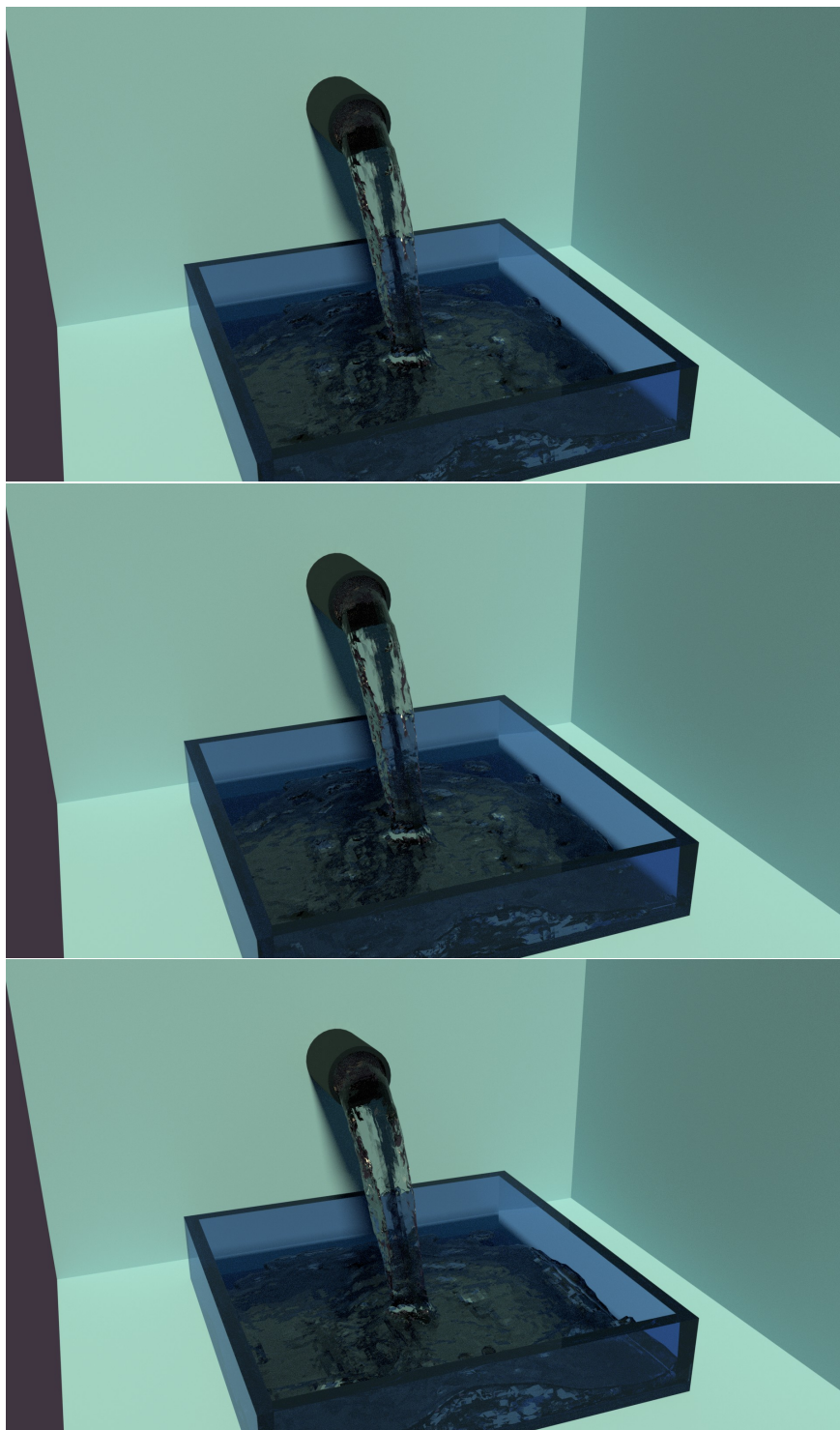
## II. Animações

### II.1 Cuba de água

Figura 5 mostra uma das primeiras animações feitas no projeto. Trata-se de um modelo simples onde um fluxo de água sai um cano e enche o recipiente. Esta aplicação inicial serviu para compreendermos o programa e entender como funciona a dinâmica de fluidos no blender.

### II.2 Efeito de Venturi

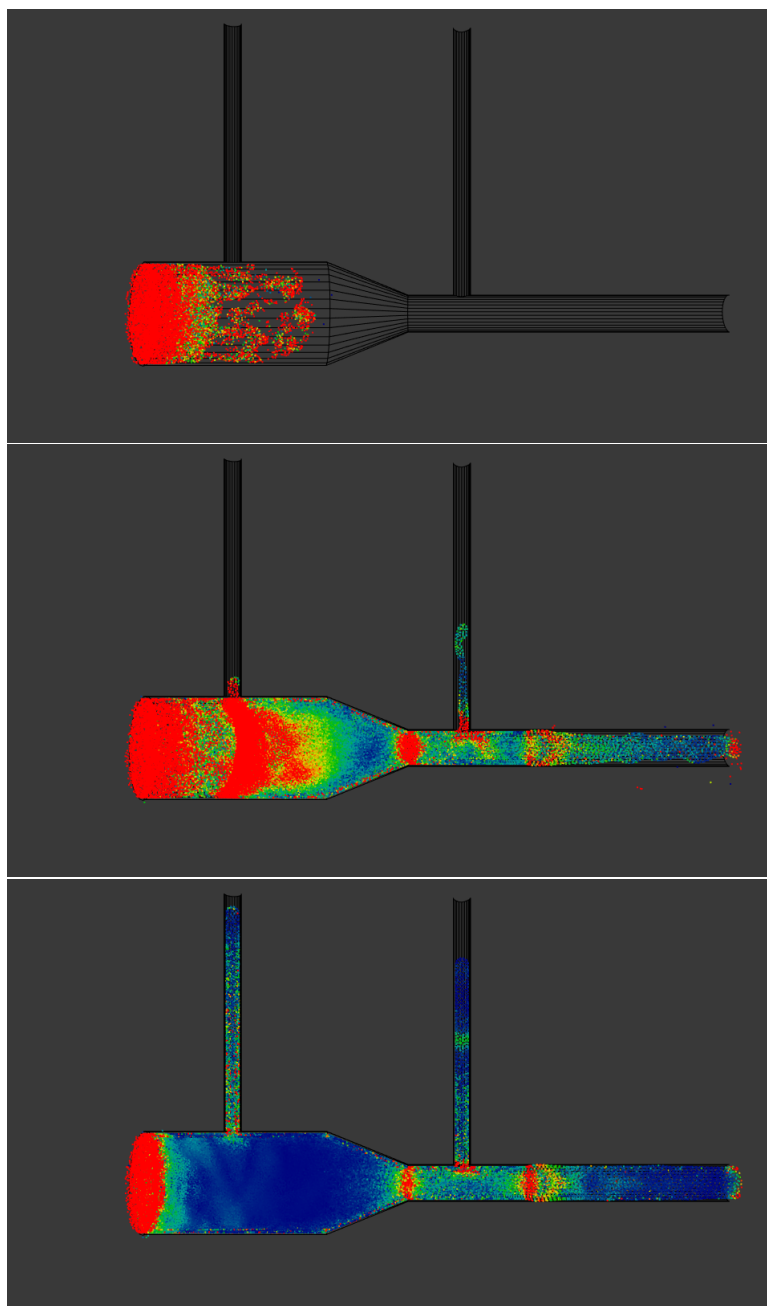
A sequência de imagens na figura 6 ilustra o conhecido efeito Venturi (NUSSENZVEIG, 2018). Este fenômeno surge ao considerar o escoamento de um fluido com variação local de pressão. Na animação, esta variação é imposta ao reduzir o diâmetro do cano de escoamento. A redução induz um aumento local na velocidade. Este aumento, pela lei de Bernoulli, compele o fluido a sofrer uma pressão menor. Tal constatação é verificada ao observar a diferença de nível entre os dois tubos verticais. Antes da variação local de pressão, o primeiro tubo vertical apresenta um nível alto, indicando uma pressão alta. Após a variação, o segundo tubo, atinge um nível menor, se comparado com o primeiro, indicando uma diminuição na pressão.



**Figura 5:** *Simulação de uma cuba sendo preenchida por água.*

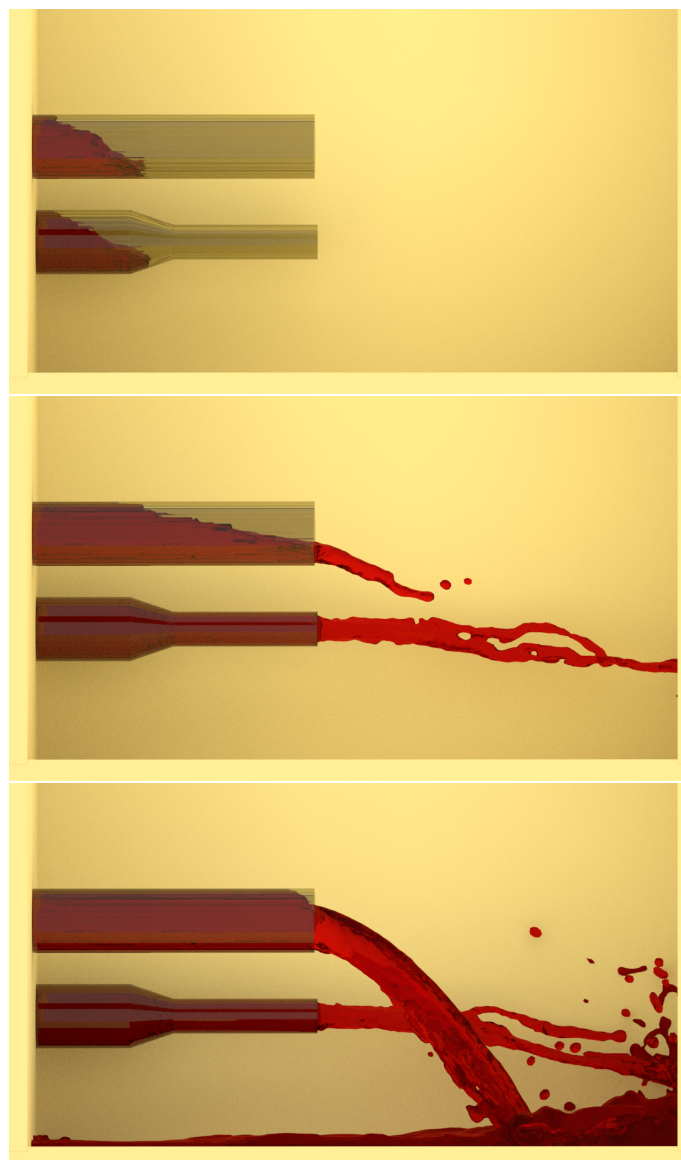
### **II.3 Estudo visual da equação de Bernoulli**

Figura 7 mostra uma simulação do escoamento de fluido em dois tubos com diâmetros diferentes. Este modelo busca apresentar a diferença na velocidade de fluxo de um fluido, em tubos que inicialmente possuem diâmetros iguais mas um deles tem seu diâmetro



**Figura 6:** Sequência temporal mostrando o efeito Venturi. O sistema consiste em um tubo com uma área transversal variável. A medida que o diâmetro varia, a pressão local também se modifica. Os pequenos tubos verticais revelam essa variação.

reduzido ao longo do caminho. Conhecendo as propriedades apresentadas pela equação de Bernoulli, é esperado que o tubo que tem seu diâmetro reduzido gere uma velocidade de escoamento maior no fluido. Os tubos são feitos de uma material com alta transparência e o líquido foi projetado para ter uma cor chamativa para facilitar a visualização de seu comportamento.

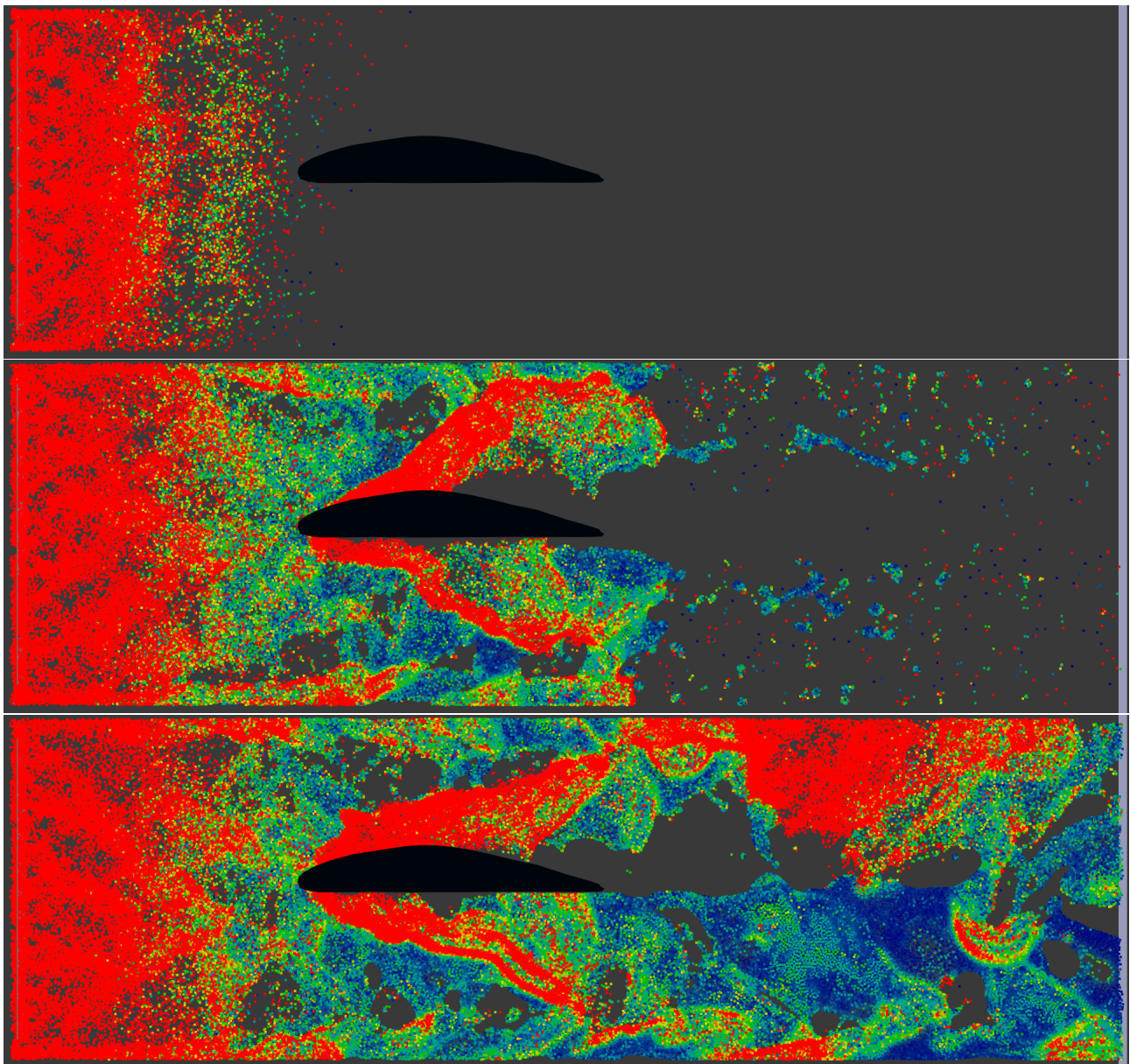


**Figura 7:** *Evolução temporal do escoamento de um fluido ao longo de dois tubos. Inicialmente, os tubos possuem a mesma proporção. Porém, ao se aproximar da extremidade, a área transversal de um dos tubos diminui. Desta forma, pela conservação de massa, haverá uma mudança na velocidade dos fluidos.*

#### II.4 Escoamento

Muitas aplicações tecnológicas associadas aos fluidos dependem da geometria do material (ACHESON, 1991). O formato, combinado com os regimes de escoamento pode resultar em diversas implicações relevantes. O exemplo mais notório é o avião. Quando em movimento, o avião sente o escoamento do ar ao redor. Historicamente, engenheiros buscam, através do design das aeronaves, minimizar o efeito dissipativo entre o avião e o ar. Uma das formas de se analisar tal problema é pelos experimentos de escoamento. Nestes experimentos procura-se otimizar alguma propriedade do escoamento através da introdução de novas geometrias. É sobre este contexto, que por exemplo, a ideia de aerodinâmica surge.

Além de possuir importância prática, o experimento de escoamento tem sua relevância histórica. Diversos conceitos associados a teoria clássica como, por exemplo, número de Reynolds foram elaborados no contexto deste tipo de sistema (ACHESON, 1991). Reproduzimos a montagem no Blender. Pode-se dividir o arranjo em três elementos: a caixa, a torneira e o objeto. A caixa é o domínio da simulação. Ela serve para limitar o escoamento. Já a torneira tem como função fornecer fluido dentro da caixa. O objeto consiste em qualquer material que se deseja estudar o escoamento. Figura 8 mostra a evolução temporal do escoamento de um aerofólio. A colisão com este corpo rígido induz perturbações no fluido, de modo que seu escoamento passa a ser do tipo turbulento.



**Figura 8:** Sequência de figuras mostrando o escoamento de um aerofólio. A simulação foi feita no modo de partículas. Sendo assim, o fluido é tratado como o comportamento coletivo destas partículas representativas. Cores quentes indicam regiões com valores altos de momento, enquanto que cores frias indicam baixo momento.

## II.5 Cuba de ondas

Em uma tentativa de simular aparatos reais, simulamos o sistema da figura 9. Trata-se de uma cuba com água onde um mecanismo gera ondas sobre a superfície. Esta é uma modelagem simples, inspirada em um experimento que busca analisar propriedades características dessa onda gerada, como comprimento de onda, velocidade de fase, velocidade de grupo e outras grandezas físicas relevantes.

## III. Infográficos

### III.1 Possibilidades de simulação de fluidos usando Blender

Afim de concentrar os resultados em um único material, compilamos diversos experimentos em uma revista. Ela contém infográficos que apresentam o nosso projeto e algumas possibilidades de simulação de fenômenos de fluidos usando Blender. Figura 10 exibe uma das páginas. Nela, uma contextualização dos pistões é feita, assim como a apresentação de diversas imagens.

Figura 11 mostra um infográfico retirado da revista. O tema desta página é o empuxo (NUSSENZVEIG, 2018). No lado direito, uma sequência temporal da simulação é apresentada. Através dela, é possível observar a evolução do sistema. Do lado esquerdo, há um texto de apoio, onde a simulação é explicada.

### III.2 Modelos e preceitos para simulação de fluidos usando Blender

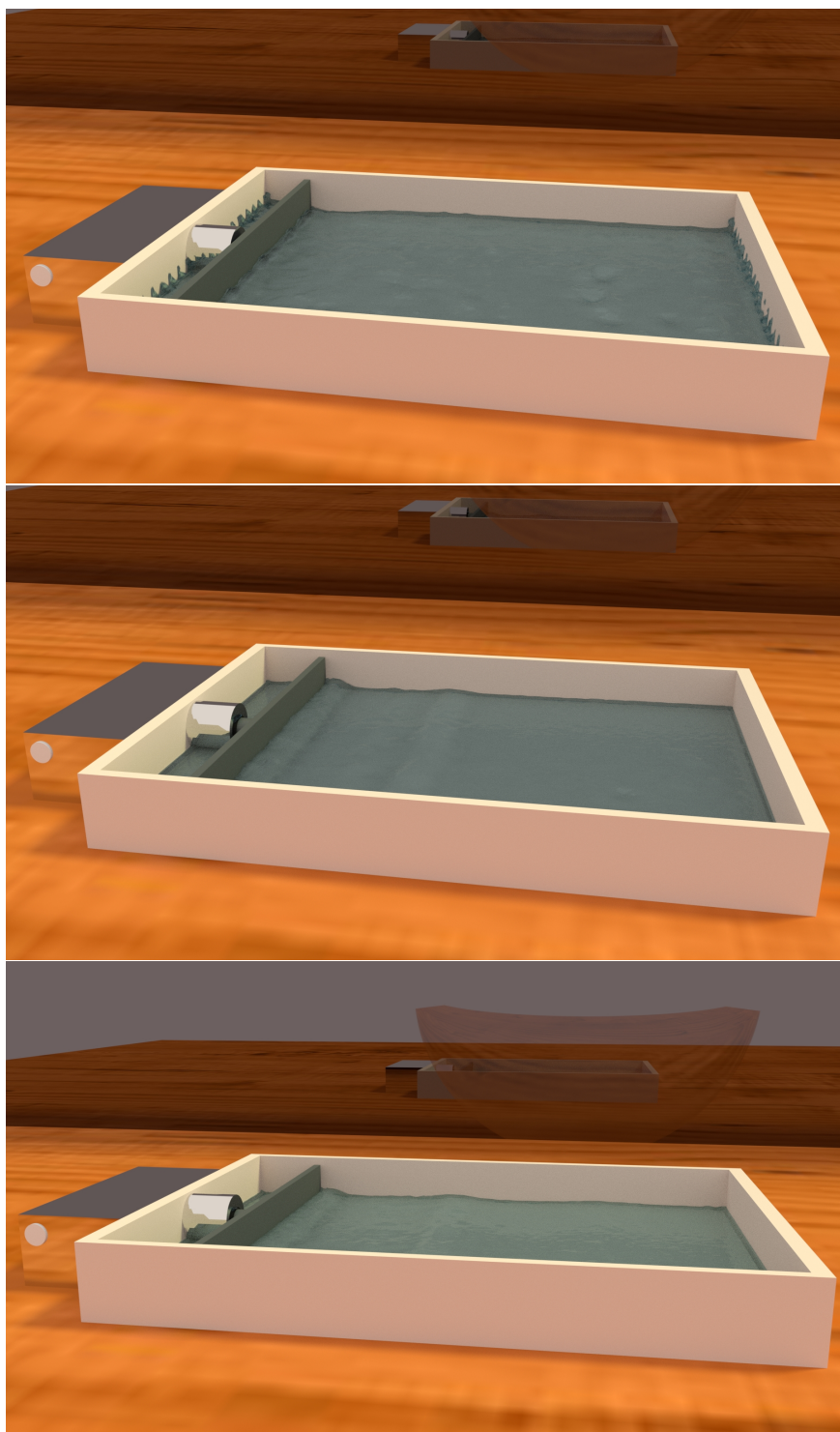
A figura 12 mostra infográficos que apresentam alguns modelos e preceitos utilizados para simulação de fluidos usando Blender. O infográfico à esquerda apresenta as principais etapas na simulação de um fluido usando Blender (ou programa similar). O da direita mostra as principais diferenças entre dois modelos de simulação: fluido contínuo e fluido formado por partículas. O modelo do fluido contínuo é utilizado por padrão. Normalmente se recorre ao modelo de partículas para representação de gases e fenômenos como amortecimento e arrasto, que estão intimamente ligados a interações entre partículas.

