

termodinâmica

mecânica de Nambu

nanopartículas magnéticas



Physicæ Organum

v. 4, n. 1 (2018)

reflexões

eletrodinâmica de Ampère

mecânica relacional

Nota editorial

A presente edição teve sua composição final realizada posteriormente à sua publicação original, com o objetivo de padronização editorial e atribuição de identificadores digitais (DOIs) aos artigos. Esse processo não alterou o conteúdo dos trabalhos originalmente publicados.

A equipe desta edição foi composta por Olavo Leopoldino da Silva Filho como editor gerente, Fabio Luis de Oliveira Paula e Leonardo Luiz e Castro como editores de layout e capa.

A equipe editorial agradece à Biblioteca Central da Universidade de Brasília (BCE/UnB) pelo apoio na configuração e no registro dos DOIs da revista, especialmente à bibliotecária Luísa Chaves Café.

— Leonardo Luiz e Castro, responsável pela composição final, 2026

Editorial Note

This issue had its final composition prepared after its original publication, with the aim of editorial standardization and the assignment of digital object identifiers (DOIs) to the articles. This process did not alter the content of the originally published works.

The editorial team for this issue consisted of Olavo Leopoldino da Silva Filho (Managing Editor), Fábio Luís de Oliveira Paula, and Leonardo Luiz e Castro (Layout and Cover Editors).

The editorial team thanks the Central Library of the University of Brasília (BCE/UnB), especially librarian Luísa Chaves Café, for their support in configuring and registering the journal's DOIs.

— Leonardo Luiz e Castro, responsible for the final composition, 2026

Apresentação

Esta é mais uma edição da *Physicae Organum*.

Neste número apresentamos artigos sobre Termodinâmica, Mecânica de Nambu, Eletromagnetismo e Eletrodinâmica. Também apresentamos um artigo, na seção de artigos convidados, do professor Portilho, tecendo considerações sobre religião, na perspectiva de um físico. Na seção de artigos apresentamos três artigos que certamente irão despertar grande interesse em nossos leitores.

Esperamos que este número possa representar momentos de leitura instigante e reflexiva em todos.

Atenciosamente,

L.S.F. Olavo, editor gerente

Sumário

1	O caminho da segunda lei da termodinâmica	1
2	Representações da Mecânica de Nambu no Espaço de Hilbert Simplético	12
3	Caracterização de nanopartículas Fe ₃ O ₄ funcionalizadas com óleo essencial de Croton cajucara Benth como plataforma para aplicações em biomedicina	20
4	Reflexões	27
5	Nanopartículas Magnéticas	36
6	Deduzindo $d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ da eletrodinâmica de Ampère	59
7	Força de uma casca esférica em um corpo acelerado	68

O caminho da segunda lei da termodinâmica

CRISTIAN LANDRI *

Programa de Educação Tutorial (PET)

Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil

Abstract

Este trabalho está dividido em diversos períodos da história que levaram à formulação da segunda lei da termodinâmica até os desafios modernos da área. Primeiramente são apresentadas as máquinas térmicas, mecanismos que primeiramente motivaram o estudo da área. Depois as consequências dos estudos de Carnot até síntese de Cláucius. Chega-se no estudo estatístico de Boltzmann e finda-se com as complicações do estudo de um "demônio de Maxwell quântico", apresentando os mais recentes estudos.

Palavras-Chave: Termodinâmica, segunda lei, demônios.

1 Introdução

Os esforços reunidos neste trabalho almejam revisitar os eventos históricos que convergiram na formalização da segunda lei da termodinâmica e então apresentar as empreitadas mais recentes na expansão da teoria da termodinâmica.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: primeiramente, a introdução, logo após será apresentado o quadro científico em termodinâmica até a publicação da obra de Carnot, em seguida as contribuições após Carnot até o advento da física estatística e as ideias de Boltzmann, ainda antes das conclusões apresentam-se os estudos mais recentes sobre um demônio de maxwell quântico.

2 Pré Refflexions

Para se falar de termodinâmica é preciso entender a contribuição do estudo das máquinas térmicas para a ciência da sociedade da época. Faz-se interessante mencionar a Eolípila, um caso conhecido como uma das mais antigas máquinas térmicas. Foi descrita por Herom de Alexandria por volta de 62 d.C. No século XVII. Outra contribuição importante foi a criação da bomba de vácuo pelo assistente de Huygens, Denis Papin possibilitando se fazer experimentos em termodinâmica. Também é devido à Papin a criação

*cristianlandri@gmail.com.

da primeira panela de pressão que ficou conhecida como a Panela de Papin, a panela ou digestor foi apresentada à Royal Society em 1679 sob os auspícios de Robert Hooke.