## III. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao financiamento oferecido pelo programa A3M junto do centro de educação à distância (CEAD-UNB).

## IV. CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Apresentamos parte dos materiais produzidos no projeto “Simulação de Fluidos com Blender” (CASTRO, 2018). As imagens dos fluidos apresentaram realismo satisfatório para ilustração de textos de Física, mesmo tendo sido geradas em computadores pessoais sem capacidade computacional especial. Foi possível reproduzir fenômenos relacionados ao princípio de Arquimedes, à equação de Bernoulli e à formação de ondas superficiais. Foi possível observar a interação entre jatos de fluidos e de fluido com sólido. Pudemos também



**Figura 9:** Modelo simplificado de um aparato utilizado para estudar as propriedades de ondas nos fluidos.

apreciar aspectos microscópicos do escoamento através da simulação discreta, por meio de partículas. Essas observações sustentam nossa recomendação do Blender para a ilustração científica de fenômenos físicos que envolvam fluidos.

Na segunda metade do projeto, nossa equipe estará concentrada na interação do público, em especial estudantes da Universidade de Brasília, com os produtos do projeto. Com



**Figura 10:** Página da revista de infográficos produzida ao longo do projeto. Um pequeno ensaio sobre os pistões e suas é apresentado.

essa finalidade, esperamos exibir os infográficos como cartazes ou em tótems eletrônicos. Por termos agora acesso a computadores dedicados à *renderização* das imagens, escolheremos algumas imagens para gerarmos versões com maior resolução. Também buscaremos o desenvolvimento de recursos interativos. Resultados parciais serão disponibilizados periodicamente na página <<http://gra.fis.unb.br/>> (GRA.FIS, 2019).

## REFERÊNCIAS

ACHESON, D. J. *Elementary fluid dynamics*. [S.l.]: ASA, 1991. 26, 34, 35



**Figura 11:** Página da revista de infográficos produzida ao longo do projeto. Um pequeno ensaio sobre os pistões e suas é apresentado.

CASTRO, L. L. e. *Simulação de fluidos em programa Blender*. Centro de Educação a Distância - CEAD/UnB, Universidade de Brasília - UnB, 2018. Disponível em: <<http://www.a3m.cead.unb.br>>. Acesso em: 8 out. 2018. 26, 36

DESCONHECIDO. *Testimonials of Animatics for Motion Pictures*. Blender. Disponível em: <<https://web.archive.org/web/20070221025521/https://www.blender.org/features-gallery/testimonials/>>. Acesso em: 9 agosto 2019. 27

GRA.FIS. *Computação Gráfica Aplicada à Física*. Instituto de Física, Universidade de Brasília, 2019. Disponível em: <<http://gra.fis.unb.br/>>. Acesso em: 20 fev. 2019. 27, 38

Figura 12: Infográficos que mostram os passos para simulação de fluidos em Blender e os dois modelos de fluido utilizados.

## PASSOS PARA SIMULAÇÃO DE FLUIDOS EM BLENDER

Guia simplificado

- 

**1 DEFINA SEU SISTEMA**  
Faça o esboço de seu sistema. Este passo é importante no planejamento, pois facilita a organização do projeto.
- 

**2 MODELE OS OBSTÁCULOS FÍSICOS**  
Modele separadamente os objetos que servirão de obstáculo para o fluido.
- 

**3 ADICIONE MESH DE FLUIDO**  
Insira o volume de fluido na simulação. Aplica-se a inflows também.
- 

**4 DEFINA O DOMÍNIO DA SIMULAÇÃO**  
O domínio ("domain") da simulação é a região onde o fluido está contido. É necessário considerar todo o conjunto da modelagem para definir um domínio adequado.
- 

**5 DEFINA OS PARÂMETROS FÍSICOS DO FLUIDO**  
Propriedades como a viscosidade devem ser escolhidos para se adaptarem ao tipo de simulação desejada
- 

**6 SIMULE O PROJETO**  
Completando todos os passos anteriores, resta simular o sistema. Neste passo, define-se a resolução desejada.

## SIMULAÇÃO FÍSICA VERSUS SISTEMA DE PARTÍCULAS

### COMPARANDO OS DOIS MÉTODOS DE SIMULAÇÃO EM BLENDER

 A simulação é contínua	 A simulação é discreta
Possui apenas um algoritmo de integração	Conta com 4 algoritmos distintos
Propriedades: <ul style="list-style-type: none"> <li>Viscosidade</li> <li>Proporção de escala</li> <li>Condição de deslizamento</li> </ul>	Propriedades: <ul style="list-style-type: none"> <li>Viscosidade</li> <li>Movimento Browniano</li> <li>Amortecimento</li> <li>Arrasto</li> </ul>
	

HISTORY america's. *The World's First Hydroelectric Power Plant Began Operation*. National Aeronautics and Space Administration. Disponível em: <[http://www.americaslibrary.gov/jb/gilded/jb\\_gilded\\_hydro\\_1.html](http://www.americaslibrary.gov/jb/gilded/jb_gilded_hydro_1.html)>. Acesso em: 9 agosto 2019. 27

NASA. *Cassini 3d description*. National Aeronautics and Space Administration. Disponível

em: <<https://nasa3d.arc.nasa.gov/detail/jpl-vtad-cassini>>. Acesso em: 9 agosto 2019. 27

NEWTON, I. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. [S.l.]: G. Brookman, 1833. v. 1. 26

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2. 28, 31, 36



# Ligação Diatômica: Uma Abordagem Clássica e Quântica

## Diatomic Bonding: A Classical and Quantum Approaches

PEDRO HENRIQUE PINHEIRO CINTRA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física - Universidade de Brasília.

---

### Resumo

*O presente artigo possui a intenção de mostrar as diferenças entre análises clássicas e quânticas para a molécula diatômica, focando nos aspectos das transições vibracionais, mostrando os resultados e previsões de cada método, descrevendo as soluções e comparando elas com o comportamento real, deixando claro as limitações e validades de cada método.*

**Palavras-chave:** Física. Universidade. Mecânica Quântica. Molécula Diatômica. Espectro Vibracional.

---

### Abstract

*The present article has the intention of showing the difference between classical and quantum analysis for a diatomic molecule, on the aspects of vibrational transitions, showing the results and predictions of each method, describing the solutions and comparing them with the real behavior, making clear the limitations and validities of each method.*

**Keywords:** Physics. University. Quantum Mechanics. Diatomic molecule. Vibrational Spectra.

---

## I. INTRODUCTION

Diatomic molecules represent a huge portion of the molecular components of the atmosphere ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $N_2$ , are all diatomic molecules), although they also appear on other situations as crystalline structures such as HCl. These molecules present a quite interesting behavior and their study is of essential importance to the understanding of molecular dynamics.

The molecular bonding occurs for various reasons, they might be ionic when due to the electrostatic interaction of two ions, for example the case of the HCl which is constructed from the interaction between the cation (positive ion)  $H^+$  and the anion (negative ion)  $Cl^-$ . There can also be the covalent bond, where both atoms share two valence electrons, in this case the electrons orbitals are part of both atoms, this is the case of most organic compounds ( $CH_4$  for example), in this configuration there can be a non-polar bond, where the electro negativity of both atoms is not very different and the molecule has a homogeneous charge distribution, but in the case where one atom is much more susceptible to attract electrons than other, the orbitals become closer to one atom and the molecule has an inhomogeneous charge distribution creating a polar molecule such as the water molecule ( $H_2O$ ). The metallic bond is due to the electrostatic force between conduction electrons in metals and positively charged metal ions, this type of bonding is what creates alloys such as bronze, made from copper and zinc.

There are also intermolecular bonds such as hydrogen bond, but they are not the object of study of this article and will not be discussed. The study of the diatomic molecule will begin by an analysis from the classical mechanics perspective, considering Newton's laws and equations of motion, then we take a quantum approach by the use of the Schrodinger equation and study the results in this field of physics. (PAULING, 1960)

The analysis of the system will use the techniques of already known methods that can be found on the references. Beginning first by building the shape of the potential function, then making the classical approximation and solution. Later the quantum treatment and finally the discussion of the results achieved by each method.

It is important to remember that the molecular dynamics is much more complex than the atomic description. Atomic symmetry leads to the condition that the atomic spectrum is only the result of electronic transitions. In molecules there are electronic transitions, vibrations and rotations which makes the spectrum richer and more complex (EISBERG; RESNICK, 1985). The present article focus on the vibrational modes between the atoms that make up the molecule, the electronic transitions may be described by the Molecular Orbital Theory (ATKINS, 1994).

## II. CLASSICAL APPROACH

From the classical perspective, the atoms in the molecule are confined in some potential function that we use to derive the equations of motion and calculate their energies. In this context we approximate the atoms to a particle of mass  $m$  and their movement as a well defined trajectory with well defined momentum and energy.

The potential that rules a diatomic bonding is built from some ideas

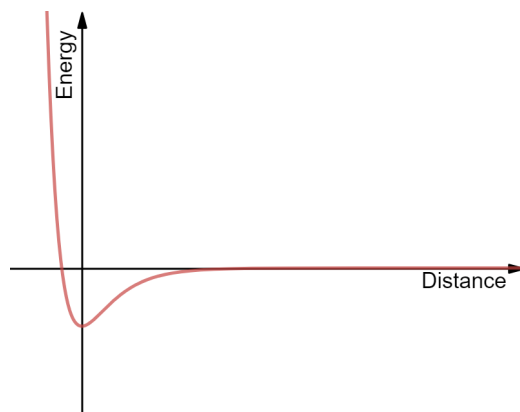
1. There's a dissociation energy in which the molecule breaks its bond and the atoms move freely, so the potential must have an asymptotic behavior for large distances,

$U(r) \rightarrow D_e$  if  $r \rightarrow \infty$ . Where  $D_e$  is the dissociation energy;

2. If the atoms become to close, the nuclear forces will push them away in a way that makes the atoms never being able to touch each other (Except in the case of nuclear fusion, but that is a different case). Therefore the potential must have a vertical asymptotic behavior for small distances,  $U(r) \rightarrow \infty$  if  $r \rightarrow r_{min}$  corresponding to the minimum distance achieved by the atoms due to nuclear forces;
3. There's some equilibrium distance  $r_0$  at lowest possible energy that the atoms try to reach (ROY, 2011).

Given these ideas we can imagine what will be the shape of the potential function that rules the diatomic bond. This shape is represented by Figure 1.

**Figure 1:** The red curve represents the shape of the potential function according to the assumptions above, the depth of the potential, that means, the lowest point of the red curve represents the dissociation energy value  $D_e$  and the  $x = 0$  axis is the equilibrium distance  $r_0$ .



## I. Harmonic oscillator

Since we know there are two forces acting on the atoms, one that attracts them as they become separated, and one that pushes, as they get very close, it is convenient to use as a first approximation the harmonic oscillator model for the vibration of the atom in a molecular diatomic bond.

Considering the potential function of a harmonic oscillator

$$U(r) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 \quad (1)$$

and making the substitution

$$x = r - r_0$$

which means to consider the distance  $x$  as the distance of the atom from the equilibrium point, we end up with

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 \quad (2)$$

where  $k$  is the “spring constant” of the bond. Another consideration to be made is that of the reduced mass, used to simplify the problem from the motion of two atoms to the one of one atom with a mass equivalent to a single atom moving and the second stopped. The reduced mass of the system is simply given by

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

This way we construct the differential equation of motion, according to Newton’s law

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} = -kx \quad (4)$$

making  $\omega^2 = k/\mu$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (5)$$

The equation has a well know solution given by

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \quad (6)$$

Now we assume that at  $t = 0$  the particle is passing through the equilibrium point, so  $r = r_0 \Rightarrow x = 0$ .

$$x(0) = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = 0 \quad (7)$$

$$A = 0$$

Then, the solution is actually

$$x(t) = B \cdot \sin(\omega t)$$

where  $\omega$  represents the oscillation frequency of the atoms in the molecule. Then the atoms have an oscillatory motion with a defined frequency around an equilibrium point. Now, in order to find the energy associated with the movement of the particle, we simply use the well known equation for the total energy of a system.

$$E = T + V \quad (8)$$

$$E = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad (9)$$

We calculate  $v$  simply by

$$v = \frac{dx}{dt} = B\omega \cdot \cos(\omega t)$$

With that expression for  $v$ , the energy becomes

$$E = \frac{\mu}{2} B^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) + \frac{k}{2} B^2 \sin^2(\omega t)$$

$$E = \frac{\mu B^2 \omega^2}{2} \cos^2(\omega t) + \frac{\mu B^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t)$$

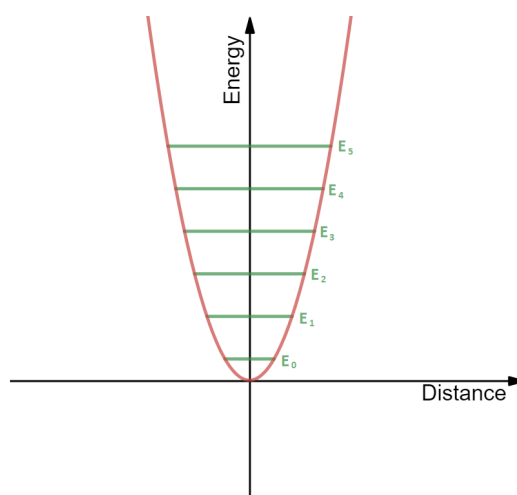
$$E = \frac{\mu B^2 \omega^2}{2} \tag{10}$$

By equation 10, we can isolate  $B$  and get a full equation of motion in terms only of physical quantities.

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega^2}} \cdot \sin(\omega t) \tag{11}$$

According to this model the atoms move in defined trajectories depending on their energy, mass and angular frequency. The higher the energy, the higher the amplitude of the movement, what makes sense if we analyse the graphic of the potential energy  $U$  for some constant values of  $E$  according to figure 2.

**Figure 2:** In red, the potential function for the harmonic oscillator and in green five fixed values for energy  $E$ , one can verify relation between energy and amplitude, higher energies implies in largers oscillatory amplitudes.



## II. Morse oscillator

Unfortunately, the harmonic oscillator does not correspond to a real representation of the potential function for a diatomic bond due to it's asymptotic behavior, which leads to a non-harmonic vibration at higher energies. A better function that describes the potential is given by the Morse potential function. Which is a phenomenological potential suggested in 1929 to describe the attraction and repulsion forces in the atomic structure. Although the rules mentioned in the beginning of the article are very generic to construct the potential of interaction between two atoms in a diatomic bond, the Morse potential fits the needs mentioned in a much better way than the harmonic oscillator (SLATER, 1963).

$$U_m = D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1) \tag{12}$$

Where  $a$  is a coupling factor that dictate the intensity of the curve of the potential felt by the atom. Equation (12) has a more realistic behavior as we can see evaluating the limits at infinity.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1) = \infty \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1) = 0 \quad (14)$$

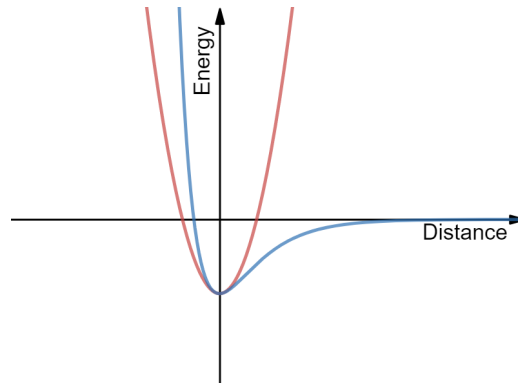
The result from the limits give us the behavior we wanted to construct, as the particles move away from each other, the potential tends to zero (14) and as one of them moves to close to the other, the potential increases indefinitely (13).

Notice that the constant  $D_e$  is exactly the depth of the potential (15). Which physically means the dissociation energy of the molecule

$$U_m(0) = U_m(r = r_0) = -D_e \quad (15)$$

In comparison with the harmonic oscillator, it may be possible to verify that the harmonic potential works as a good approximation for lower energies (Figure 3).

**Figure 3:** The harmonic potential (red) in comparison with the Morse potential (blue).



By series expansion of the Morse potential around  $r_0$ , which corresponds to  $x = 0$ , term of the harmonic oscillator appears as expected.

$$U_m \approx -D_e + U' \cdot x + \frac{1}{2!}U'' \cdot x^2 + \frac{1}{3!}U''' \cdot x^3 \dots \quad (16)$$

The first three terms of the expansion are:

$$U_m \approx 2D_e a^2 \frac{x^2}{2} - D_e \quad (17)$$

which corresponds to the harmonic oscillator with a zero potential energy at  $D_e$  and  $k = 2D_e a^2$ , so

$$a = \sqrt{\frac{k}{2D_e}} \quad (18)$$

The harmonic oscillator is a first approximation to the Morse oscillator, what makes it a nice approximation to the molecular behavior at energies close to the bottom, in other words, when the molecule is close to the lowest possible energy. But now we study a more general case with the Morse oscillator. Again, we want to derive the potential function in order to obtain the differential equation of motion for a particle in this case.

$$F = -\frac{dU_m}{dx} = -\frac{d}{dx}D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1) \quad (19)$$

$$F = -2D_e a(e^{-ax} - e^{-2ax}) \quad (20)$$

The differential equation for the movement in this situation becomes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2D_e a}{\mu}(e^{-ax} - e^{-2ax}) = 0 \quad (21)$$

using  $\alpha = 4D_e a / \mu$ .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{2}(e^{-ax} - e^{-2ax}) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha}{2}(-1)^n \cdot e^{-a(3-n)x} = 0 \quad (23)$$

A quick inspection of the equation 23 leads to the conclusion that we can rewrite it as

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha(-1)^n}{2(3-n)a} e^{-a(3-n)x} \right] = 0 \quad (24)$$

To verify it's validity, it is only needed to apply the time derivative to the terms inside the keys. We can directly integrate the equation with respect to  $t$  to get:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha(-1)^n}{(3-n)a} e^{-a(3-n)x} = \epsilon \quad (25)$$

Where  $\epsilon$  is a integration constant. In order to find the value of  $\epsilon$ , notice that the second term in the equation 25 can be rewritten as

$$\sum_{n=1}^2 \frac{\alpha(-1)^n}{(3-n)a} e^{-a(3-n)x} = -\frac{\alpha}{2a} e^{-2ax} + \frac{\alpha}{a} e^{-ax} \quad (26)$$

Substituting the value of  $\alpha$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha(-1)^n}{(3-n)a} e^{-a(3-n)x} &= -\frac{2D_e}{\mu} e^{-2ax} + \frac{4D_e}{\mu} e^{-ax} = \\ &= \frac{2D_e}{\mu} (2e^{-ax} - e^{-2ax}) = \\ &= -\frac{2}{\mu} U_m \end{aligned} \quad (27)$$

So, if we multiply all the terms by  $\mu/2$  we get exactly the sum of kinetic energy and potential energy, it is possible to find  $\epsilon$ .

$$\epsilon = \frac{2E}{\mu} \quad (28)$$

Therefore, we can rewrite the equation 25 as

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \epsilon - \frac{\alpha}{2a} e^{-2ax} + \frac{\alpha}{a} e^{-ax} \quad (29)$$

Making  $y = e^{ax}$  in a way so  $dy = ae^{ax} dx = -ay dx$ , then separating the  $t$  part from the  $x$  part we rewrite it as

$$\frac{1}{a} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\epsilon y^2 + \frac{\alpha}{a} y - \frac{\alpha}{2a}}} = t - t_0 \quad (30)$$

Where  $t_0$  is the initial time related to the position  $x_0$ , or  $y_0$  as an equivalent, we can set  $x_0 = 0$  so  $t_0 = 0$  and then we get the equation as

$$\frac{1}{a} \int_1^y \frac{dy'}{\sqrt{\epsilon y'^2 + \frac{\alpha}{a} y' - \frac{\alpha}{2a}}} = t \quad (31)$$

The solution for this integral depends on the value of  $\epsilon$ , so it also depends on the value for the energy. Since there will be different integrals for  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon = 0$  and  $\epsilon < 0$ , we calculate each case separately and analyse the results for the equations of motion. In the section of discussion we compare the results obtained from this potential to the ones obtained from the harmonic potential.

For the first situation, let's consider  $E = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$  (the exact value of the dissociation energy for the molecule), the  $y^2$  term vanishes and we can make the substitution  $u = \frac{\alpha}{a} y' - \frac{\alpha}{2a}$  and so  $du = (\alpha/a) \cdot dy'$ . The integral becomes

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^y \frac{dy'}{\sqrt{u}} = t \quad (32)$$

With solution

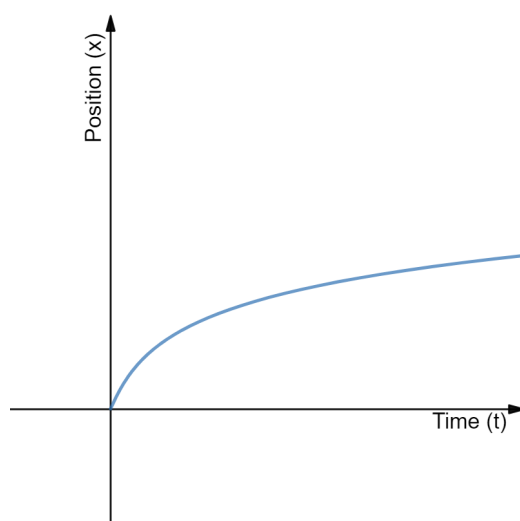
$$x(t) = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{D_e a^2}{\mu} \left( t + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{2a}} \right)^2 \right) \quad (33)$$

Which can be simplified to

$$x(t) = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{D_e a^2}{\mu} \left( t + \sqrt{\frac{2}{\alpha a}} \right)^2 \right) \quad (34)$$

The solution shows that the particle starts the oscillatory motion but then escapes it, since it has exactly the energy necessary to dissociate from the potential, the trajectory as a function of time is show bellow by figure 4.

**Figure 4:** Position of a particle in the Morse potential with energy  $E = 0$  as a function of time.



Now we look at the case where  $E > 0 \Rightarrow \epsilon > 0$ . In order to solve the integral in this situation we need to substitute the values for  $\alpha$ ,  $\epsilon$  and factor the resulting polynomial equation, after that we apply integration by parts and make some substitution of variables to get the result, the step-by-step process is shown in (BARBOZA et al., 2007). The result gives the equation as

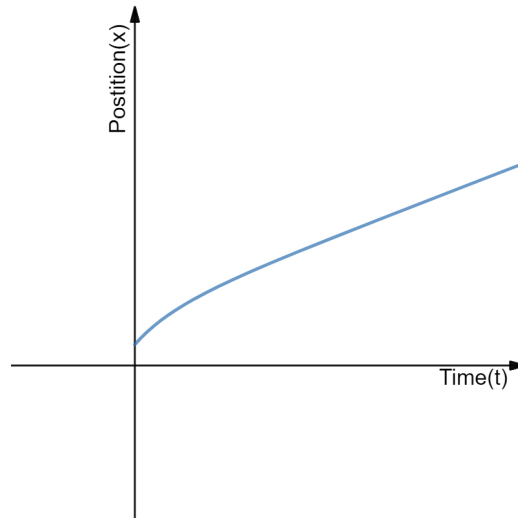
$$x(t) = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{D_e}{E} \left( \sqrt{\frac{E + D_e}{D_e}} \cosh \left( \sqrt{\frac{2E}{\mu}} a(t + \beta) \right) - 1 \right) \right] \quad (35)$$

where

$$\beta = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{2a}} = \sqrt{\frac{2}{\alpha a}}$$

In this situation the particle almost doesn't feel attraction to the potential and it's motion is very close to a straight line, as shown in Figure 5

**Figure 5:** Position of a particle in the Morse potential with energy  $E > 0$  as a function of time.

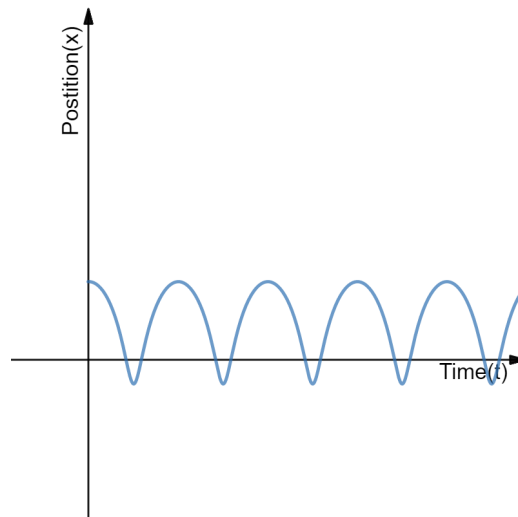


Finally we take a look at the case where  $E < 0 \Rightarrow \epsilon < 0$ , again we won't solve the integral step by step, instead we look only at the result.

$$x(t) = \frac{1}{a} \ln \left[ -\frac{D_e}{E} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E + D_e}{D_e}} \cos \left( \sqrt{\frac{-2}{E\mu}} D_e a (t + \beta) \right) \right] \right] \quad (36)$$

In this final case, the particle has a confined movement, oscillatory but not harmonic as we see in Figure 6.

**Figure 6:** Position of a particle in the Morse potential with energy  $E < 0$  as a function of time.



Finally we conclude that in the case of a particle (atom) in the Morse potential, the equation of motion will depend on the energy and the trajectory may or may not be a oscillatory motion. We finish the study of the diatomic molecule in the classical mechanical perspective and now we pass to the quantum treatment where we will consider the quantization effects.

### III. QUANTUM APPROACH

Now the quantum treatment for the problem will be studied, starting again by the same approximation of the harmonic oscillator, but this time considering the quantum effects, then we pass to the Morse oscillator. In a quantum view, the atoms don't have a defined trajectory, hence, there will be no equation of motion such as in the classical consideration, instead there is going to be a wave function that represents the amplitude of probability density wave inside the potential, also the quantum states of the atoms and their respective energies. We will derive our results from the Schrodinger equation, just like we used Newton's equations for the classical approach.

Fortunately, the shape of the potential functions will not change from the classical to the quantum approach, only the behavior of the particles inside them.

#### I. Quantum harmonic oscillator

For our first approximation, we will consider again the harmonic oscillator, but this time in a quantum treatment. We are also interested in solving the Schrodinger equation for the nucleus, which can be separated from the equation for the electrons by the Born-Oppenheimer approximation (WOOLLEY; SUTCLIFFE, 1977), resulting in a single Schrodinger equation describing the nuclear movement of the molecule. As we have discussed above, the potential energy will be the same and so the Schrodinger equation for this problem is

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{k}{2} x^2 \psi = E\psi \quad (37)$$

We write  $k = \mu\omega^2$  and multiply everything by  $2\mu/\hbar^2$  to get a simplified form of equation 37.

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi = \frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi \quad (38)$$

For simplicity we put

$$\alpha = \frac{\mu\omega}{\hbar}$$
$$\epsilon = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

Leaving the equation in the form

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - \alpha^2 x^2) \psi = 0 \quad (39)$$

Introducing now the new variable  $u = \sqrt{\alpha}x$  and applying the derivatives to it, we are

left with a non-dimensional form of the differential equation 39.

$$\alpha \frac{d^2\psi}{du^2} + (\epsilon - \alpha u^2)\psi = 0 \quad (40)$$

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + \left(\frac{\epsilon}{\alpha} - u^2\right)\psi = 0 \quad (41)$$

To continue the solution it is useful to make use of the asymptotic analysis, in which we examine the behavior of the equation for an extreme, in this case we want to look at  $u \rightarrow \infty$ . In this situation, the  $\epsilon/\alpha$  term becomes really small compared to the others and can be neglected, giving us

$$\frac{d^2\psi}{du^2} = u^2\psi \quad (42)$$

$$\psi(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (43)$$

With this we know that the complete solution cannot be larger than  $e^{-\frac{u^2}{2}}$ , otherwise the asymptotic behavior won't be obeyed. We have the complete solution given as

$$\psi(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot H(u) \quad (44)$$

Getting this value for  $\psi$  and making the derivatives, we get the equation written as

$$A \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \left( -H + u^2H - 2u \frac{dH}{du} + \frac{d^2H}{du^2} + \frac{\epsilon}{\alpha}H - u^2H \right) = 0 \quad (45)$$

$$\frac{d^2H}{du^2} - 2u \frac{dH}{du} + \left(\frac{\epsilon}{\alpha} - 1\right)H = 0 \quad (46)$$

To solve the equation 46, we use the method of power series

$$H(u) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \cdot u^l$$

If we derivate this assumption and place it back into 46, we end up with a equation involving sums and equal to 0, for that the terms inside the sum must be zero. And we are left with the recurrence relation

$$C_{l+2} = -\frac{\frac{\epsilon}{\alpha} - 1 - 2l}{(l+1)(l+2)} C_l \quad (47)$$

Calculating some values for C it becomes clear that they are all written in terms of  $C_0$  and  $C_1$  in the relation

$$H(u) = C_0 \left( 1 + \frac{C_2}{C_0}u^2 + \frac{C_4}{C_2} \frac{C_2}{C_0}u^4 + \dots \right) + C_1 \left( u + \frac{C_3}{C_1}u^3 + \dots \right) \quad (48)$$

The solution may be enhanced by making the calculation

$$\frac{C_{l+2}}{C_l} \approx \frac{2l}{l^2} = \frac{2}{l}$$

and comparing this expression with the expression for series expansion of  $e^{u^2}$

$$e^{u^2} \approx 1 + u^2 + \frac{u^4}{2!} + \frac{u^6}{3!} + \dots + \frac{u^l}{(l/2)!}$$

For a big  $l$  the expression for  $H(u)$  becomes

$$H(u) = C_0 \cdot K e^{u^2} + C_1 \cdot K' u e^{u^2} \quad (49)$$

But this goes to infinity when  $u \rightarrow \infty$  and as we have seen, the solution cannot do that, so the series must stop at a certain point. Stating that the top term of the recurrence relation goes to 0, so

$$\frac{\epsilon}{\alpha} = 2n + 1 \quad (50)$$

And then, when  $l = n$ ,  $C_{n+2} = 0$ , and the series stops at the  $n^{th}$  term, becoming a polynomial equation called Hermite polynomials. The complete solution for the quantum harmonic oscillator is given in terms of these polynomials.

$$\psi_n(u) = A_n \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \quad (51)$$

To find the value of the constant  $A_n$  we use the normalization condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot \psi^*(x) dx = 1 \quad (52)$$

Resulting in

$$A_n = \left( \frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (53)$$

The complete solution is then

$$\psi_n(x) = \left( \frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{\mu\omega x^2}{\hbar^2}} \cdot H_n \left( \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} x \right) \quad (54)$$

The energies allowed in the oscillator can be found by the relation 50, which is rewritten as

$$\frac{2\mu E}{\hbar^2} \frac{\hbar}{\mu\omega} = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1 \quad (55)$$

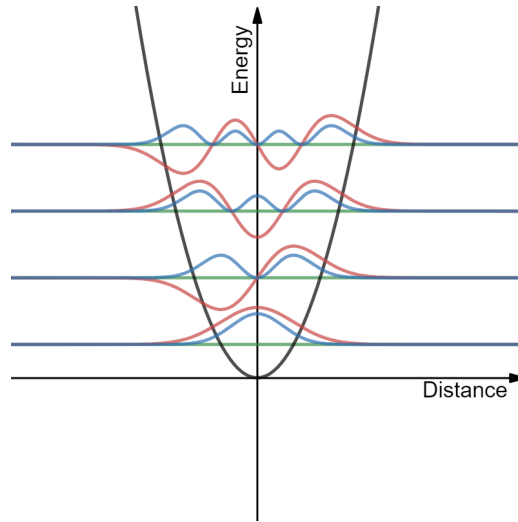
$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (56)$$

The quantum harmonic oscillator has discrete values of energy and it is not defined by a trajectory but instead by a probability of finding the atoms at some point given by

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

The next figure (7) shows the wave functions  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  and the corresponding probabilities on top of the energy level for each state.

**Figure 7:** Green lines represent the energy levels for the oscillator, the red curves represent the wave functions and the blue curves the corresponding probabilities of finding the atom.



With this result we can calculate the difference of energy between two states inside the oscillator

$$E_m - E_n = \hbar\omega \left( m + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (57)$$

$$E_m - E_n = \hbar\omega(m - n) \quad (58)$$

If  $m = n + 1$

$$\Delta E = \hbar\omega \quad (59)$$

## II. Quantum Morse Oscillator

At this point we start to make a better assumption of the behavior of an atom in a diatomic bond by using the Morse oscillator in its quantum mechanical formulation. Again, the potential energy is the same as the classical one, but the phenomena are different as we shall see.

$$U_m(x) = D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1) \quad (60)$$

The Schrodinger equation takes the form

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + D_e((1 - e^{-ax})^2 - 1)\psi = E\psi \quad (61)$$

we can also rewrite the potential and leave the equation as

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2\mu D_e}{\hbar^2} e^{-2ax} \psi + \frac{4\mu D_e}{\hbar^2} e^{-ax} \psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (62)$$

Where now we introduce the new variable to leave the equation non dimensional (CHEN, 2004)

$$y = k \cdot e^{-ax}$$

where

$$k = \frac{2\sqrt{2\mu D_e}}{\hbar a}$$

Also calling

$$\beta^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

Making the derivatives  $d^2/dx^2$  in terms of  $d/dy$  and  $d^2/dy^2$  using the chain rule we get the equation rewritten as

$$a^2 y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + a^2 y \frac{d\psi}{dy} - \frac{2\mu D_e}{\hbar^2 k^2} y^2 \psi + \frac{4\mu D_e}{\hbar^2 k} y \psi - \beta^2 \psi = 0 \quad (63)$$

Dividing everything by  $a^2$  and remembering the value of  $k$ , we simplify the equation to

$$y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} + y \frac{d\psi}{dy} - \frac{y^2}{4} \psi + \frac{k}{2} y \psi - \frac{\beta^2}{a^2} \psi = 0 \quad (64)$$

And making an asymptotic analysis for  $y \rightarrow 0$  we get a solution in the form  $\psi(y) = y^\beta / a$  and for  $y \rightarrow \infty$ ,  $\psi(y) = e^{-y/2}$ . So the complete solution must be a multiplication of these two functions times a third function that adjusts the "middle part" of the function, something that goes to 1 in both extremes.

$$\psi(y) = y^{\frac{\beta}{a}} e^{-\frac{y}{2}} F(y) \quad (65)$$

Again, making the derivatives of  $\psi$  with respect to  $y$ , and placing the results of these derivatives in the differential equation we get an equation for  $F(y)$ .

$$\frac{d\psi}{dy} = \left( \beta y^{\frac{\beta}{a}-1} e^{-\frac{y}{2}} - \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2} y^\beta \right) F(y) + y^\beta e^{-\frac{y}{2}} \frac{dF}{dy} \quad (66)$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left( \frac{d\psi}{dy} \right)$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left[ \left( \beta y^{\frac{\beta}{a}-1} e^{-\frac{y}{2}} - \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2} y^\beta \right) F(y) + y^\beta e^{-\frac{y}{2}} \frac{dF}{dy} \right] \quad (67)$$

The differential equation for  $F$  becomes, after all the manipulations,

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (2\beta + 1 - y) \frac{dF}{dy} + \left( \frac{k}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{a} \right) F(y) = 0 \quad (68)$$

Which we can apply the some method of power series solution as used in the harmonic oscillator and find that the solution for this differential equation is the generalized Laguerre function. Defined by

$$y \cdot F'' + (\alpha + 1 - y)F' + nF = 0 \quad (69)$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \quad (70)$$

In this situation  $\alpha = 2\beta$  and  $n = k/4 - 1/2 - \beta/a$ . So, the complete wave function for the Morse oscillator is

$$\psi(y) = N_n \cdot y^{\frac{k}{2} - n - \frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} L_n^{k-2n-1}(y) \quad (71)$$

Where  $N_n$  is a normalization constant found by the normalization condition.

$$N_n = \left( \frac{an!(k-2n-1)}{\Gamma(k-n)} \right)^{1/2} \quad (72)$$

Another result we can take out of the derivations for the Morse potential is the possible energies for this case which are found to be

$$E_n = -D_e \left[ 1 - \frac{a\hbar}{\sqrt{2\mu D_e}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \quad (73)$$

The first interesting thing we can notice at this allowed energy equation is that the spacing between two levels of energy is not constant as in the harmonic oscillator case, the spacing becomes smaller as the level increases, we can find the amount of energy to go from a initial state  $n$  to a final state  $m$  simply by making the difference of the two

$$\Delta E_{mn} = E_m - E_n = (n^2 - m^2) \frac{a^2 \hbar^2}{2\mu} + (n - m) \left( \frac{a^2 \hbar^2}{4\mu} - a\hbar \sqrt{\frac{2D_e}{\mu}} \right) \quad (74)$$

Notice that this quantity decreases with the increase of  $m$ , in order to find the energy necessary to go from one state to the next we simply put  $m = n + 1$  and get

$$\Delta E = a\hbar \sqrt{\frac{2D_e}{\mu}} - (n + 1) \frac{a^2 \hbar^2}{\mu} \quad (75)$$

The other interesting result is that it has a limited quantity of allowed energies. It has some maximum  $n$ , that if we try to put a larger  $n$ , we get a negative or zero energy. This would correspond to the dissociation energy of the molecule, physically speaking, if the energy exceeds the maximum  $n$ , the molecule dissociates, what means that the particles

escape the potential well.

In other words  $\Delta E = 0$

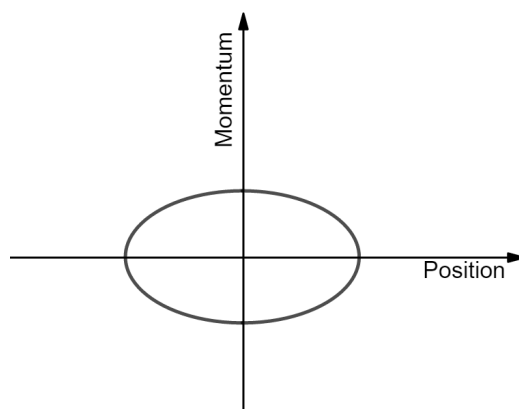
$$n < \frac{\sqrt{2\mu D_e}}{a\hbar} - 1$$

There is also the possibility of constructing the solution for the Quantum Morse Potential by an algebraic method using the so called ladder operators(DONG; LEMUS; FRANK, 2002).

#### IV. DISCUSSION

We begin the discussion of the results by looking carefully at the harmonic oscillator from the classical perspective. The first thing we notice is that the particle follows a trajectory well defined and has a well defined momentum too. This can be seen by looking at the diagram on the phase space (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002) for the harmonic oscillator (Figure 8)

**Figure 8:** *The trajectory of a classical harmonic oscillator in a phase space diagram, the equation is represented by an ellipse of the type  $\frac{p^2}{2\mu E} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$ . The maximum value for  $p$  is when  $x$  is zero and it corresponds to  $\sqrt{2\mu E}$  while the maximum  $x$  is found when  $p$  is zero and it's exactly  $\sqrt{2E/k}$  just as we expect it to be.*

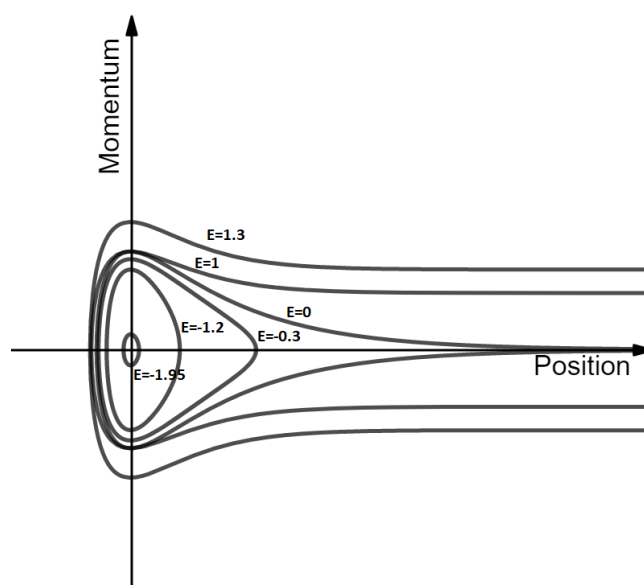


The other observable result is that the energy assumes continuous values for the particle, so there is a continuous number of trajectories that a particle can take when put inside this potential function. This result is a rough approximation, since we know that there are not an infinite number of energies for the particle because at a certain energy level, the molecule dissociates and the atoms get in a free motion. The other correction is that the amplitude of oscillation is equal to both sides, while in reality the nuclear force (repulsion) and the electromagnetic force (attraction) are not in the same magnitude with the distance, so the oscillations are not balanced.

We drive our attention now to the results from the classical Morse potential, first we see that the trajectories are not the same for the energies, there's a limitation between bounded

trajectories and free ones, although the energy assumes continuous values again, the main difference from the harmonic oscillator is exactly the asymmetry in the oscillations and the energy limit for closed trajectories. Again, we look at the phase space diagram for different values of  $E$  and look at the behavior of the particles (Figure 9)

**Figure 9:** *The trajectory of a classical Morse oscillator in a phase space diagram. The equation is written in the form of a parametric equation of position and momentum, the diagram shows that for  $E > 0$  the trajectory is open and the position goes to infinite, the molecules doesn't even make one oscillation and go further apart to infinite. For  $E = 0$  the particles's momentum tends to zero as the position goes to infinite, so this case is exactly the limit between open and closed orbits. And for  $E < 0$  the particle has a closed trajectory, anti-symmetric as we can see that the shape of the figure is not an ellipse. Finally it is possible to see that for a really small energy, close to the minimum, the shape of the figure becomes the ellipse on the harmonic oscillator case. In this graphic,  $D_e = 2$ ,  $\mu = a = 1$ .*



The physical analysis of this situation is that if the atoms are in a bounded state, the oscillations are not symmetric, showing the non-equal value for the nuclear repulsion force and the electromagnetic attraction force. When the energy is exactly the dissociation value, the amplitude of the oscillation is infinite, since the maximum distance on the movement is acquired when the velocity is zero, so the molecule breaks apart and the atoms keep slowing down reaching velocity zero on infinite. For large values of energy, the atoms come close with some specified momentum, then they are strongly repulsed by the nuclear force and leave with almost the same momentum, losing some part of it when they are still close to each other because of the breaking due to the electromagnetic force, but also gaining some more momentum when are really close to each other, before the nuclear force acts. The problem can then be imagined to be a collision of the atoms, in other words, when the energy is very big, the atoms experience a collision but do not keep on a closed trajectory.

This is a much more appropriate method, the problem now is that atoms are tiny particles described by quantum mechanics, and so we have the need for the quantum description of the system. By looking at the phase space diagram again, we notice that for low energies,

the trajectory becomes, in quite good approximation, an ellipse described by the harmonic oscillators, what means that when the energy of the molecule is very low (close to its minimum), the harmonic oscillator becomes a better description since it delivers a excellent result and becomes much more simple. Even though the quantum treatment is better, when the mass of the atoms are too big and the quantum effects become smaller and smaller, and then the classical treatment becomes more precise.

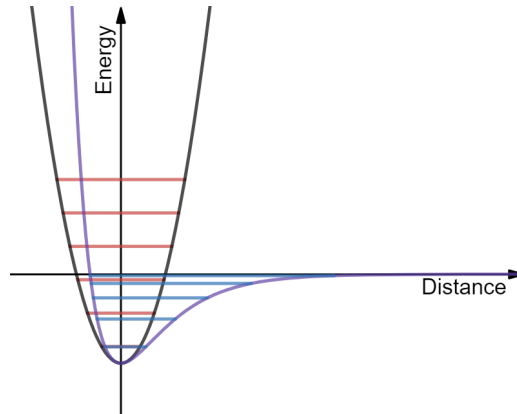
On the quantum case, as we have seen, the harmonic oscillator is the first approximation. There are many divergences between the classical and quantum results, first for the classical result we have seen that we get a well defined orbit, while for the quantum treatment we ended up with a wave function, that described the state of the particle inside the potential, by that we get the probability of finding the particle somewhere inside the system, the average values for the position and momentum along the movement. The consideration becomes quite different since now we don't have trajectories, but probabilities. We cannot know where the atoms are, but we have a higher probability of finding them somewhere. The second result is the energy, which is not continuous anymore, is discrete (quantized). The molecule can only have specified values of energy, changing from one level to another by the emission or absorption of some specified value of energy, found to be  $\Delta E = \hbar\omega$ , that result opens the space for spectroscopy, looking at the frequency of emitted or absorbed photons on a state transition, an experimental tool to look at the energies for diatomic molecules, a result that it is not possible on the classical result, since the change from one specific state to another is continuous, for example, decreasing the energy of the system would correspond to a continuous emission of radiation. While, in the quantum treatment, this quantity is discrete.