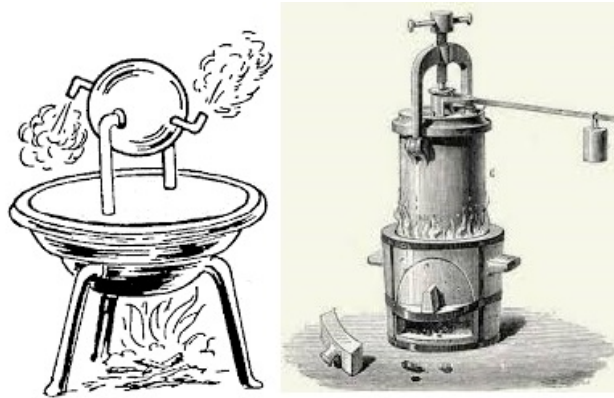


Figure 1: *Eolípila*[1] e *Panela de Papin*[4], respectivamente.

O digestor tem uma proposta diferente da Eolípila e apesar de ambos serem movidos por vapor de água, o primeiro é um objeto de investigação científica e o segundo, até onde se sabe, tinha caráter recreativo. Apesar da Royal Society alegar que não foi comprovada a efetiva funcionalidade do engenho de Papin, os seus princípios foram utilizados para a elaboração de novas máquinas térmicas. As conhecidas máquinas de Savary e de Newcomen tiveram maior aplicabilidade econômica por auxiliarem o trabalho em minas de cobre e carvão na retirada da água que entrava nas galerias. Nota-se que todas as máquinas descritas usam a água e o vapor de água como intermediária dessa interação. Dito isso é chegada a hora de investigar as teorias a cerca do equilíbrio térmico dos corpos submetidos ao contato físico.

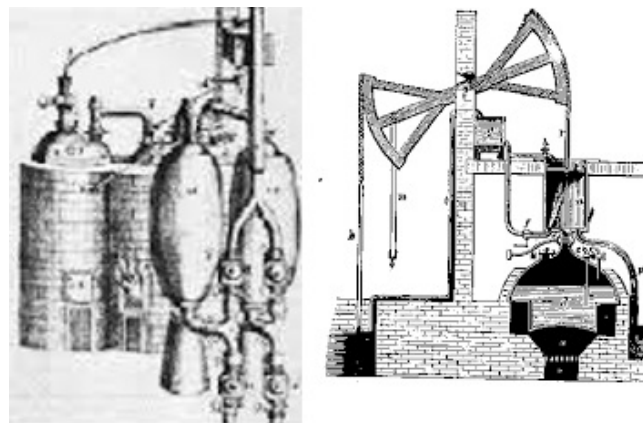


Figure 2: *Máquina de Savary*[3] e *Máquina de Newcomen*[2], respectivamente.

O equilíbrio térmico sempre foi um fenômeno de fácil observação, isto é, dois corpos submetidos ao contato físico tendem, em um tempo finito, a equidade de temperatura. No entanto esta afirmação levanta e levantou uma série de questionamentos a cerca da natureza da matéria. A primeira teoria de transporte

de temperatura na matéria interessante a se mencionar é a teoria do Flogisto (do grego passado pelo fogo), surgindo com George Ernst Stahl baseado na ideia de *terra pinguis* exposto por Johann Joachim Becher no seu livro *Physica subterranea* [11].

A teoria se baseava nesta quantidade chamada de Flogisto que habitaria todos os corpos em diferentes proporções dando a qualidade de serem mais combustíveis, o modelo foi deixado de lado devido a várias contradições que ele implicava, sendo efetivamente substituído pela teoria do calórico após experimentos de Lavoisier [5]. A nova teoria delga ao calórico a capacidade de deixar os corpos mais quentes. Seria um fluido presente em todos os materiais e sua condução seria de acordo com a mecânica de fluidos. Em contraposição a esta teoria encontra-se a ideia de que a temperatura é a manifestação da agitação das partículas e sua condução seria feita por meio de colisões inelásticas entre as partículas de um material com o outro.

Neste cenário é que Carnot publica as suas *Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres a développer cette puissance*, "reflexões sobre a potência motriz do fogo e sobre as máquinas próprias a desenvolver essa potência" (tradução livre). Segundo Cássio [12] seus antecessores não se preocuparam em analisar o conteúdo físico presente no funcionamento das máquinas térmicas, sendo Carnot o primeiro a trazer essa abordagem. Em sua obra ele se baseia na teoria do calórico e sua pretensão principal era desenvolver uma teoria capaz de reunir todas as máquinas à ignição imagináveis.

Dos muitos resultados de Carnot ele conclui que a potência das máquinas não se deve ao puro consumo de calórico, mas sim ao seu transporte de um corpo quente à um corpo frio. Concluiu-se igualmente que onde houver diferença de temperatura haverá potência motriz e o recíproco também é válido, além de muitas outras conclusões que ficaram conhecidas como os "teoremas de Carnot". Por fim é apresentado um engenho ideal que funcionaria de forma reversível ficando futuramente conhecido como a máquina de Carnot, operando segundo o que se conheceria como o ciclo de Carnot [7].

A obra de Carnot foi publicada em 1824, há de se notar que a decadência da teoria do calórico já poderia ser observada, pois em 1804 foi publicada a nota histórica do Conde de Rumford *mémoire sur la chaleur*. Nota em que ele descrevia como se aqueciam os canhões durante um treinamento de tiro em que esteve presente e como aquele comportamento não poderia ser de natureza corpuscular e sim cinética.