At last, we bring the discussion to the Quantum Morse Oscillator, which gives the best result between all of them. At this point it is important to state that the the Morse Potential (12) is not the only analytical curve that describes the potential energy in the vibrational aspect of molecules. First, just as the harmonic oscillator, the atoms have specified energy levels allowed inside the potential well, but the big difference now is in the spacing between the energy levels (TASELI, 1998), what changes them and their limit value. To begin with, as we have seen in the development of the solution that the space between energy levels decreases with the increase of the level, meaning that close to the dissociation point the energies are more close together, there are more states allowed when close to the dissociation point than close to the bottom of the well. The other important thing about the energy spacing is that it depends on many more factors, the size of the well, a larger well gives a larger spacing, and also the reduced mass of the system, a larger mass reduces the space between the energies, in other words, when the mass becomes larger, the system approach a continuous distribution of energy,  $\Delta E \rightarrow 0$  as  $\mu \rightarrow \infty$ , making the classical treatment where the energy is continuous more valid. Another important difference is the limit on energies, or, the presence of the breaking stage (dissociation point) of the molecule, the atoms now cannot increase their energy indefinitely, so for example, if we heat the molecule enough, it won't become more agitated for ever, it will break at some point, again, this value is changed by the increase of mass, a larger mass allows more states of energies, also a deeper potential

allows more states of energy too, as we expect in a real case.

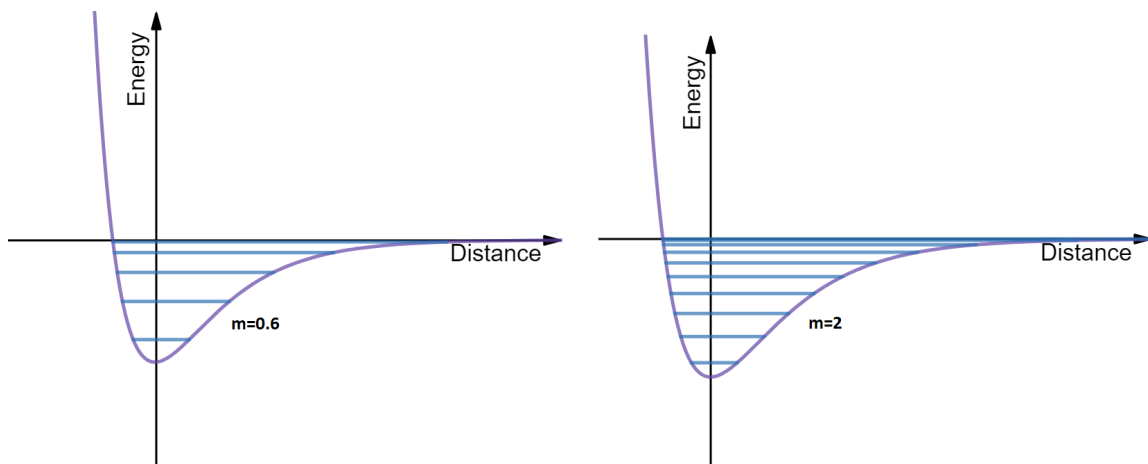
The next figure shows a comparison of the energies in the QHO(Quantum harmonic oscillator) and the QMO(Quantum Morse oscillator)

**Figure 10:** In black, the harmonic potential and in purple the Morse potential. It's possible to see that for the ground state the energy described by the QHO and the QMO is pretty much equal, the next level has a tiny difference, the next levels become quite different and the QMO respects the limit of dissociation energy while the QHO does not.



To evaluate also the effect of the mass in the behavior of the molecule, it's shown a comparison between two different values of mass in the next figure

**Figure 11:** The left graph shows the energy levels for  $\mu = 0,6$  while the right one shows for  $\mu = 2$ , showing that there are more levels allowed and with a smaller spacing between them, both graphs used the same value for the all the others parameters.



## V. CONCLUSION

The results taken from both approaches show a description inside its limitation to the behavior of a diatomic bonding. The classical approach may seem to be possible, although, one should not think that such a description is valid. The molecular behavior is only fully

described by the quantum theory and the assumptions done here are just a means for comparison between results more accurate taken from quantum theory and the ones that classical mechanics predict, which are not in accordance with reality. The development of the methods, used all the possible tools inside their limitations to achieve the most complete description as possible, from the mathematical results to their physical meaning by manners of graphs and discussion.

## VI. ACKNOWLEDGMENT

I thank my teachers and friends for inspiring me to not only begin but to continue the development of this article until the end, especially my teachers Júnio Cruz, Marco César, Clóvis Maia, Olavo Leopoldino and Sérgio Ulhoa also my friends Raíssa Benvindo, João Valeriano, Mariana Casement and João Augusto Sobral.

## REFERENCES

- ATKINS, P. *Physical Chemistry*, 1031p. [S.l.]: WH Freeman and Co., New York, 1994. 43
- BARBOZA, F. et al. Analytical solution of the morse potential in classical mechanics. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 29, n. 4, p. 543–547, 2007. 50
- CHEN, G. The exact solutions of the schrödinger equation with the morse potential via laplace transforms. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 326, n. 1, p. 55–57, 2004. 56
- DONG, S.-H.; LEMUS, R.; FRANK, A. Ladder operators for the morse potential. *International journal of quantum chemistry*, Wiley Online Library, v. 86, n. 5, p. 433–439, 2002. 58
- EISBERG, R.; RESNICK, R. Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles, 2nd Edition*, by Robert Eisberg, Robert Resnick, pp. 864. ISBN 0-471-87373-X. Wiley-VCH, January 1985., p. 864, 1985. 43
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: AAPT, 2002. 58
- PAULING, L. *The nature of the chemical bond and the structure of molecules and crystals: an introduction to modern structural chemistry*. [S.l.]: Cornell university press, 1960. v. 18. 43
- ROY, R. J. L. *Determining equilibrium structures and potential energy functions for diatomic molecules*. [S.l.]: Taylor & Francis: London, 2011. 159–203 p. 44
- SLATER, J. C. *Quantum theory of molecules and solids*. McGraw-Hill, 1963. 46
- TASELI, H. Exact solutions for vibrational levels of the morse potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 31, n. 2, p. 779, 1998. 60
- WOOLLEY, R.; SUTCLIFFE, B. Molecular structure and the born—oppenheimer approximation. *Chemical Physics Letters*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 393–398, 1977. 52



# Teoria econômica neo-clássica e o princípio variacional na dinâmica de mercados

Neo-Classical economic theory and the variational principle in the dynamics of markets

HENRIQUE ALVES DE LIMA\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física-UnB

---

## Resumo

*Resolver problemas da dinâmica de sistemas é uma função fundamental na física. Buscaremos apresentar métodos matemáticos, conhecidos nas soluções de problemas diversos em física, como resposta para questões da dinâmica de mercados presentes na teoria econômica neo-clássica.*

***Palavras-chave:** Princípio Variacional. Dinâmica de Mercados. Teoria Neo-clássica.*

---

## Abstract

*A fundamental purpose of Physics is to solve problems related to the dynamics of systems. We present mathematical methods, used to solve physical problems, as an answer to questions regarding market dynamics present in the neo-classical economic theory*

***Keywords:** Variational Principle. Market dynamics. Neo-classical theory.*

---

## I. INTRODUÇÃO

Resolver problemas, solucionar as demandas da sociedade e apresentar equações em que seja possível fazer previsões é parte fundamental do trabalho dos físicos em todo o mundo. Ao longo dos anos, com o surgimento de diversas novas tecnologias e influenciadores de comportamento, os problemas se tornaram cada vez mais amplos e as demandas mais difíceis de serem supridas. Entender conceitos fundamentais da teoria econômica, juntamente com o arcabouço matemático necessário, pode ser a chave para desenvolver qualidades técnicas importantes para o entendimento do comportamento de diversos sistemas econômicos. O intuito desse texto é apresentar bases da teoria econômica e suas possíveis ligações com conceitos conhecidos por físicos, em destaque, o princípio variacional, usado na mecânica clássica como uma ferramenta útil para maximizar ou minimizar uma ação.

---

\*henrique\_adl@hotmail.com

## II. ALGUNS FUNDAMENTOS DA TEORIA MICROECONÔMICA NEO-CLÁSSICA

É comum ao estudante de física estar de frente para diversos problemas e buscar suas soluções. Os problemas apresentados, em geral, possuem elementos, objetos, grandezas e fenômenos que apresentam suas características e comportamentos próprios, como por exemplo, partículas que possuem massa e carga. Em economia, dizemos que os responsáveis pela dinâmica do sistema são *agentes econômicos*, que possuem características próprias fundamentais para a descrição dos sistemas. Em um mercado aberto, os agentes econômicos são basicamente produtores e consumidores.

Seja  $x = x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , onde  $x_k$  representa a quantidade demandada por um consumidor do bem "k", por exemplo,  $x_1, x_2$  e  $x_3$  podem representar respectivamente a quantidade demandada de TV's, Sorvetes e Litros de Gasolina. Esses bens ou serviços são demandados pelos consumidores a preços dados por  $p = p(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ , onde  $p_k$  é o preço que o consumidor estaria disposto a pagar pela unidade de cada bem "k".

A teoria econômica neo-clássica descreve o comportamento do que é chamado "agente racional". O "agente racional" faz seus cálculos mentais implícitos de forma a buscar o máximo de satisfação em suas escolhas, matematicamente falando, se pudéssemos escolher uma função que descrevesse a satisfação do consumidor em suas escolhas, estaríamos buscando pontos de máximo em uma curva.

As escolhas do consumidor podem se encaixar no que chamamos de "cesta" de consumo. Essas cestas expressam as possíveis combinações de produtos que o consumidor estaria disposto a adquirir. Por exemplo, num cenário em que uma pessoa estaria disposta a comprar roupas e alimentos, montando as seguintes cestas:

Cestas	Alimentos	Roupas
A	8	2
B	6	5
C	10	3
D	2	8
E	5	5

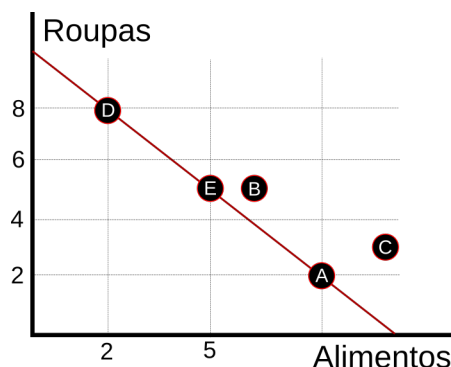
Tabela 1: Cestas de consumo.

Podemos analisar esses pontos em um gráfico:

Vamos considerar que exista uma função  $U(x)$  onde  $x = x(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , iremos chamá-la de **função de utilidade**. Essa função de utilidade atribui um valor para cada cesta, valor este que representa a satisfação do consumidor. Vamos supor que inicialmente a função de utilidade seja dependente das quantidades de roupas e alimentos previamente citadas, ou seja:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad (1)$$

onde  $x_1$  representa a quantidade demandada de roupas e  $x_2$  a quantidade demandada de alimentos. Se voltamos na tabela I, vemos que as cestas "A", "E" e "D" retornam o mesmo valor para a função utilidade. A curva que é composta por todos esses pontos de mesma satisfação é chamada curva de indiferença ou isoutilidade. Ao longo dessa curva, qualquer cesta escolhida pelo consumidor vai gerar o mesmo nível de satisfação.



**Figura 1:** Cestas possíveis com as combinações de alimentos e roupas.

Há porém um limitador do dispêndio de um consumidor e conseqüentemente, um limitador para a escolha das cestas, o seu capital. O consumidor pode montar diversas cestas para o seu consumo, porém, o valor total da cesta está limitado pelo total que o agente está disposto a gastar. Teríamos uma condição da forma:

$$M = \sum_{k=1}^n p_k x_k = \bar{p}x \quad (2)$$

onde  $\bar{p}$  é o preço médio.

Essa condição nos diz que nem todas as cestas podem ser obtidas, mas há uma condição importante a ser levada em conta, o consumidor tende a sempre escolher a cesta que lhe gera o *maior* nível de satisfação. Entender como essas combinações de compra ou venda afetam a satisfação dos agentes econômicos requer diversas informações e interpretações que podem não ser possíveis de sistematizar. Porém, podemos usar métodos matemáticos que nos retornem resultados significativos sobre esses comportamentos, buscaremos aqui achar um ponto em que a função utilidade tenha o seu maior valor possível, ou seja, a cesta em que a satisfação do agente econômico seja máxima. Considerando a restrição presente na equação (2), usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontramos pontos de máximo.

Vamos considerar o vínculo:

$$M - \sum_{k=1}^n p_k x_k = 0. \quad (3)$$

Teremos então uma equação da forma:

$$U(x) - \lambda(x\bar{p} - M) = F(x, \bar{p}), \quad (4)$$

sujeita a condição:

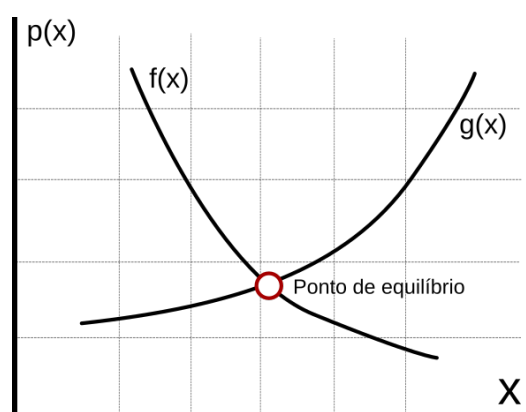
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Podemos fazer  $\lambda\bar{p} = p$ , considerando que  $\lambda$  muda apenas as escalas; Temos um resultado da forma:

$$dU(x) - p dx = 0 \Rightarrow p(x) = \nabla U(x) \quad (6)$$

O comportamento esperado para a curva de  $f(x)$ , que representa o preço que o consumidor estaria disposto a pagar por uma quantidade  $x$  de commodities, é descrito pela lei da demanda, ou seja, o preço que um comprador está disposto a pagar tende a diminuir com o aumento da quantidade demandada. Para o produtor, temos uma curva de preço  $g(x)$ , descrita pela lei da oferta, ou seja, o preço da oferta tende a aumentar com a quantidade ofertada.

Esperamos então que a curva  $f(x)$  seja decrescente, levando a entender que o consumidor estaria disposto a pagar menos por uma quantidade  $n$  do que por  $n - 1$ . Para a oferta, o produtor tende a cobrar mais por  $n$  do que por  $n - 1$ .



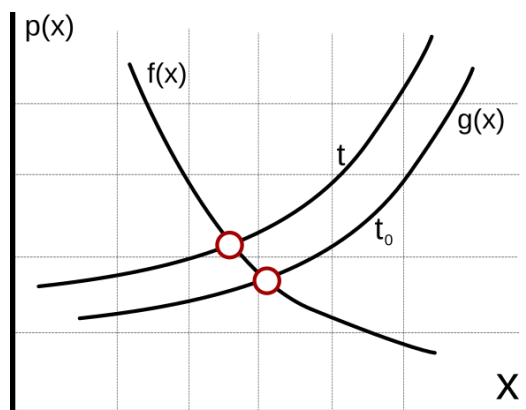
**Figura 2:** Comportamentos previstos para as curvas de oferta  $g(x)$  e demanda  $f(x)$ . O ponto de interseção das curvas é chamado ponto de equilíbrio.

O ponto de equilíbrio representa a situação em que demanda e oferta se encontram, o que gera um cenário de equilíbrio econômico. A ideia de um mercado no equilíbrio torna-se frágil até mesmo para sistemas idealizados, quando consideramos o fato que os produtores e consumidores não conhecem inicialmente os desejos uns dos outros. Queremos então desenvolver métodos que possam nos levar de um mercado fora do equilíbrio para um mercado no equilíbrio. Um problema sério existente nessa concepção é o de que as demandas e ofertas propostas podem variar com o tempo, levando o sistema a fugir do ponto de equilíbrio inicial e apresentar outro ponto de equilíbrio estável em um tempo posterior.

Se consideramos a quantidade demandada como uma função  $D(p)$  e a oferta como uma função  $S(p)$ , podemos definir a diferença dessas duas funções como o excesso na demanda, atribuindo a isto uma função  $\epsilon(p)$

$$D(p) - S(p) = \epsilon(p). \quad (7)$$

Queremos encontrar condições que levem a função  $\epsilon(p)$  a se anular, excluindo os excessos na demanda e oferta, maximizando a eficiência desse mercado. O conceito da "mão invisível do mercado" nos fala de uma situação em que o próprio sistema em si tende a corrigir os excessos e caminhar ao ponto de equilíbrio. Supondo que a oferta de mão de obra seja dada



**Figura 3:** Curvas de oferta e demanda em tempos diferentes. É possível perceber a mudança no ponto de equilíbrio do sistema para uma posição em que as quantidades ofertadas e demandadas são menores.

por  $L$ , e que a variação temporal dessa oferta seja dada por

$$\frac{dL}{dt} = \epsilon(L). \quad (8)$$

No equilíbrio,  $\epsilon(L) = 0$ , ou seja, a oferta e demanda por mão de obra são iguais, todos os que desejam trabalhar encontram emprego. Diversos outros conceitos de microeconomia podem ser vistos em (PINDYCK; RUBINFELD, 2009).

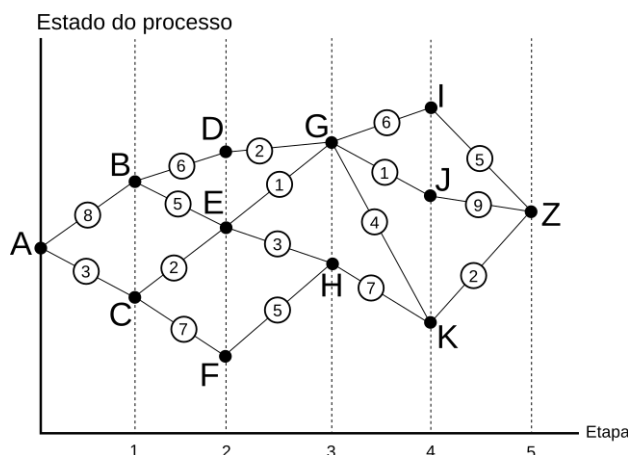
Estamos buscando ferramentas e conceitos que nos ajudem a entender e solucionar problemas similares aos apresentados até aqui. Existe porém um atenuante para os problemas, a evolução temporal das variáveis, sendo assim, é necessário que se conheça métodos mais elaborados que englobem a dinâmica das variáveis econômicas.

### III. OTIMIZAÇÃO DA DINÂMICA DE MERCADOS COMO UM ELO ENTRE FÍSICA E ECONOMIA

A grande motivação para esse artigo é apresentar situações presentes em economia que possuem uma analogia evidente com problemas recorrentes em física. Conhecemos a partir de observações da natureza que os entes físicos tendem a buscar estados de menor energia, mas qual seria o análogo econômico? Ora, os consumidores tendem a minimizar o seu gasto, os produtores tendem a maximizar o seu lucro e diminuir o custo de produção. Matematicamente falando, para ambos os casos estamos procurando máximos e mínimos de funções que demonstram o comportamento desses agentes ao longo do tempo.

Vamos iniciar esses conceitos apresentando um exemplo simples de otimização. Vamos considerar o caso de uma empresa que transforma uma matéria prima em um produto final, processo que consiste em levar a matéria prima de uma estado  $A$  para um estado  $Z$ . Essa transformação está sujeita a 5 etapas e entre cada etapa o produtor pode escolher um entre vários processos, cada um deles sujeito a um custo diferente. Ao final de todas as etapas, independente da escolha dos subprocessos, a matéria prima estará em um estado  $Z$ , o que mudará será o custo da produção para cada um dos caminhos escolhidos.

O produtor pode por exemplo escolher a sequência  $ACEHKZ$ , o que resultaria o valor

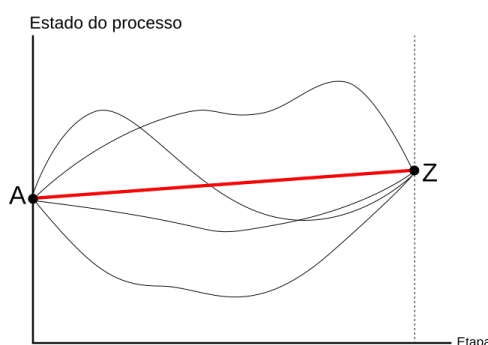


**Figura 4:** Tomada de decisão em multi-etapas para o caso do processo de transformação de matéria-prima. Os valores descritos nos círculos representam o custo de cada subprocesso.

total da transformação  $A \rightarrow Z$  como sendo  $17um$  (unidade monetária). Porém, o mais lógico a se considerar é que o produtor escolha a sequência que gere o menor custo da transformação  $A \rightarrow Z$ .

O próximo passo consiste em considerar um processo que ocorra em etapas contínuas, ou seja, agora as etapas do processo tendem ao infinito, conseqüentemente, os subprocessos. Iremos considerar o tempo  $t$  como a variável de etapas.

Vamos considerar o seguinte exemplo. Uma pessoa possui uma poupança  $A$  e deseja chegar ao valor  $Z$ . Existem diversos planos de investimento e outras maneiras de multiplicar esse montante inicial a fim de chegar ao capital final  $Z$ , porém, se considerarmos um intervalo de tempo  $\tau$ , existirá um plano de investimento no qual o rendimento será máximo ao longo do tempo. Podemos também pensar o caso em que um produtor deseja minimizar os custos de produção ao longo do tempo, buscando a sequência de processos que minimize a sua função de custo.



**Figura 5:** Caso contínuo do processo  $A \rightarrow Z$ . A curva em vermelho representa, por exemplo, o caminho que minimiza uma variável ao longo do tempo.

Usaremos a ideia do funcional e o princípio variacional como a resposta matemática para encontrarmos a curva que melhor representa o resultado que buscamos.

## IV. O PRINCÍPIO VARIACIONAL APLICADO A PROBLEMAS ECONÔMICOS

O problema fundamental a ser resolvido é encontrar uma função  $y(t)$  tal que a integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(y(t), y'(t); t) dt \quad (9)$$

seja um *extremo*, ou seja, um máximo ou mínimo. Para isso, são necessárias inicialmente as condições:

$$y(t_1) = A \quad (10)$$

$$y(t_2) = Z \quad (11)$$

Veremos posteriormente que não necessariamente sempre teremos problemas em que são dados os valores para os parâmetros  $y(t_2)$  e  $t_2$ . O que irá diferenciar o resultado de ser um máximo ou mínimo será a condição de segunda ordem. A solução para esse tipo de problema consiste inicialmente em resolver uma ou um conjunto de equações diferenciais, geradas a partir da conhecida equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

Vamos considerar o exemplo simples de uma função  $f = 12ty + y'^2$ , com condições  $y(t_1) = y_1$  e  $y(t_2) = y_2$  arbitrárias. Teríamos a equação 9 descrita por:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (12ty - y'^2) dt \quad (13)$$

Aplicando  $f$  à equação de Euler-Lagrange, teríamos a seguinte equação diferencial:

$$2y'' - 12t = 0 \quad (14)$$

Resolvendo a equação diferencial, teríamos a função  $y(t)$  dada por:

$$y(t) = t^3 + C_1 t + C_2, \quad (15)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  sendo constantes arbitrárias que dependem das condições  $y(t_1), y(t_2)$  e  $y'(t_1), y'(t_2)$ . Esse problema é bastante simples e serve apenas para ilustrar a condição imposta pela equação 12. Porém, existem outras condições que precisam ser satisfeitas para determinar o comportamento da curva  $y(t)$  que minimiza ou maximiza o nosso funcional. Essas condições dependem exclusivamente da forma do problema que está sendo estudado, devemos lembrar que cada situação busca representar a dinâmica de um sistema que possui suas particularidades e algumas condições de contorno podem representar interesses dos agentes econômicos. Assim, essas diversas condições são uma resposta para a particularidade de cada caso apresentado.

## I. Condições de caracterização da curva

Até agora tratamos apenas de encontrar curvas que sejam extremos, mas o que difere uma curva de ser um máximo ou mínimo? Iremos falar das diversas condições que lapidam a curva que desejamos.

Quando tratamos de funções de uma variável e que sejam diferenciáveis até a sua segunda derivada, caso exista um valor  $a$  que aponte um máximo local, é necessário que  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) < 0$  sejam satisfeitas. Esse ponto pode ser tratado fisicamente como um ponto de equilíbrio instável. Existem condições análogas que precisam ser respeitadas para o caso em que estudamos. Buscando extremos em:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x(t), x'(t); t) dt, \quad (16)$$

onde  $F$  é duas vezes diferenciável em cada um de seus argumentos. As condições que caracterizam  $x(t)$  como máximo ou mínimo são:

$$\frac{\partial^2 F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'^2} \leq 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'^2} \geq 0 \quad (18)$$

A condição 17 nos diz que a função  $x(t)$  é um **máximo** e a 18 nos diz que  $x(t)$  é um **mínimo**. Essa condição é chamada condição de *Legendre*.

Vamos considerar agora que apenas o valor inicial  $x(t_1) = x_1$  seja determinado, ou seja, o valor final  $x(t_2)$  é livre. Caso o problema estudado apresente essa liberdade para o valor de  $x(t_2)$  é preciso considerar a chamada condição de transversalidade, apresentada na equação 19.

$$\left. \frac{\partial F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'} \right|_{t=t_2} = 0 \quad (19)$$

Para o caso de  $t_2$  ser livre, é necessária a condição:

$$F - x' \frac{\partial F}{\partial x'} \Big|_{t=t_2} = 0 \quad (20)$$

Caso ambos  $x(t_2)$  e  $t_2$  sejam livres, ou seja, não determinados inicialmente no problema, as condições de transversalidade podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'} \right|_{t=t_2} = 0 \quad (21)$$

$$F \Big|_{t=t_2} = 0 \quad (22)$$

Há ainda o caso em que as coordenadas finais não são nem completamente livres ou previamente dadas. Essa situação funciona como uma condição intermediária, em que há um grau de limitação para as condições de  $x(t_2)$  e  $t_2$ . Essa condição não será abordada aqui,

porém pode ser encontrada com detalhes na seção 10 de (ALPHA, 1992).

Todas essas condições descritas até aqui são necessárias para modelar a equação  $x(t)$  que buscamos, algumas delas, usadas para casos específicos. As demonstrações de todas essas condições podem ser encontradas em (ALPHA, 1992) e (KAMIEN MORTON, 1991).

Para ilustrar o uso dessas condições, vejamos um exemplo. Vamos encontrar extremos para a expressão:

$$\int_0^T ((c_1)[x'(t)]^2 + c_2x(t))dt \quad (23)$$

As condições são:  $x(0) = 0$ ,  $x(T) = B$ , sendo  $B$  uma constante dada, porém,  $T$  é livre.

O primeiro passo é aplicar o nosso integrando à equação de Euler-Lagrange (12), o que nos resulta:

$$2c_1x''(t) = c_2 \quad (24)$$

Isolando o termo  $x''(t)$  e realizando duas vezes uma integração com limites indeterminados, chegamos à solução:

$$x(t) = \frac{c_2t^2}{4c_1} + K_1t + K_2 \quad (25)$$

Como o tempo final  $T$  é livre, precisamos fazer uso da condição 20:

$$c_1x'(T)^2 = c_2x(T) \quad (26)$$

Precisamos agora determinar as constantes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $T$ . Utilizaremos as condições de contorno e transversalidade para determinar o valor dessas constantes. Utilizando a condição de contorno  $x(0) = 0$ , chegamos ao resultado de que  $K_2 = 0$ . Aplicando (25) em (26) e sabendo que  $K_2 = 0$ , teremos a seguinte expressão:

$$c_1(c_2T/2c_1 + K_1)^2 = c_2(c_2T^2/4c_1 + K_1T) \quad (27)$$

Expandindo os termos e fazendo as devidas manipulações, chegamos ao resultado de  $K_1 = 0$ . Assim, teremos a solução  $x(t)$  escrita como:

$$x(t) = \frac{c_2t^2}{4c_1}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (28)$$

Como  $x(T) = B$ , teremos:

$$T = 2(Bc_1/c_2)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

Podemos ver por este exemplo que as condições de contorno e transversalidade são responsáveis por modelar a curva de solução que maximiza ou minimiza o problema. Considerando as dificuldades de trabalhar com casos reais, até os mais simples modelos teóricos podem ser consideravelmente mais complicados do que o vimos em 23.

## II. Otimização da dinâmica de uma empresa monopolista

Vamos analisar um modelo clássico, chamado modelo de Evans, de uma empresa monopolista que produza um único bem. Esse é um modelo com algumas abstrações,

porém, apresenta bem a construção do pensamento lógico que leva à solução de problemas reais de otimização.

Considerando que o custo de produção desse bem seja dado pela função:

$$C = aQ^2 + bQ + c \quad (a, b, c > 0) \quad (30)$$

Esse modelo leva em conta que a empresa não tenha estoque, ou seja, uma produção semelhante à conhecida na logística como *just in time*; é produzido exatamente o que é demandado. A demanda  $Q(t)$  depende de dois fatores importantes, o preço  $P(t)$  e a variação no tempo do preço  $P'(t)$ :

$$Q = d - eP(t) + fP'(t) \quad (d, e > 0; f \neq 0) \quad (31)$$

Sendo o lucro dessa empresa igual ao produto do preço pela a quantidade vendida menos o custo de produção, ou seja,  $L = PQ - C$ , teremos o lucro dessa empresa dado pela equação:

$$\begin{aligned} L = \pi(P, P') &= PQ - C = P(d - eP + fP') \\ &- a(d - eP + fP')^2 - b(d - eP + fP') - c \end{aligned} \quad (32)$$

Expandindo os termos quadráticos e manipulando a equação, teremos:

$$\begin{aligned} \pi(P, P') &= -e(1 + ae)P^2 + (d + 2ade + be)P \\ &- af^2P'^2 - f(2ad + b)P' + f(1 + 2ae)PP' \\ &- (ad^2 + bd + c) \end{aligned} \quad (33)$$

A função de lucro  $\pi$  pode ser descrita como uma função de  $P$  e  $P'$ . Para deixar mais claro o que estamos fazendo, buscamos encontrar uma curva  $P(t)$  em que o lucro seja máximo ao longo do tempo. Para isso, precisamos resolver um problema da forma:

$$\Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P') dt \quad (34)$$

com  $P(0) = P_0$ ,  $P(T) = P_T$ ,  $P_0$ ,  $T$  e  $P(T)$  dados.

Aplicando  $\pi(P, P')$  na equação de Euler-Lagrange e manipulando os termos, chegaremos à uma equação diferencial da forma:

$$P'' - \frac{e(1 + ae)}{af^2}P = -\frac{d + 2ade + be}{2af^2} \quad (35)$$

Essa equação tem uma solução geral dada por:

$$P(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \bar{P} \quad (36)$$

com as raízes  $r_1$  e  $r_2$  expressas por:

$$r_1, r_2 = \pm \sqrt{\frac{e(1+ae)}{af^2}} \quad (37)$$

e a solução particular  $\bar{P}$ :

$$\bar{P} = \frac{d + 2ade + be}{2e(1+ae)} \quad (38)$$

Aplicando as condições de contorno na solução geral, podemos determinar o valor para as constantes  $A_1$  e  $A_2$ :

$$A_1 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}} \quad (39)$$

$$A_2 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \quad (40)$$

Como os valores para  $T$ ,  $P(T)$  e  $P(0)$  são previamente dados, conhecer essas duas constantes  $A_1$  e  $A_2$  completa a solução do nosso problema, ou seja, agora temos determinada a curva  $P(t)$ .

## V. FORMULAÇÃO HAMILTONIANA APLICADA À PROBLEMAS ECONÔMICOS

Uma formulação mais moderna e mais abrangente pode ser apresentada para resolver os problemas de dinâmica que foram propostos, essa proposta é chamada *teoria do controle ótimo*. Essa teoria basea-se em estudar o comportamento de certas *variáveis de controle* que funcionam como instrumentos de otimização do sistema. Essa formulação também se torna interessante quando temos problemas em que o princípio variacional não é conveniente, como por exemplo, quando existem limitações nas derivadas da função de estado, o que seria análogo aos vínculos não holônomos da mecânica clássica. Assim como antes, estamos procurando também a curva de controle  $u(t)$  que torna nossa função um extremo, já que uma vez conhecida a curva  $u(t)$  também podemos definir a curva de estado  $y(t)$ .

Para ilustrar a ideia do que seriam essas variáveis de controle, imagine um recurso finito (água, petróleo, ouro), dado por uma função  $S$ , em que exista a condição  $S(0) = S_0$ . Ao longo do tempo, esse recurso será extraído e utilizado, reduzindo sua quantidade em estoque, assim, a variação temporal desse recurso:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t) \quad (41)$$

Podemos perceber que a variável  $E(t)$  tem sua relação direta com o a variável de estado  $S(t)$ , representando a taxa de extração desse recurso e funcionando como um mecanismo direção da curva de estado.

Poderíamos descrever esse problema como:

$$\int_0^T U(E)e^{-\rho t} dt \quad (42)$$

Com as condições  $S'(t) = f(t, S, E)$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $S(T)$  é livre e  $\frac{dS(t)}{dt} = -E(t)$ . Agora o integrando não depende explicitamente apenas da função de estado  $y$  e sua derivada temporal, a função de controle substitui  $y'(t)$ .

Todas as mudanças apresentadas até aqui fazem parte do que chamamos de formulação Hamiltoniana, que é fundamento para as mais diversas áreas da física. Sendo assim, é viável construir uma função Hamiltoniana a partir de uma transformação de variáveis:

$$H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda(t)f(t, y, u) \quad (43)$$

Na mecânica clássica, buscamos substituir  $q'_k$  por  $p_k$  e assim, resolver não mais  $N$  equações diferenciais de segunda ordem e sim  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem. Aqui, estamos substituindo  $f(t, y, u)$  por uma função auxiliar  $\lambda(t)$  buscando também resolver equações diferenciais de primeira ordem. Considerando todas essas informações, esperamos que hajam também equações de movimento para as variáveis  $y$  e  $\lambda$ , além de condições de contorno e transversalidade.

Para um problema de maximização que tenha a forma:

$$V = \int_0^T F(t, y, u) dt \quad (44)$$

com as condições:  $y' = f(t, y, u)$ ,  $y(0) = A$ ,  $y(T)$  é livre, e  $A$  e  $T$  dados, teremos as seguintes condições:

$$\text{Max}_u H(t, y, u, \lambda) \text{ Para } t \in [0, T]$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (45)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (46)$$

e a condição de transversalidade:

$$\lambda(T) = 0 \quad (47)$$

A expressão  $\text{Max}_u H$  significa que a Hamiltoniana será maximizada com respeito à variável  $u$ . Assim como foi feito anteriormente, as condições de segunda ordem podem ser escritas como:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0 \quad (49)$$

sendo a equação 48 necessária para maximizar um problema e a equação 49 para minimizar. Uma última condição ainda é necessária e se aplica apenas para os casos em que a Hamil-

toniana não é linear em  $u(t)$ , ou seja, a Hamiltoniana não é da forma  $H(t) = Au(t) + B$  e quando o máximo de  $H$  não ocorre em um ponto do contorno. Estamos considerando que  $u$  seja definido em uma região de controle, determinada por um intervalo fechado  $[a, c]$ . Essa condição é expressa por:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (50)$$

Em resumo, a condição 50 só é aplicável quando  $u$  é não linear e  $H$  seja maximizado por  $u$  em um ponto interno ao intervalo fechado  $[a, c]$ , ou seja,  $a < u < c$ .

Vamos visualizar um exemplo simples. Considere o problema:

$$\text{Max} \int_0^1 (x + u) dt \quad (51)$$

com  $x' = 1 - u^2$  e  $x(0) = 1$ . Teremos então a Hamiltoniana dada por:

$$H = x + u + \lambda(1 - u^2) \quad (52)$$

Podemos ver que a Hamiltoniana 52 não é linear em  $u$ , sendo assim, devemos usar a condição 50. Utilizando as condições apresentadas em 46, 47, 48 e 50, teremos as seguintes equações:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = 1 - 2\lambda u, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\lambda \leq 0 \quad (53)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1, \quad \lambda(1) = 0 \quad (54)$$

Integrando a expressão em 54 e aplicando a condição de contorno, teremos:

$$\lambda = 1 - t \quad (55)$$

A partir de 53, podemos escrever:

$$u = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(1 - t) \quad (56)$$

Substituindo 56 em  $x' = 1 - u^2$  e  $x(0) = 1$ , chegaremos a:

$$x' = 1 - \frac{1}{4}(1 - t)^2, \quad x(0) = 1 \quad (57)$$

Integrando a expressão 57, aplicando as condições de contorno e listando todos os resultados, chegaremos às seguintes equações para os parâmetros procurados:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \frac{1}{4}(1 - t) + \frac{5}{4} \\ \lambda(t) &= 1 - t \\ u(t) &= \frac{1}{2}(1 - t) \end{aligned} \quad (58)$$

É possível perceber que essa formulação carrega a vantagem de apresentar equações diferenciais de ordem menor, o que pode facilitar a solução dos problemas na maioria das vezes.

## I. Condições de restrição envolvendo variáveis de controle

Quando tratamos de restrições nas curvas que extremizam os funcionais estudados, estamos falando de situações similares aos problemas tratados no início desse artigo, que eram resolvidos a partir do método dos multiplicadores de Lagrange. Existem diversos tipos de restrição para as variáveis de controle, vamos falar sobre restrições que representam igualdades da forma  $g(t, y, u) = c$ . Os outros tipos de restrições podem ser encontrados de forma detalhada no capítulo 10 em (ALPHA, 1992).

Vamos considerar um problema com duas variáveis de controle,  $u_1$  e  $u_2$ , onde a seguinte condição deve ser obedecida:

$$g(t, y, u_1, u_2) = c \quad (59)$$

O problema pode ser apresentado como:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \int_0^T F(t, y, u_1, u_2) dt \\ & \text{sujeito à condição } y' = f(t, y, u_1, u_2) \\ & g(t, y, u_1, u_2) = c \\ & \text{e condições de contorno não especificadas} \end{aligned} \quad (60)$$

Utilizando o método similar aos multiplicadores de Lagrange, teremos uma função  $\mathcal{L}$  que será descrita por:

$$\mathcal{L} = H + \theta(t)[c - g(t, y, u_1, u_2)] \quad (61)$$

Aqui, o multiplicador de Lagrange  $\theta(t)$  é dinâmico, ou seja, uma função do tempo. Considerando que cada  $u_j$  tenha uma solução dentro de um intervalo fechado  $[a, c]$ , faz-se necessária a condição:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_j} - \theta \frac{\partial g}{\partial u_j} = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (62)$$

É também necessária a condição:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = c - g(t, y, u_1, u_2) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (63)$$

As condições 62 e 63, acompanhadas de condições de segunda ordem, são responsáveis por modelar a curva de solução para a maximização de  $H$  em um caso de restrição de equidade. Além disso, existem também modificações nas equações canônicas de Hamilton. As condições restantes são:

$$y' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (64)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \theta \frac{\partial g}{\partial y} \quad (65)$$

acompanhadas de uma devida condição de transversalidade. Podemos perceber que a equação de movimento para  $y$  se mantém a mesma, porém, a equação para  $\lambda$  é acrescida de um termo que depende do multiplicador de Lagrange. Muitos dos problemas que tratam de restrições, são apresentados com limitantes em formas de inequações. A ideia inicial para entender as restrições dessa forma é pensar que quando tratamos de variáveis de controle, tornam-se mais interessantes os casos em que sejam impostos limites de atuação para essas variáveis, limites da forma  $a < u < b$ . Restrições por inequações podem ser vistas em detalhes em (KAMIEN MORTON, 1991).

## VI. CONCLUSÃO

Estimular o pensamento econômico de profissionais acostumados a resolver diversos tipos de problemas pode ser o primeiro passo para uma série de ganhos futuros. Os tópicos abordados por este trabalho são base para a construção de uma teoria fundamental para se entender a dinâmica de mercados. É possível perceber que a maior parte do arcabouço matemático abordado é usada com frequência na solução de problemas em física, sendo assim, entender a dinâmica de problemas econômicos gera um diferencial para o profissional da área. Apesar disto, existem diversos conceitos agregados à teoria de otimização da dinâmica, que não são vistos com frequência por físicos, principalmente alunos de graduação, revelando que essa teoria apresenta particularidades interessantes de serem abordadas. Buscamos apresentar fundamentos da teoria econômica de forma simples, considerando que a maior parte desses conceitos não são apresentados, na maioria das vezes, em cursos de ciências exatas. É possível encontrar em (CRAVEN; ISLAM, 2005) conceitos para a programação de modelos econômicos e ideias semelhantes às encontradas nesse trabalho. Fica como proposta, a simulação de modelos econômicos a partir de métodos de programação estatística, como por exemplo, a simulação de um modelo de crescimento estocástico, que pode ser encontrado no capítulo 7 em (CRAVEN; ISLAM, 2005)

## REFERÊNCIAS

- ALPHA, C. C. *Elements of dynamic optimization*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1992. 71, 76
- BARRO R.J; SALA-I-MARTIN, X. *Economic Growth*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2004. ISBN 9780262025539.
- CRAVEN, B.; ISLAM, S. *Optimization in Economics and Finance: Some Advances in Non-Linear, Dynamic, Multi-Criteria and Stochastic Models*. [S.l.]: Springer, 2005. ISBN 9780387242798. 77
- EVANS, G. C. *Mathematical introduction to economics*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1930.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029.

KAMIEN MORTON, I. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. [S.l.]: Elsevier Science, 1991. v. 2nd ed. 71, 77

MARION, J. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. [S.l.]: Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483272818.

MCCAULEY JOSEPH, L. *Dynamics of markets: econophysics and finance*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. *Microeconomics*. [S.l.]: Pearson/Prentice Hall, 2009. ISBN 9780132080231. 67



# Uma abordagem alternativa para o ensino da transmissão e recepção de ondas eletromagnéticas

Alternative approach to teaching electromagnetic waves transmission and reception

RODRIGO TEIXEIRA ROSSINI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Colégio Técnico da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro-CTUR.

---

## Resumo

*Desde Hertz, um novo mundo de oportunidades surgiu, onde a comunicação através de ondas eletromagnéticas fez com que distâncias ficassem menores e a sociedade mudasse a forma de se comunicar. Junto a essa inovação, tecnologias emergem a todo instante e siglas como AM e FM se tornaram corriqueiras em nossas vidas, sendo amplamente utilizadas e pouco discutidas em sala de aula. O objetivo deste trabalho é trazer uma abordagem alternativa sobre a transmissão de ondas eletromagnéticas, utilizando representações da técnica de modulação de uma maneira mais agradável e simples, utilizando-se de analogias figuras e animações que, utilizadas em sala de aula, podem aumentar e muito o potencial de aprendizado de alunos em um tema tão atual como este. Alunos que demonstram bastante curiosidade em aprender este tema, mas esbarram e desanimam com os formalismos teóricos e matemáticos.*

**Palavras-chave:** Ensino de física. Eletromagnetismo. Analogias. Transmissão de ondas.

---

## Abstract

*Since Hertz, a new world of opportunity has emerged, where communication through electromagnetic waves has caused distances to become smaller and society has changed the way it communicates. Along with this innovation, technologies emerge all the time and acronyms like AM and FM have become commonplace in our lives, being widely used and little discussed in the classroom. The objective of this work is to bring an alternative approach on the transmission of electromagnetic waves, using representations of the modulation technique in a more pleasant and simple way, using analogies figures and animations that, used in the classroom, can increase and much the learning potential of students in a subject as current as this. Students who are very curious to learn this subject, but come up against and discourage theoretical and mathematical formalisms.*

**Keywords:** Physics teaching. Electromagnetism. Analogies. Wave transmission.

## I. INTRODUÇÃO

Estudar a transmissão de uma onda eletromagnética (OEM) nos leva a um novo mundo e uma nova maneira de enxergar a propagação de informações e dados. Desde seus primeiros estudos experimentais com Hertz<sup>1</sup>, a sociedade mudou drasticamente a forma com que os indivíduos se comunicam. Graças aos inventos decorridos desse estudo, a sociedade não precisou mais de navios ou de telégrafos para transmitir informações e hoje, na velocidade da luz, uma informação é transmitida e recebida. O aluno que hoje vivencia este estágio da humanidade é bombardeado com novas tecnologias da informação e comunicação (TIC's). Conceitos surgem, siglas e formas de se comunicar emergem, e no meio deste emaranhado está o aluno, o qual muitas vezes é o público de maior potencial de utilização destas ferramentas que são amplamente utilizadas, mas seus princípios científicos e de funcionamento são pouco explorados e compreendidos na escola. Se boa parte destas TIC's são baseadas na transmissão e recepção de uma OEM (Wi-Fi, Bluetooth, comunicação por celular e comunicação via satélite), por que não explorar alguns conceitos relacionados a estas tecnologias em sala de aula?

## II. PRINCÍPIOS BÁSICOS

Com as equações de Maxwell<sup>2</sup> para o eletromagnetismo e seus desdobramentos, a humanidade criou as bases teóricas para a propagação de ondas eletromagnéticas. Algumas de suas aplicações serão discutidas neste momento como base para este trabalho, discutindo apenas alguns aspectos gerais e relevantes a esse assunto, usando de analogias, figuras e animações na tentativa de evitar certos formalismos matemáticos que estão, na maioria das vezes, fora do escopo curricular de um aluno de ensino médio. Começaremos nossa discussão estudando um sistema de comunicação básica, onde as presenças de alguns elementos são indispensáveis e representados na Figura 1.



Figura 1: Diagrama em blocos de uma comunicação analógica simples.

Como um simples exemplo da Figura 1, analisaremos a comunicação entre duas pessoas através de um sistema de telefonia analógica convencional, representado pela Figura 2.

Cada passo dessa comunicação tem um correspondente ao diagrama em blocos da Figura 1:

<sup>1</sup> Heinrich Rudolf Hertz ( 22/02/1857 —01/01/1894): físico alemão, de origem judaica. Foi o responsável pela descoberta das ondas eletromagnéticas em 1888, tendo sido atribuído à unidade de frequência o seu nome, em sua homenagem (WIKIPÉDIA, 2015).

<sup>2</sup> James Clerk Maxwell (13/06/1831 — 5/11/1879): Foi um físico e matemático britânico. Ficou conhecido por ter dado uma forma final à teoria moderna do eletromagnetismo, que une a eletricidade, o magnetismo e a ótica (WIKIPÉDIA, 2016).

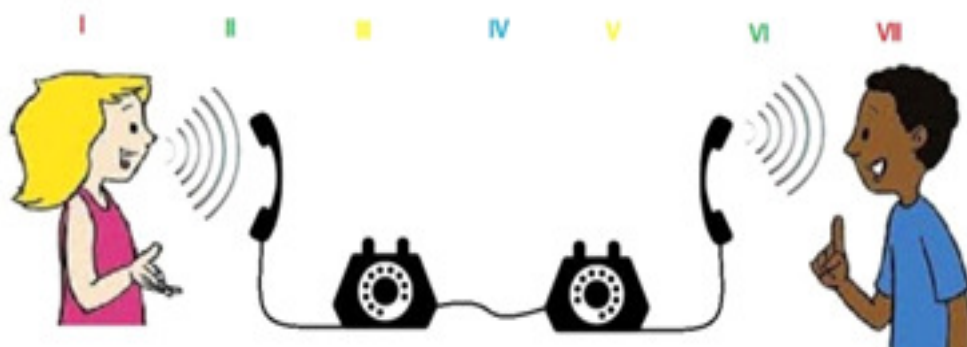


Figura 2: Comunicação através da telefonia analógica.

1. Fonte da informação: geradora da mensagem que neste caso é a menina da Figura 2;
2. Transdutor<sup>3</sup> de emissão: que neste caso é o microfone convertendo as vibrações mecânicas do som em sinais elétricos;
3. Transmissor: é a parte interna do circuito do telefone que oferece condições para que o sinal elétrico percorra o canal de comunicação;
4. Canal de comunicação: é o meio físico por onde as mensagens em forma de sinais elétricos trafegam, indo do transmissor ao receptor;
5. Receptor: é a parte do circuito interno do telefone de recepção que recebe os sinais elétricos e os direciona ao transdutor de recepção;
6. Transdutor de recepção: componente que converte os sinais elétricos recebidos em vibrações mecânicas (som) para o destinatário;
7. Destinatário: recebedor do sinal sonoro que, neste caso, é o menino da Figura 2.

Para um sistema simples de comunicação baseado em ondas eletromagnéticas, a situação é parecida, em vez de um sinal elétrico percorrer um canal cujo meio é um fio, dessa vez o que será transmitido será uma onda cujo canal será agora o meio em que essa onda se propaga, geralmente o ar ou o vácuo.

Ao analisarmos o exemplo da Figura 3, uma primeira pergunta natural surge: como realizamos uma transmissão e recepção de uma OEM? Basicamente, quando temos uma carga acelerada periodicamente em uma antena<sup>4</sup>, a mesma gera, em certas condições físicas e de engenharia, uma onda periódica que se propaga até atingir a antena de recepção<sup>5</sup>. Por conta da chegada dessa onda na antena de recepção, elétrons começam a se mover nessa

<sup>3</sup> Por definição, transdutor (transducer) é todo dispositivo capaz de converter uma forma de energia em outra. e sendo de vários tipos e formas: Microfone - converte som em sinal elétrico; Auto-falante - Converte sinal elétrico em som.; Célula fotovoltaica - Converte energia luminosa em energia elétrica; Etc.

<sup>4</sup> Antena: transdutor de vários formatos diferentes que transforma uma corrente elétrica variável em onda eletromagnética.

<sup>5</sup> Para evitar formalismos matemáticos e obter uma noção básica e visual do fenômeno, sugiro ao leitor a visualização de duas simulações interativas contidas no sítio [https://phet.colorado.edu/pt\\_BR/](https://phet.colorado.edu/pt_BR/) cujos nomes são: Irradiando carga, Ondas de Rádio e Campos eletromagnéticos.



Figura 3: Esquema básico de comunicação via rádio.

antena, enviando sinais ao circuito receptor o qual será responsável por enviar a mensagem ao transdutor de recepção e conseqüentemente ao destinatário. Contudo, realizada a comunicação, uma segunda pergunta natural também surge: qual seria a melhor forma ou técnica para enviar informações entre transmissor e receptor a fim de se obter uma comunicação mais eficiente? Uma das técnicas mais rudimentares em telecomunicações para atingir esse objetivo é a de comunicação via código Morse. Nela, um sinal ou onda transmitidos eram chaveados<sup>6</sup> a fim de se criar uma informação inteligível pelo receptor, sendo amplamente utilizada pelos telégrafos sem fio no início do século XX e tendo papel importantíssimo principalmente nas comunicações marítimas da época. Sua velocidade de transmissão da informação dependia da capacidade de chavear a fonte de energia e da capacidade de interpretação dos sinais que chegavam ao receptor, criando assim, um limite operacional relativamente baixo. Um esquema simplificado desta técnica utilizada em equipamentos rudimentares é mostrado na Figura 4.

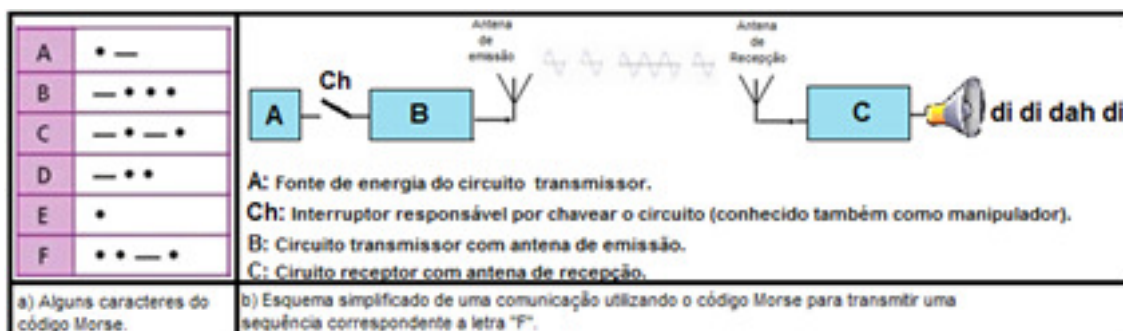


Figura 4: Esquema básico de comunicação utilizando código Morse.

Em uma analogia aplicada em sala de aula dessa técnica, ponderaremos que, apesar de mesma natureza, a OEM emitida pela antena emissora do equipamento real é de frequência bem menor do que a luz visível. Contudo, faremos o uso de uma fonte de luz visível para facilitar a visualização e entendimento dessa técnica em uma comunicação via OEM.

Nessa analogia, o circuito emissor e sua antena serão substituídos por uma lanterna que iremos supor emitir luz polarizada, monocromática da cor verde e toda a recepção será

<sup>6</sup> Processo pelo qual uma espécie de interruptor é ligado e desligado para fim de estabelecer ou interromper o processo de transmissão de uma OEM.

substituída pela visão humana<sup>7</sup>. No caso da comunicação via Morse, a mensagem seria transmitida desligando e ligando sucessivamente a lanterna em intervalos curtos e mais longos de tempo a fim de se criar os códigos exemplificados na “Figura 4(a)”, sendo estes códigos interpretados pela visão humana como sendo as letras e caracteres responsáveis pela comunicação. A aplicação em sala de aula dessa analogia é ampla e dependerá do tempo que o professor queira dispor para o tema, podendo variar desde uma explanação de como seria esta analogia, passando por uma apresentação que utilize uma animação de uma lanterna até a proposta relatada a seguir: divida a turma em dois grupos, cada grupo terá que ter um aluno responsável por enviar através de piscadas longas e curtas da lanterna uma palavra via código Morse. O aluno que emitirá a mensagem terá em mãos uma tabela de código Morse para produzir a mensagem e enviá-la ao seu respectivo grupo. O grupo, que também possui uma tabela de código Morse, decifrará a mensagem o mais rápido possível. Feito isso, o grupo que realizar essa tarefa, em menos tempo e consequentemente falar a palavra certa, ganhará a disputa.

É claro que, com o passar do tempo, essa técnica se mostrou pouco conveniente para outras aplicações, dando início a corrida para introdução de outras formas de transmitir informações, sempre com objetivo de aumentar a eficiência na transmissão e recepção de sinais e superar problemas de engenharia. Essas formas ou técnicas de transmissão são chamadas, em muitos casos, de modulação que pode ser definida como:

“Processo pelo qual uma propriedade ou característica de um sinal é modificada conforme um outro sinal (que contém a informação a ser transmitida), a fim de se obter maior eficiência de transmissão (LAMAR, 2005) ”

Então se tomarmos uma representação simples do campo elétrico  $E(t)$  de uma OEM emitida como sendo da forma  $E(t) = A(t) \cdot \cos[\omega(t) \cdot t + \phi(t)]$ , podemos inserir, com técnicas principalmente eletrônicas, o sinal desejado (informação ou mensagem) em alguns de seus parâmetros conforme a Figura 5.

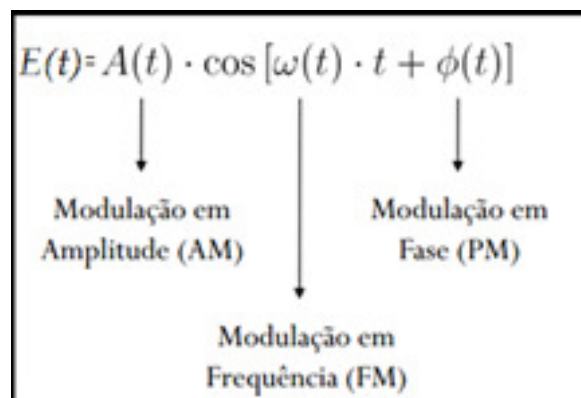


Figura 5: Alguns tipos de modulações analógicas.

Em que o sinal de maior frequência onde a mensagem será embutida é chamado de **portador** (ou onda portadora), o sinal ou mensagem que será embutido é chamado de **modulante** (ou onda modulante) e o sinal resultante já com o sinal embutido é chamado

<sup>7</sup> Chamaremos de visão humana todos os órgãos nervos e entidades responsáveis pelo processamento da imagem pelo homem, desde o olho humano até o cérebro.

de **modulado** (ou onda modulada). Tomaremos como exemplo dois tipos tradicionais de modulação: a modulação AM (Amplitude Modulada) e a modulação FM (Frequência Modulada). Nesses, os parâmetros a serem modificados serão respectivamente a amplitude e a frequência da onda transmitida. Desta forma, consideraremos um exemplo simples onde o sinal a ser transmitido (informação ou mensagem) seja uma onda harmônica simples  $m(t)$  que alterará o parâmetro da amplitude  $A(t)$  da onda original (portadora) conforme a Figura 6.



Figura 6: Modulação em amplitude de um sinal harmônico simples.

Imaginemos um sinal sonoro senoidal (onda mecânica) sendo captado pelo transdutor de emissão (microfone) e que é transformado em sinal elétrico. Este sinal, através do circuito transmissor, modifica a onda transmitida pela antena de emissão. Esta onda, chamada agora de modulada, se propaga pelo espaço livre até interceptar a antena de recepção. Com isso, o sinal elétrico gerado na antena de recepção após a chegada da onda modulada é tratado pelo circuito do receptor o qual se encarregará de separar a mensagem do sinal modulado e entrega-la ao transdutor de recepção (autofalante), como mostrado na Figura 7.



Figura 7: Esquema simplificado de uma transmissão em AM de um sinal harmônico.

Para uma segunda análise desta técnica em sala de aula, utilizaremos novamente uma lanterna e a visão humana, definidas anteriormente, como respectivamente sendo a transmissão e a recepção de uma OEM. Nessa analogia, percebemos que ao ligar a lanterna, a única informação percebida pela visão humana é a chegada da onda eletromagnética (luz supostamente verde). Para que outras informações sejam percebidas, parâmetros da

luz emitida devem ser alterados para que essas alterações sejam interpretadas pela visão como sendo novas informações. Desta forma, como a modulação em AM seria percebida e interpretada pela visão? Para tal, sabemos que a intensidade de uma OEM depende de sua amplitude da forma:

$$I = \frac{1}{c\mu_0} E_{rms}^2 \quad (1)$$

Desta maneira, ao embutirmos a mensagem no parâmetro da amplitude da onda, a visão humana perceberia uma luz com sua intensidade luminosa variando entre um mínimo e um máximo, onde cada valor de intensidade seria interpretado como uma parte da informação transmitida<sup>8</sup>. A mensagem funcionaria como uma espécie de DIMMER<sup>9</sup> interligado a lanterna e responsável por variar a intensidade luminosa da luz emitida pela mesma. Para uma aplicação em sala de aula dessa analogia, poderíamos fazer uma exposição sobre o tema, utilizar animações que consigam mostrar essa variação de intensidade da luz emitida pela lanterna<sup>10</sup> ou levar para sala de aula uma lanterna (constituída de uma lâmpada incandescente) ligada a um reostato que fará o papel de modificar os parâmetros de corrente e tensão elétrica na lâmpada e conseqüentemente alterar seu brilho. A alteração periódica do brilho da lâmpada simulará a variação de intensidade da onda transmitida.

Um desdobramento óbvio desta ideia é embutir a mensagem em outro parâmetro da OEM transmitida pela antena de emissão, como por exemplo, inseri-la no parâmetro da frequência desse sinal ou onda enviados (Frequência Modulada).

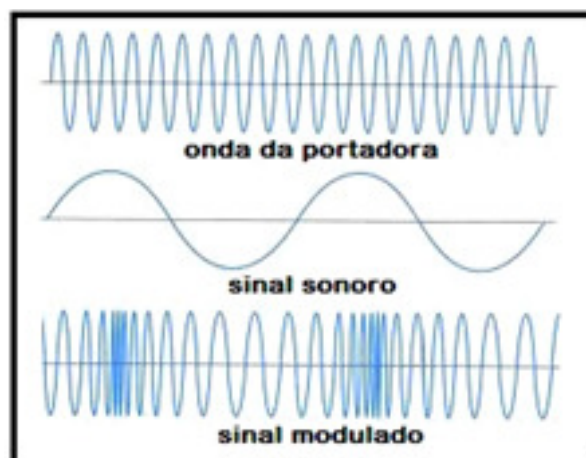
Nessa técnica, uma mensagem ou sinal harmônico simples inserido no parâmetro da frequência da onda portadora fará com que a frequência da mesma varie entre valores mínimos e máximos em torno de uma frequência fixa chamada de frequência central, conforme a Figura 8<sup>11</sup>.

<sup>8</sup> Sabemos que na prática, a visão humana reconhece um número máximo de quadros em um determinado tempo, podendo alterar a percepção da variação de intensidade da onda pela visão. Por isso, iremos ignorar esse fato para o funcionamento da analogia.

<sup>9</sup> Dispositivo de uso geralmente doméstico que junto ao interruptor é responsável por alterar a intensidade de corrente elétrica em aparelhos eletrodomésticos e lâmpadas, mudando a luminosidade do ambiente e velocidade de funcionamento de aparelhos.

<sup>10</sup> Para o uso de uma animação, sugerimos o link: [https://phet.colorado.edu/pt\\_BR/simulation/color-vision](https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/color-vision)

<sup>11</sup> Sabemos que os transdutores converterão sinais sonoros da faixa de 20 Hz a 20 KHz em sinais elétricos que conseqüentemente serão modulados. Esses sinais têm frequências muito menores que a portadora (de faixa 500-1600 kHz para AM e 88 a 108 MHz para FM) fazendo com que o sinal modulado não seja de fácil visualização. Desta forma, optamos por criar figuras fora de escala no intuito de facilitar o entendimento do tema.



**Figura 8:** Modulação em frequência de um sinal harmônico simples.

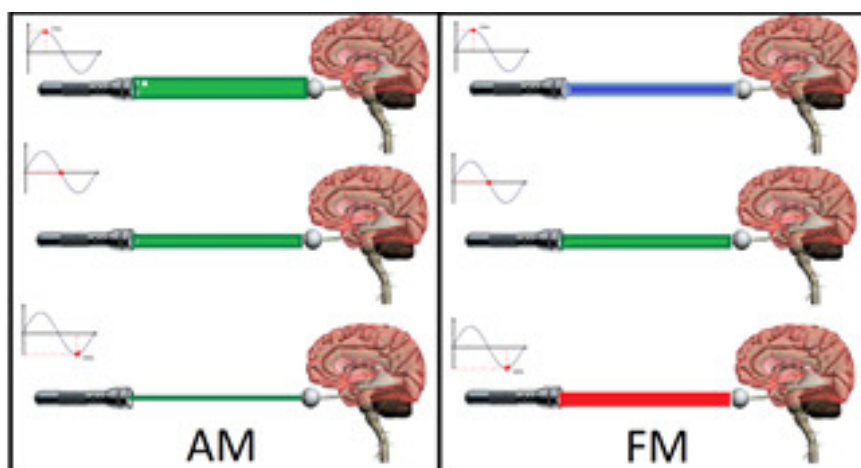
A grande vantagem do FM é a sua qualidade de áudio e sua boa imunidade ao ruído, pois uma grande quantidade de ruído estático e elétrico acontece em AM e em baixas frequências. Ao contrário de um receptor FM que opera em uma faixa de frequência mais alta e não responderá a esses sinais indesejados.

Ao fazermos novamente uma analogia em sala de aula com a luz visível, em que a frequência da onda emitida pela antena é mais uma vez trasladada para faixa do visível, a onda emitida (luz) agora pela lanterna irá sofrer um desvio em sua frequência. Esta luz, inicialmente definida na cor verde (frequência central), sofrerá um desvio que tenderá para o vermelho quando o valor da frequência for mínimo, e um desvio de frequência para o violeta quando o valor de frequência tender ao máximo. A visão humana, responsável pela recepção, perceberá cada mudança de cor como uma modificação da informação inicial. Cada tonalidade de cor pode ser interpretada como uma parte diferente da informação<sup>12</sup>.

### III. CONCLUSÃO

A transposição didática que tem que ser feita para adequar as novas tecnologias ao cotidiano do aluno nem sempre acontece em sala de aula. Por isso, o objetivo deste tema foi trazer aspectos básicos de uma tecnologia que, apesar de ter mais de cem anos, continua em evolução e pouco abordada em sala de aula. Então, o maior objetivo após o aprendizado do tema é criar um encultramento científico nos alunos. Grande parte desses não serão técnicos, mas estarão inseridos em um mundo onde esta tecnologia estará permeando seus cotidianos, onde notícias sobre a transmissão de OEM e suas técnicas estarão por todas as partes. As TVs, rádios, telefonia móvel, satélites e a internet são apenas alguns exemplos de tecnologias baseadas em transposição de OEM. Deste modo, se ao final da aplicação desta proposta, mesmo com as limitações provocadas pelas analogias e simplificações, o aluno tiver condições de interpretar o mundo relacionado ao tema de uma forma mais consciente,

<sup>12</sup>Sabemos que a faixa de frequências da luz visível é muito estreita, criando uma banda de frequências muito pequena para a informação emitida. Além disso; a interpretação de cada informação nesta analogia está sujeita ao limite operacional em que as células do olho humano (cones e bastonetes) conseguem interpretar as diferentes cores em um determinado tempo.



**Figura 9:** Analogia utilizando a luz visível para o ensino de modulação.

tendo uma noção crítica dessa tecnologia que o cerca, a missão deste trabalho terá sido cumprida.

## REFERÊNCIAS

- ANJOS, V. R. D. *Contextualização e o uso de simulações no ensino médio*, Rio de Janeiro, maio 2015.
- AUSUBEL, D. P. *The psychology of meaningful verbal learning*. New York: [s.n.]. 1963.
- BALANIS, C. A. *Teoria de antenas*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- BOYLESTAD, R.; NASHELSKY, L. *Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- BRUSCATO, G. C.; MORS, P. M. *Ensinando física através do radioamadorismo*. Revista Brasileira de Ensino de Física, Porto Alegre, v. 36, n. 1, março 2014.
- EFÍSICA. *Noções elementares sobre ondas eletromagnéticas*. efisica, 2007. Disponível em: <[http://efisica.if.usp.br/eletricidade/basico/ondas/ondas\\_eletromagneticas/](http://efisica.if.usp.br/eletricidade/basico/ondas/ondas_eletromagneticas/)>. Acesso em: 2 out. 2015.
- FONTANA, E. *Radiação e antenas*, recife, 2013.
- GLYNN, S. M. *Teaching-with-analogies Model: Build*. Science and children., 2007. 52-55.
- LAMAR, M. V. *Modulação em amplitude*, Universidade Federal do Paraná –Dep. de Engenharia Elétrica, 2005.
- MEDEIROS, J. C. D. O. *Princípios de telecomunicações*. 2. ed. São Paulo: Érica, 2007.
- MOREIRA, M. A. *O que é afinal aprendizagem significativa?*, Porto Alegre, 2012.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica*. São Paulo: Blucher, v. 3, 1997.
- OTERO, M. R. *¿Cómo usar analogías en clases de física?* Cad. Cat. Ens. Fís., v. 14, n. 2, p. p. 179-187, 1997.
- PEREIRA, S. *Modulação am e fm*. Ebah, 2011. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABqjUAI/modulacao-am-fm>>. Acesso em: 2 maio 2015.
- PIROPO, B. *Modulação am e fm*. IT FORUM 365, 2014.

Disponível em: <<http://itforum365.com.br/blogs/post/113330/telefones-modulacao-am-e-fm>>. Acesso em: 4 nov. 2015.

PORTAL EXPLICATORION. Heinrich Hertz. Portal Explicatórion, 2015. Acesso em: 1 maio 2015.

Disponível em: [http://www.explicatorium.com/biografias/Biografia\\_Heinrich\\_Hertz.php](http://www.explicatorium.com/biografias/Biografia_Heinrich_Hertz.php)  
Acesso em: 26/01/2015.

RESNICK, H. *Fundamentos da física*. Rio de Janeiro: LTC, v. 4, 2009.

ROSSINI, R. T. *transmissão e recepção de ondas eletromagnéticas: uma abordagem experimental para o ensino médio e técnico* MNPEF UFRJ Rio de Janeiro , maio de 2016

TELECO. A. *Ciclos Evolutivos: Grandes Descobertas*, 2015. Disponível em: <<http://www.teleco.com.br/tu>>  
Acesso em: 17 abr. 2015.

WIKIPÉDIA. *Tecnologia da informação*. [S.l.]: [s.n.]. 2013.

Disponível em: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Tecnologia\\_da\\_informação](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tecnologia_da_informação) acesso em 26/01/2015.

WIKIPÉDIA. *James Clerk Maxwell*. 2016.

Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](https://pt.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)>. Acesso em: 02 jan. 2016.

---



# Jogos didáticos no ensino da eletrodinâmica

## Didactic games in the teaching of electrodynamics

MARIELE ANDRESSA AULER MACIEL<sup>1</sup>, FÁBIO LOMBARDO EVANGELISTA\*<sup>1</sup>,  
LUCIANO LEWANDOSKI ALVARENGA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal Catarinense, Campus Concórdia

---

### Resumo

*As atividades realizadas trabalharam o conteúdo de Corrente Elétrica por meio da aplicação de oficinas que usam Jogos Didáticos. O público alvo foram alunos da 3ª série matutina da Escola de Educação Básica Irmã Anunciata Sperandio, localizada no município de Peritiba SC. Como objetivo pretende-se aplicar as aulas relacionadas à Eletrodinâmica com auxílio de oficinas que utilizam jogos didáticos, baseando-se na teoria da aprendizagem de Lev Vygotsky. A pesquisa é de natureza qualitativa e o instrumento de coleta de dados foi a observação direta das aulas e questionários. Como resultado houve aumento na cooperação dos alunos na realização das atividades e maior participação nas aulas, o que promoveu uma boa relação aluno-aluno e aluno-professor. O uso do jogo didático produzido e apresentado pelos alunos, estimulou a motivação discente.*

**Palavras-chave:** Jogos Didáticos. Ensino da Eletrodinâmica. Mediação. Vygotsky.

---

### Abstract

*The activities performed worked the content of Electric Current through the application of workshops that use Didactic Games. The target audience were students of the 3rd grade morning period classrooms of the Sister Anunciata Sperandio Elementary School, located in the municipality of Peritiba - SC. The objective is to apply the classes related to Electrodynamics with the aid of workshops that use didactic games, based on Lev Vygotsky's theory of learning. The research is qualitative in nature and the data collection instrument was the direct observation of the classes and questionnaires. As a result there was an increase in students' cooperation in carrying out activities and greater participation in classes, which promoted a good student-student and student-teacher relationship. The use of the didactic game produced and presented by the students stimulated the student motivation.*

**Keywords:** Teaching Games. Teaching of Electrodynamics. Mediation. Vygotsky.

---

\*fabio.evangelista@ifc.edu.br

## I. INTRODUÇÃO

A maioria das escolas públicas do Alto Uruguai Catarinense, formado pelos municípios de Alto Bela Vista, Arabutã, Concórdia, Ipira, Ipumirim, Irani, Itá, Jaborá, Lindóia do Sul, Paial, Peritiba, Piratuba, Presidente Castelo Branco, Seara e Xavantina, não possuem laboratórios com equipamentos apropriados para a realização de atividades práticas - experimentais. Sendo assim, foi pensado numa proposta de aplicação de atividades lúdicas em que o aluno colocasse em prática seus conhecimentos adquiridos em sala de aula. Nesse sentido, foi elaborada uma oficina didática onde o aluno construía seu próprio jogo, visando um momento de descontração em um ambiente que, muitas vezes, é visto como chato ou monótono. Segundo Almeida (1998, p.13):

A educação lúdica está distante da concepção ingênua de passatempo, brincadeira vulgar, diversão superficial. Ela é uma ação inerente na criança, no adolescente, no jovem e no adulto e aparece sempre como uma forma transacional em direção a algum conhecimento, que se redefine na elaboração constante do pensamento individual em permutações com o pensamento coletivo.

A Escola de Educação Básica Irmã Anunciata Sperandio, localizada em Peritiba - SC, busca formar alunos capazes de atender as necessidades de seu desenvolvimento dentro de uma visão dialética homem-mundo, de modo a acreditar na capacidade de criar e recriar o saber historicamente produzido e socializá-lo, oportunizando assim uma maneira crítica e reflexiva de pensar

Como principal objetivo pretende-se aplicar as aulas relacionadas à Eletrodinâmica com auxílio de oficinas que utilizam jogos didáticos, baseando-se na teoria da aprendizagem de Lev Vygotsky (1988). De acordo com Moratori (2003, p.9):

O jogo pode ser considerado como um importante meio educacional, pois propicia um desenvolvimento integral e dinâmico nas áreas cognitiva, afetiva, linguística, social, moral e motora, além de contribuir para a construção da autonomia, criticidade, criatividade, responsabilidade e cooperação das crianças e adolescentes.

A oficina trouxe a proposta de apresentação dos jogos elaborados pelos alunos.

A seção dois deste trabalho traz os referenciais teóricos que embasaram as observações e, principalmente, as práticas da professora. Serão abordados recorte da teoria sociointeracionista de Vygotsky e os recursos dos jogos didáticos para o ensino de conteúdos de Física. Já a seção três traz a descrição tanto das aulas aplicadas quanto da oficina didática relacionando as práticas da professora (aulas aplicadas e oficina didática) com o referencial teórico adotado. Por fim, na seção quatro as conclusões que consistem na impressão pessoal da professora sobre sua ação durante o estágio.

## II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

### I. A Teoria Sociointeracionista de Vygotsky

Lev Vygotsky enfatiza o processo histórico-social e o papel da linguagem no desenvolvimento do indivíduo. Sua questão central é a aquisição de conhecimento pela interação do sujeito com o meio. Para ele, o sujeito é interativo, pois adquire conhecimento a partir de relações intrapessoais e interpessoais e de troca com o meio, a partir de um processo denominado mediação.

No corpo desse projeto as relações interpessoais (entre pessoas) ocorreram através da troca de ideias entre os alunos e professora, a respeito da elaboração dos jogos educativos que os próprios alunos desenvolveram.

No entanto, não se trata apenas de considerar o meio social como uma variável importante no desenvolvimento cognitivo. Na perspectiva de Vygotsky, o desenvolvimento cognitivo é a conversão de relações sociais em funções mentais. Não é por meio do desenvolvimento cognitivo que o indivíduo se torna capaz de socializar, é por meio da socialização que se dá o desenvolvimento dos processos mentais superiores (DRISCOLL, 2005).

A socialização aconteceu por meio da apresentação dos jogos produzidos pelos alunos, quando foram demonstrados a elaboração e funcionamento. Em seguida, eles jogaram com o próprio material construído.

O desenvolvimento dos processos mentais superiores (pensamento, linguagem, comportamento volitivo) no ser humano é mediado por instrumentos e signos, que podem ser construídos por meio social, histórica e cultural (MOREIRA, 2009). Os instrumentos são considerados algo que pode ser usado para fazer algo, e um signo é algo que significa alguma coisa.

Neste projeto, foi utilizado como um instrumento o Simulador Phet Colorado, que mostra aos alunos como funcionam a Primeira e Segunda Lei de Ohm. Levou-se também para a sala de aula um Voltímetro, uma resistência de chuveiro, para que assim, os alunos pudessem perceber que a Física se encontra em todos os lugares. A utilização dos signos pode ser entendida neste processo como os significados atribuídos aos materiais fornecidos. Como exemplo, o significado do uso do resistor é sua resistência elétrica, o significado do Voltímetro é a medida da diferença de potencial (ddp) presente nos circuitos. Isso associa a prática com o observado no software do Phet Colorado. Relacionando os instrumentos com os conceitos científicos vinculados a eletricidade e circuitos elétricos.

A sociedade constrói instrumentos e sistemas de signos, ambos ao longo da sua história, que modificam, influenciam seu desenvolvimento social e cultural. E é por meio dessas construções sócio culturais, via interação social, que o indivíduo se desenvolve cognitivamente. Pois para Vygotsky, todas as funções mentais superiores se originam como relações entre seres humanos (MOREIRA, 1999, p.109).

A interação social que provoca a aprendizagem deve ocorrer dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), mas, ao mesmo tempo, tem um papel importante na determinação dos limites dessa zona. O limite inferior é, por definição, fixado pelo nível real de desenvolvimento do aprendiz. O superior é determinado por processos instrucionais que podem ocorrer no brincar, no ensino formal ou informal, ou no trabalho. Independentemente do



**Figura 1:** Zonas de Desenvolvimento desenvolvidas por Vygotsky. Fonte: O autor.

contexto, o importante é a interação social (DRISCOLL, 2005).

Também é importante verificar as zonas de desenvolvimento dos estudantes (figura 1). Em suma, pretende-se:

- Identificar a zona de desenvolvimento real do sujeito, aquela onde ele consegue realizar tarefas sem auxílio de outra pessoa ou qualquer fonte de conhecimento;
- Atuar na zona de desenvolvimento proximal do sujeito, aquela intermediária entre a zona real e potencial, fazendo uso de instrumentos e signos das atividades experimentais e virtuais, promovendo de motivação, o engajamento, a imitação e auxílio das pessoas mais capazes;
- Alcançar a zona de desenvolvimento potencial do sujeito, aquela que se consegue chegar com o auxílio obtido na zona de desenvolvimento proximal.

Ao brincar, a criança desenvolve uma Zona de Desenvolvimento Proximal. Oliveira (1995) esclarece que esse é um domínio psicológico em constante transformação, refere-se ao caminho de amadurecimento de suas funções, ou seja, ações que, hoje, a criança desempenha com a ajuda de alguém conseguirá, amanhã, fazer sozinha (figura 1).

Oliveira (2000, p. 26) afirma que o desenvolvimento das crianças se dá de fora para dentro, ou seja, a criança é cópia do meio externo e as características individuais dependem da interação do ser humano com o meio físico e social.

Vygotsky (1988, p. 137) afirma: A essência do brincar é a criação de uma nova relação entre o campo do significado e o campo da percepção visual, ou seja, entre situações no pensamento e situações reais. Essas relações irão permear toda a atividade lúdica da criança.

O lúdico proporciona um desenvolvimento integral e dinâmico nas áreas cognitivas, além de contribuir para a construção da autonomia, criatividade e responsabilidade das crianças e jovens. Isso também é considerado um recurso educacional, no entanto, pouco utilizado.

A importância do lúdico utilizado neste trabalho através da aplicação de jogos na educação ocorre quando a diversão se torna aprendizagem e experiências cotidianas.

É muito mais eficiente aprender por meio de jogos e, isso é válido para todas as idades, desde o maternal até a fase adulta. O jogo em si, possui componentes do cotidiano e o envolvimento desperta o interesse do aprendiz, que se torna sujeito ativo no processo, e a confecção dos próprios jogos é ainda mais emocionante do que apenas jogar . (LOPES, 2001, p.23)

Pode-se dizer que educar é dar condições para que os alunos construam. Papert (1986) propõe que educar consiste em criar situações para que os aprendizes se engajem em atividades que alimentem este processo construtivo.

Quando se entende que o conhecimento é resultante de trocas, como foi citado acima por Vygotsky, da interação do sujeito com o meio, o jogo passa a ser uma importante ferramenta a ser utilizada nos processos de desenvolvimento e construção.

O educador deve oferecer ao aluno um ambiente de aprendizagem atraente e gratificante, constituindo-se num recurso poderoso de estímulo para o desenvolvimento integral do aluno. Segundo Rizzo (1988), os jogos desenvolvem muitas habilidades no aluno, como por exemplo, a atenção, disciplina, autocontrole, respeito a regras e, as habilidades perceptivas e motoras relativas a cada tipo de jogo oferecido.

A ideia do projeto é estimular essas habilidades nos alunos, por meio da confecção dos seus próprios jogos, fazendo também com que eles se sensibilizem para a construção de seu conhecimento. Os jogos didáticos voltados para a Física podem ser bastante simples, mas podem ser ambientes de aprendizagem complexos. Os principais objetivos dessa atividade são: despertar o interesse dos alunos pelos conteúdos e criar um ambiente propício para a aprendizagem.

Para Papert (1986) o aprendizado ocorre principalmente quando o aprendiz está comprometido em construir um produto de significado pessoal (por exemplo, um jogo), que pode ser mostrado a outras pessoas. Portanto, ao conceito de que se aprende melhor fazendo, acrescenta-se que é melhor ainda quando se gosta, pensa e conversa sobre o que se faz.

Vygotsky (1988) atribui importância no papel do lúdico na constituição do pensamento infantil. Segundo ele, por meio do lúdico que a criança revela seu estado cognitivo, visual, auditivo, tátil, motor, seu modo de aprender e entrar em uma relação cognitiva com o mundo de eventos, pessoas, coisas e símbolos.

Um bom ensino é aquele que provoca no aluno o interesse pela disciplina, no entanto, isso não se deve dar por meio de uma forma autoritária, mas sim por meio de uma abordagem que consiga estimular o conhecimento do aluno. Objetivando promover este estímulo, o trabalho ofereceu como ferramenta metodológica jogos didáticos no auxílio do estudo da eletrodinâmica.

## II. Jogos didáticos

Esta atividade com jogos está fortemente aliada à vida de qualquer ser humano desde muito cedo, inicia-se ainda quando crianças, com atividades simples, nas quais é possível

mexer com objetos, correr, criar, imaginar, entre outros. Jogos, em sua maioria, neste período, necessitam apenas explicações de o que fazer, e como fazer - assim a criança acaba deixando de lado a própria realidade, entregando-se ao mundo imaginário.

E esses jogos continuam a instigar o ser humano durante todo o seu processo de humanização, em consonância com Ribeiro (2008, p. 218) as atividades lúdicas são inerentes ao ser humano, não somente ao universo infantil, mas também nas vivências dos adultos. Conclui-se então que os jogos estão presentes na vida do ser humano desde a infância até a fase adulta, instigando sempre o interesse. Nesta perspectiva, a inserção dos jogos no ambiente da sala de aula também traz suas potencialidades.

Entretanto, seria um erro dizer que os jogos didáticos agem por si só e irão sanar os problemas de aprendizagem. A intenção é mostrar que é um meio de auxiliar a aprendizagem, servindo como subsídio importante para se transmitir os conteúdos. Se a vida é um jogo e o jogo pode se transformar em brincadeira, por que não viver brincando e aprender com a brincadeira?

Mas, ao trabalhar com jogos na sala de aula, há a necessidade de o professor tomar certos cuidados. Ao escolher um jogo, o professor precisa planejar como o mesmo ocorrerá, qual a melhor forma de abordá-lo na sala de aula e com qual conteúdo. Precisa-se estar preparado para a forma como os alunos receberão o jogo. Pois há vários modelos de jogos que são utilizados para a prática educacional. Desta forma, podemos dizer que qualquer jogo serve, mas não de qualquer forma (MACEDO; PETTY e PASSOS, 2000).

Nesse sentido, o desafio está em despertar e aguçar o interesse do aluno, para promover uma aprendizagem de conhecimentos e ao mesmo tempo o desenvolvimento de competências e habilidades de forma significativa e duradoura para todos os alunos. E, de acordo com Macedo, Petty e Passos (2000), com a utilização de jogos didáticos na sala de aula há a possibilidade de abordar esses aspectos.

Há duas principais abordagens: instrucionista e construcionista (KAFAY, 2006). A primeira está relacionada à utilização e avaliação dos jogos instrucionais, ou seja, desenvolvidos fora do contexto de sua aplicação, e então disponibilizados para o público. Na perspectiva construcionista, o foco está em possibilitar que os estudantes criem seus próprios jogos e construam novas relações com o conhecimento neste processo (SMEETS, 2006).

Quando estudantes têm como tarefa a criação de um jogo, precisam entender profundamente os conteúdos aprendidos e aplicar esse conhecimento na construção do mesmo (ROBERTSON; GOOD, 2005). Criar jogos tem o potencial de propiciar um poderoso ambiente de aprendizagem, pois os estudantes exercitam uma série de habilidades que exigem um alto nível de engajamento e comprometimento (ROBERTSON; HOWELLS, 2008). A criação do jogo coloca estudantes no controle do aprendizado e provoca-os a planejar e gerir um processo complexo de criação (KAFAY, 2006). Neste sentido, criar um jogo pode ser mais positivo para o aprendizado do que apenas a utilização de jogos já existentes.

### III. DESCRIÇÃO E ANÁLISE CRÍTICA DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO ESTÁGIO

Buscando atender os princípios da escola, aplicou-se 10 aulas sobre o conteúdo de Corrente Elétrica e uma oficina em que os alunos apresentaram os jogos que elaboraram.

**Tabela 1:** *Instruções dos jogos*

Regras	Roteiros	Organização
-Divisão de Grupos; - Quem começa jogando?; -Ao errar a questão, o que fazer?; -Ao acertar a questão, o que fazer?; - Delimitar o início e o fim do jogo.	-Como jogar; -Deverão conter as regras; -A pontuação, em caso de erros/acertos.	-As perguntas deverão estar digitadas; -O jogo bem elaborado, com regras claras, visualmente agradável, feitos de formas que sejam duráveis; -Com questões bem elaboradas, respeitando o nível de escolaridade e os conceitos trabalhados.

A oficina ocorreu em 4 aulas, entre os meses de agosto, setembro e outubro de 2017. Após a aplicação das aulas foi proposta uma oficina, desenvolvida na escola, a fim de dar continuidade ao conteúdo trabalhado e promover uma retomada ou estudo dos conteúdos já estudados por meio do uso de Jogos Didáticos.

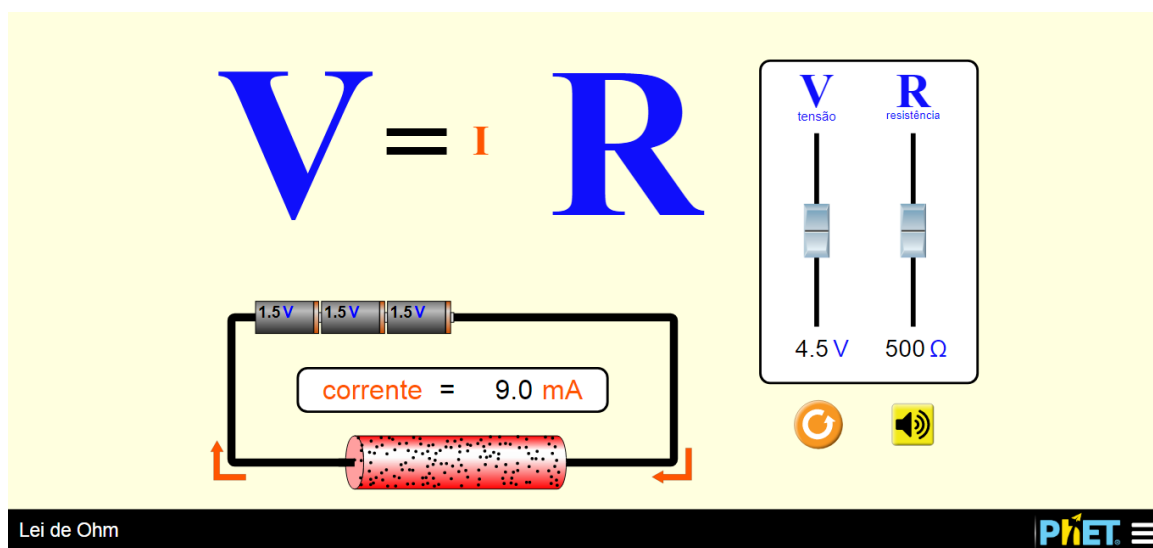
Nesta seção, será realizada uma descrição das atividades aplicadas durante o período de 17/08 até 19/09.

## I. Relato da Docência I (17/08/17)

No primeiro dia de aula, tanto os 23 alunos quanto a Professora Regente e o Orientador fizeram-se presentes. Foi apresentado aos alunos um breve cronograma contendo a sequência das aulas com os devidos conteúdos e atividades a serem trabalhados. Enfatizou-se que durante a realização do Estágio II, os alunos deveriam criar seu próprio jogo. As opções eram: jogo da memória, jogo de tabuleiro, jogo de dominó e jogo de perguntas e respostas., com materiais de baixo custo.

Os alunos designaram os grupos (3 grupos com 6 alunos e 1 grupo com 5 alunos) e a escolha do tema do jogo foi feita através de sorteio. Após, foram repassadas as instruções e tarefas (Tabela 1) a serem realizadas.

Foram disponibilizados aos alunos alguns artigos para servir de exemplo. E logo em seguida foi abordado o conteúdo de Corrente Elétrica de forma expositiva-dialogada. No início, houve pouca participação dos alunos, isso porque a presença do Professor Orientador deixava-os com vergonha, fato este percebido, pois na aula seguinte os alunos apresentaram maior participação devido a ausência do Orientador. Foram utilizados slides para a apresentação dos conteúdos e os alunos tiveram de copiar no caderno alguns conceitos e ideias principais. Na sequência, a turma se juntou em grupos, para resolver uma lista de exercícios. Então, no restante da aula os alunos resolveram a lista, com o auxílio da professora quando necessário. Nesta aula não são atribuídas notas ou conceitos específicos, mas a participação e comprometimento com as atividades serão levadas em conta em avaliações subsequentes.



**Figura 2:** Simulador Phet Colorado ilustrando a Primeira Lei de Ohm. Fonte: <[https://phet.colorado.edu/sims/html/ohms-law/latest/ohms-law\\_pt\\_BR.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/ohms-law/latest/ohms-law_pt_BR.html)> Acesso em: 20/06/2017

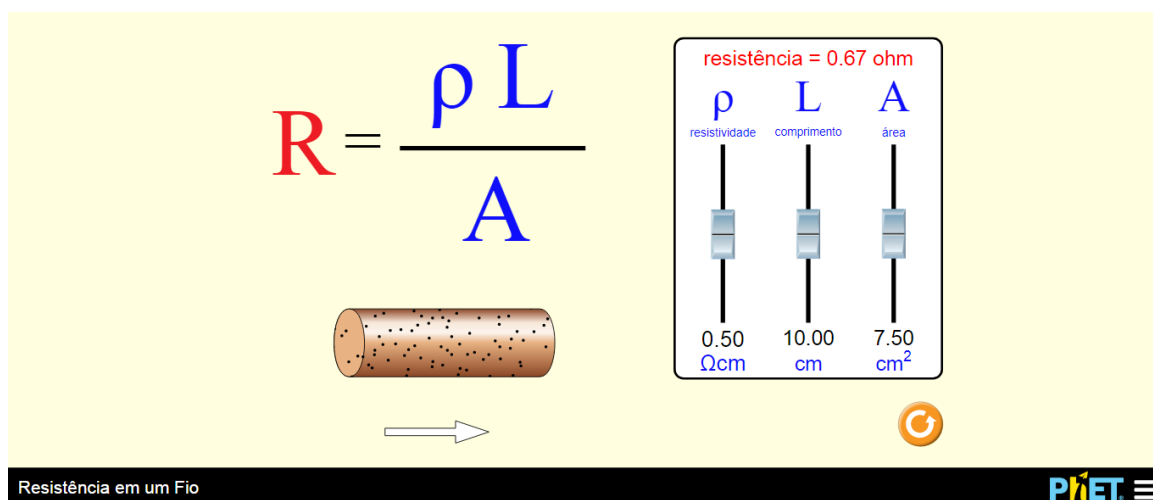
## II. Relato da Docência II (24/08/17)

No segundo dia, todos os alunos estavam presentes, bem como a professora regente da turma. A Professora conversou brevemente com os alunos referente a uma viagem que a turma irá fazer para a Usina Hidrelétrica de Machadinho RS. A seguir, foi dada a sequência nos conteúdos trabalhados na aula anterior, os alunos puderam terminar a lista de exercícios, e depois disso, alguns foram até a lousa para resolvê-los. Após sanar todas as dúvidas dos alunos, foram repassados trabalhos para os alunos se reunirem em grupos e fazerem um trabalho manuscrito e uma breve apresentação em slides, marcado para apresentar na próxima aula.

Em seguida, houve a continuação do conteúdo, por meio de slides. Os alunos tiveram de copiar em seu caderno as principais ideias e conceitos. Além de conceitos, alguns aspectos matemáticos também foram enfatizados, e depois foram repassados exemplos.

Para melhor compreensão do conteúdo, a professora trouxe para os alunos uma resistência de chuveiro, e um voltímetro, reforçando assim, o uso de Instrumentos, que para Vygostky é essencial para a aprendizagem do aluno. Para finalizar a aula, a professora começou o conteúdo da Primeira Lei de Ohm, passando conceitos e aspectos matemáticos. Neste conteúdo, foi utilizado o simulador do Phet Colorado, onde foi possível mostrar aos alunos que tensão e intensidade da corrente são proporcionais (figura 2). Os alunos copiaram em seu caderno e depois foi entregue uma lista de exercícios.

Nesta aula não são atribuídas notas ou conceitos específicos, mas a participação e comprometimento com as atividades serão levadas em conta em avaliações subsequentes. Não foram concluídas todas as atividades previstas no plano de aula, restando somente a correção da lista de exercícios para a próxima aula. Foram trabalhados os seguintes assuntos: Corrente Alternada e Contínua, Circuito Elétrico, Elementos de um Circuito Elétrico e Primeira Lei de Ohm.



**Figura 3:** Simulador do Phet Colorado ilustrando a Segunda Lei de Ohm. Fonte: <[https://phet.colorado.edu/sims/html/resistance-in-a-wire/latest/resistance-in-a-wire\\_pt\\_BR.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/resistance-in-a-wire/latest/resistance-in-a-wire_pt_BR.html)> Acesso em: 20/06/2017

### III. Relato da Docência III (31/08/17)

Nesta aula estiveram presentes todos os alunos, bem como a professora regente da turma. A primeira aula deteve-se a coleta das concepções sobre Corrente Elétrica e seus efeitos na sociedade, e apresentação de trabalhos, previamente combinado com os alunos por meio da direção da escola.

A professora disponibilizou aos grupos um notebook e caixas de som para a apresentação. Os assuntos abordados nos trabalhos foram Efeitos da Corrente Elétrica. No geral, a apresentação dos grupos resumiu-se na leitura dos slides o que demonstrou não terem experiência em apresentação de trabalho, além de os slides estarem mal formatado, trazendo muita escrita, poucas imagens e poucas relações contextuais. No entanto, a professora conversou com a professora regente, de tal maneira que durante esse diálogo chegou-se à conclusão que alguns alunos realmente não estavam interessados na disciplina. Então, diante disso, houve uma breve conversa com os alunos sobre as apresentações, quando foi explicado como seria uma apresentação mais dinâmica.

Após as apresentações e a conversa com a professora, a aula continuou com a explicação sobre a Segunda Lei de Ohm, sendo-lhes mostrados os conceitos e aspectos matemáticos. Como utilizado na Primeira Lei, nesta também foi utilizado o simulador do Phet Colorado (figura 3).

Para finalizar a aula, foram resolvidos alguns exemplos procurando sanar as dúvidas. Depois, foi entregue uma segunda lista de exercícios, para que resolvessem em casa. Em seguida, foi marcada prova para o dia 14/09/2017.

### IV. Relato da Docência IV (14/09/17)

Nesta aula estiveram presentes todos os alunos, bem como a professora regente da turma. A primeira aula foi dedicada para a correção da lista de exercícios entregue na última aula. Oportunizou-se aos alunos um momento para sanar as dúvidas. Em seguida,



**Figura 4:** Alunos da 3ª série em visita à Usina. Fonte: o autor.

na segunda aula, foi entregue a prova (Anexo). Durante a prova, os alunos conversaram bastante, tentando repassar respostas um para os outros, chamando a professora até sua mesa para tirar dúvidas. Após o término, houve a correção dela, verificando-se algumas notas baixas. Para recuperar o conteúdo, foi realizada uma revisão extra classe, para, então, aplicar uma prova de recuperação na próxima aula.

#### V. Relato da Docência V (19/09/17)

Nesta aula estiveram presentes todos os alunos, bem como a professora regente da turma. Num primeiro momento da aula, foram tiradas as dúvidas dos alunos que pegaram recuperação, em seguida foi entregue a recuperação paralela (Anexo). Os alunos conseguiram resolver rápido, pois esta continha menos questões que a anterior. Na segunda aula, todos os alunos do colégio foram direcionados para fora do ambiente escolar, para prestigiar a homenagem feita pela escola para os alunos que participaram dos Jogos Escolares da Juventude, realizados de 13 a 15 de setembro na cidade de Curitiba, conforme mostra a reportagem feita pelo noticiário local, no site da Prefeitura de Peritiba (PERITIBA, 2017).

#### VI. Relato da visita à Usina Hidrelétrica de Machadinho (03/10/17)

Neste dia, todos os alunos estiveram presentes, bem como a professora regente da turma, e mais um estagiário do curso de Licenciatura em Física. A turma juntamente com seus professores realizou uma visita à Usina Hidrelétrica de Machadinho - Carlos Ermírio de Moraes (UHE Machadinho) que está localizada na divisa dos estados de Santa Catarina e do Rio Grande do Sul, entre os municípios de Piratuba (SC) e Maximiliano de Almeida (RS). O empreendimento começou a operar em fevereiro de 2002, utilizando o potencial hidrelétrico do Rio Pelotas, principal afluente do Rio Uruguai, que forma uma das maiores bacias hidrográficas do Sul do Brasil (MACHADINHO, 2017). A visita técnica possibilitou aos alunos aprenderem mais sobre o funcionamento de uma Usina (figura 4).

#### VII. Oficina

A oficina foi composta por 4 aulas, sendo que ela foi subdividida em duas semanas, tendo como eixo temático, a apresentação dos jogos produzido pelos alunos. Para o



**Figura 5:** Grupo *Jogo de Dominó* explicando o jogo para a turma. Fonte: o autor.



**Figura 6:** Grupo *Jogo de Tabuleiro*, apresentando seu jogo. Fonte: o autor.



**Figura 7:** Alunos jogando, *Jogo de Dominó* (esquerda), *Jogo de Tabuleiro* (Direita). Fonte: o autor.

desenvolvimento desta oficina, foi necessário que os alunos trouxessem seus jogos, para que houvesse tempo para a explicação do jogo e a aplicação dele. Somente dois grupos apresentaram. As oficinas aconteceram nos dias 28/09 e 10/10.

### VII.1 Semana I (28/09/2017)

Na primeira semana, todos os alunos estiveram presentes, incluindo a professora regente e o professor orientador do estágio. Num primeiro momento, a professora explicou como iria funcionar a dinâmica da aula, depois disso o primeiro grupo (*Jogo de Dominó*) se fez presente na frente da turma (figura 5), onde falaram quais foram as dificuldades encontradas na realização do jogo. Depois, mostraram o jogo para a turma, e explicaram como era seu funcionamento.

Em seguida, o segundo grupo (*Jogo da Memória*) também se fez presente na frente da turma (figura 6), falaram quais foram as dificuldades encontradas, depois mostraram o jogo para a turma e explicaram seu funcionamento.

Depois das explicações dos jogos, os alunos se dividiram em grupos para que pudessem jogar os respectivos jogos (figura 7). Todos colaboraram e jogaram. Houve momentos de competição, risadas.

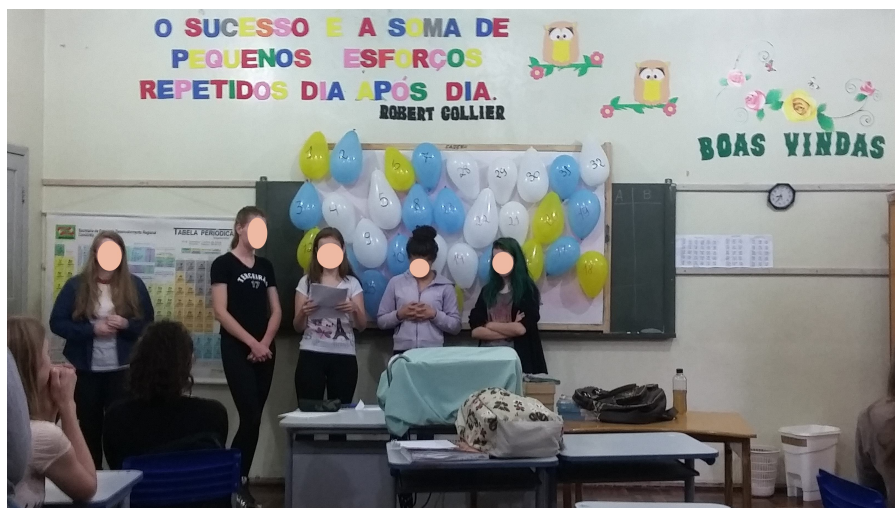
Depois de todos os alunos jogarem os dois jogos apresentados, a professora pediu para que voltassem aos seus devidos lugares e filas, para que pudessem responder um questionário (Anexo) referente à realização dos jogos e da oficina.



**Figura 8:** Grupo *Jogo de Memória* apresentando o jogo para a turma. Fonte: o autor.



**Figura 9:** Grupo de alunos jogando o *Jogo da Memória*. Fonte: o autor.



**Figura 10:** Grupo *Jogo de Perguntas e Respostas* apresentando para a turma. Fonte: o autor.

## VII.2 Semana II (10/10/2017)

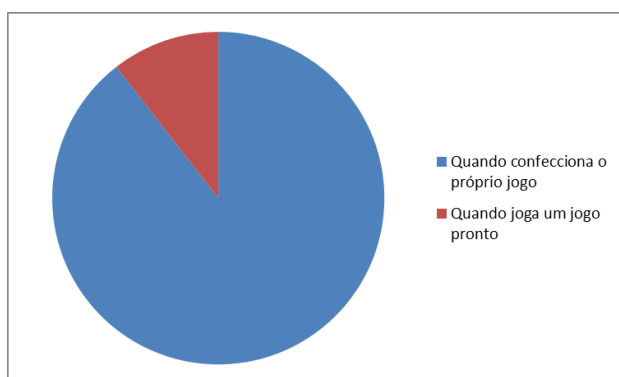
Na segunda semana da oficina, três alunos não se fizeram presentes, a professora regente da turma também não pôde comparecer por problemas pessoais. A oficina se iniciou com o grupo *Jogo de Memória* se fazendo presente na frente da turma (figura 8), tendo explicado como era o funcionamento do jogo, e quais foram as dificuldades encontradas pelo grupo para confeccionar o jogo. Ao terminar, o grupo pediu para que a turma se reunisse em grupos de seis alunos para que pudessem jogar (figura 9).

Em seguida, o segundo grupo *Jogo de Perguntas e Respostas*, também foi à frente da turma para explicar o funcionamento do jogo (figura 10), e quais as dificuldades encontradas. Depois disso, as integrantes do grupo dividiram a sala em dois grupos para que toda turma pudesse interagir, para que então pudessem começar o jogo (figura 11).

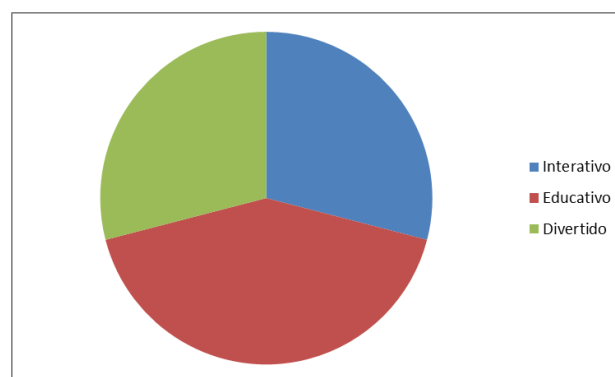
Ao final da segunda oficina, a professora entregou para cada aluno um questionário,



**Figura 11:** Grupos jogando o jogo de Perguntas e Respostas. À esquerda, grupo 1 e à direita grupo 2. Fonte: o autor.



**Figura 12:** Você aprende mais quando?



**Figura 13:** Quais os pontos positivos da montagem do jogo?

contendo sete questões. Esse questionário auxiliou a professora na verificação da elaboração dos jogos.

Analisando a primeira questão, *Você achou eficaz a utilização dos jogos para o ensino da Física?*, essa pergunta teve como objetivo verificar se os alunos acham eficaz ou não a utilização de jogos para aprender Física, utiliza-se os jogos para que se possa sair das aulas monótonas e muitas vezes chatas. Todos os alunos assinalaram que SIM, isso nos mostra que eles aprenderam e gostaram da aplicação dos jogos. Para Vygotsky, 1988:

O lúdico influencia enormemente o desenvolvimento da criança. É através do jogo que a criança aprende a agir, sua curiosidade é estimulada, adquire iniciativa e autoconfiança, proporciona o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. (VYGOTSKY, 1988, p.39)

A segunda questão: *Você aprende mais quando: confecciona o próprio jogo, ou quando joga um jogo pronto.* O objetivo da pergunta era ver com qual método eles aprenderam, pois no Estágio I, a professora levou um jogo de tabuleiro pronto, onde os alunos apenas jogaram. A professora deu a oportunidade de os próprios alunos confeccionarem seus jogos. O gráfico 1 nos mostra qual método foi mais eficaz.

A terceira, quarta e quinta questões foram referentes à interação entre os grupos e

à colaboração dos integrantes. Para os alunos, todos colaboraram e houve uma grande interação. Como sugerido por Miranda (2001, p.2):

...mediante o jogo didático, vários objetivos podem ser atingidos, relacionados à cognição (desenvolvimento da inteligência e da personalidade, fundamentais para a construção de conhecimentos); afeição (desenvolvimento da sensibilidade e da estima e atuação no sentido de estreitar laços de amizade e afetividade); socialização (simulação de vida em grupo); motivação (envolvimento da ação, do desafio e mobilização da curiosidade) e a criatividade.

A sétima e última questão, Quais os pontos positivos da montagem do jogo?. É possível observar através do gráfico 2, que para a maioria dos alunos o jogo foi educativo.

Além de favorecer o interesse pelas atividades escolares, conforme Gomes et al. (2001), o jogo didático pode ser utilizado para atingir determinados objetivos pedagógicos, sendo uma alternativa para se melhorar o desempenho dos estudantes em alguns conteúdos de difícil aprendizagem.

#### IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho docente é algo complexo que exige muito planejamento. Desta forma, há a necessidade do mesmo ser criativo de modo a cativar o aluno a se interessar pelos conteúdos abordados, para que haja uma participação ativa dos discentes nas atividades propostas, tornando a escola algo agradável para eles.

Nas aulas aplicadas foram trabalhados conceitos da Eletrodinâmica com auxílio de jogos didáticos produzidos e apresentados pelos alunos. Para tanto, procurou-se manter uma perspectiva Vygotskyniana, em que, por meio do diálogo, identificou-se elementos da zona de desenvolvimento real do sujeito, definida como a região na qual se consegue realizar tarefas sem auxílio de qualquer fonte externa de conhecimento. A ação mediadora se deu na zona de desenvolvimento proximal, tida como a intermediária entre a zona real e potencial, utilizando-se de instrumentos e signos das atividades experimentais, atividades virtuais, imitação e auxílio das pessoas mais capazes, gerando maior motivação e engajamento dos estudantes.

Houve ainda aumento na cooperação entre os alunos por meio da realização de atividades, assim como maior participação nas aulas. Tal realidade promoveu uma boa relação aluno-aluno e aluno-professor.

Diante das aulas aplicadas à turma, obteve-se um resultado muito positivo, tanto na cooperação dos alunos na realização das atividades, quanto na participação ativa nas aulas e na boa relação aluno-aluno e aluno-professor.

Um dos pontos mais importantes dessa intervenção foram as oficinas que, com o uso do jogo didático produzido pelos alunos, mostrou-se motivadora e atrativa aos alunos. Pois o simples fato de deixar os alunos com total responsabilidade pela construção do jogo proporcionou a participação ativa de todos os integrantes do grupo, quando ambos dividiram as tarefas e chegaram a um resultado em conjunto.

Ao término das atividades do estágio, é perceptível a importância que um bom planejamento desempenha para a organização das ações a serem feitas, além do domínio do conteúdo abordado. Finalmente, foi gratificante ver a contribuição na vida dos estudantes, mudando, mesmo que pouco, a ideia que muitos alunos tinham da Física, como uma disciplina sem sentido.

### REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, P. N. de. **Educação lúdica**. Edicoes Loyola, 1998.
- DRISCOLL, M. P.. **Psychology of learning for instruction**. 2005.
- GOMES, R. R. et al. Contribuição dos jogos didáticos na aprendizagem de conteúdos de Ciências e Biologia. **Erebio**, v. 1, p. 389-92, 2001.
- KAFAL, Y. B. Playing and making games for learning: Instructionist and constructionist perspectives for game studies. **Games and culture**, v. 1, n. 1, p. 36-40, 2006.
- LOPES, M. da G. **Jogos na educação, criar, fazer jogar**. Ed. 2001.
- MACEDO, L. de; PETTY, A. L.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações problema (Learning with Games and Problem-Solving Situations)**. Porto Alegre: Artmed. 2000.
- MACHADINHO <<http://www.machadinho.com.br/novo/usina.php?cod=83>> Acesso em 04/10/2017
- MIRANDA, S. de. Do fascínio do jogo à alegria do aprender nas séries iniciais. **São Paulo: Papiries**, 2001.
- MORATORI, P. B. Por que utilizar jogos educativos no processo de ensino aprendizagem. **UFRJ. Rio de Janeiro**, p. 04, 2003.
- MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: Editora pedagógica e universitária, 1999.
- MOREIRA, M. A. Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências: comportamentalismo, construtivismo e humanismo. **Porto Alegre: UFRGS**, 2009b, 2009.
- OLIVEIRA, M.K. de. Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio - histórico. São Paulo: Scipione, 1999. \_ . Pensar a educação contribuições de Vygotsky.
- CASTORINA, José Antônio et al. **Piaget-Vygotsky: Novas Contribuições para o Debate**, v. 6, 1995.
- OLIVEIRA, V. B. de. (Ed.). **O brincar e a criança do nascimento aos seis anos**. 2000.
- PAPERT, Seymour. **Constructionism: A new opportunity for elementary science education**. Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group, 1986.
- PERITIBA <<http://www.peritiba.sc.gov.br/noticias/index/ver/codMapaItem/6866/cod-Noticia/446966>> Acesso em 04/10/2017
- RIBEIRO, F. D. **Jogos e modelagem na educação matemática**. Editora Ibpe, 2008.
- RIZZO, G. O método natural de alfabetização. **Alfabetização Natural**. Rio de Janeiro: Francisco Alvez, p. 33-129, 1988.
- ROBERTSON, J.; HOWELLS, C. Computer game design: Opportunities for successful learning. **Computers & Education**, v. 50, n. 2, p. 559-578, 2008.
- SMEETS, Ed. Does ICT contribute to powerful learning environments in primary education? **Computers & Education**, v. 44, n. 3, p. 343-355, 2005.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. brasileira. **São Paulo, Martins**, 1988.

---