3 Pós Réflexions

O trabalho de Carnot passou despercebido em seu tempo até que Émile Clapeyron publicasse em 1834 um artigo descrevendo o ciclo de Carnot pormenorizadamente, assim se pode perceber a importância do referido trabalho. Destaca-se aqui uma questão que ficou em aberto sobre a obra de Carnot, pois muitos foram aqueles que identificaram em seu texto a afinidade da palavra *calorique* com o conceito de entropia que seria introduzido por Clausius apenas em 1865, assim levanta-se a questão do trabalho de Carnot ser ou não baseado na teoria cinética do calor e sendo assim um cientista muito a frente de seu tempo.

O ciclo de Carnot como se conhece hoje, como duas isotermas intercaladas por adiabáticas, foi uma solução de Clapeyron em sua obra *Memoires sur la puissance motrice du feu* para a imposição feita nas Réflexions, de não haver contato entre corpos de temperaturas diferentes. Recorrendo às leis de Gay Lusac e Mariotte, no mesmo referido trabalho, encontra-se a relação $p v = R(267 + t)$, com p a pressão do gás v

seu volume e t a temperatura com $R = (p_0 v_0) / (267 + t_0)$ e os subíndices denotando o estado inicial.

Clapeyron argumenta que para um acréscimo infinitesimal de temperatura dt , a grandeza conhecida como *quantité d'action* seria dada numericamente pela área do quadrilátero gerado pelo ciclo no plano $p \times v$ que se revelou ser um paralelogramo. Nesse plano, fazendo a proposição $Q = f(p, v)$ acha-se a relação $dp = R \frac{dt}{v}$ chegando na desejada relação de acréscimo de *quantité d'action* $R \frac{dt dv}{v}$. Para determinar a quantidade de calor que foi necessária para produzir este efeito foi dito que seria igual aquilo que foi cedido para crescer em dv o recipiente à temperatura constante, por isso propôs a seguinte igualdade: $dQ = \frac{dQ}{dv} dv + \frac{dQ}{dp} dp$ [19].

Convêm-se mencionar que segundo a teoria moderna da termodinâmica, esse tipo de desenvolvimento é incorreto devido ao fato de que dQ é uma diferencial inexata e não poderia ter uma dependência explícita como essa descrita acima. No entanto o que se pode dizer sobre esse desenvolvimento é que, apesar de descuidado, acabou por descrever uma quantidade que coincide com uma função de estado para essas condições específicas: a entalpia, de diferencial exacta dH [11].

Dividindo-se a grandeza *quantité d'action* por dQ com algumas simplificações das leis dos gases, chega-se em: $\frac{R dt}{v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}}$, o trabalho relembra que esta quantidade já foi provada ser independente do agente. Na tentativa de satisfazer a exigência e inspirado na forma das leis dos gases propôs-se $v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp} = F(v, p)$, pois $t \propto vp$ e a solução desta equação parcial (lembrando que ainda não existia a notação para as derivadas parciais) resulta: $Q = f(v, p) - F(v, p) \log[(hip)p]$ que ele prefere escrever como $Q = R[B - C \log(p)]$, $B = B(t)$ e $C = C(t)$ [19].

Notando-se que $RC = v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}$ chega-se em $\frac{dt}{C} = R \frac{dt}{v \frac{dQ}{dv} - p \frac{dQ}{dp}}$ e portanto apesar de se ter $B = B(t)$, ele pode variar de gás para gás. A função C foi então notada como de extrema importância quando se percebe que $\frac{1}{C}$ denota exatamente a eficiência da máquina térmica.

A função C foi altamente revisitada e estudada por grandes nomes da época, entre eles destaca-se o nome de William Thomson, mais conhecido como Lord Kelvin. Ele almejava elaborar uma escala absoluta de temperatura fundamentada na determinação do valor de $\frac{1}{C}$. Seus resultados foram de extrema importância para determinar o equivalente mecânico do calor e conseqüentemente a primeira lei da termodinâmica.

Significativamente Clausius abordou a termodinâmica da época, em sua obra *uber die bewegende kraft der wärme*, com uma teoria cinética, discriminando três tipos de calor: O calor específico, calor latente, já descritos na obra de Joseph Black [15], e o calor sensível. Para ele a razão entre as duas grandezas *verbrauchte wärme e erzeugte arbeit* (em uma tradução livre o calor consumido e o trabalho gerado respectivamente) haveria de ser uma constante, o equivalente mecânico.

identificando a grandeza *erzeugte arbeit* com a grandeza já determinada por Clapeyron *quantité d'action* e rejeitando a ideia de que dQ dependeria apenas do volume e pressão, Clausius analisa ciclos de Carnot infinitesimais. Argumentando que para determinadas compressões e expansões, que causam o mesmo decréscimo de temperatura dt , não há calor recebido e nem perdido, ele conclui $\frac{dQ}{dv} \delta v - \frac{dQ}{dt} dt = 0$ a razão de *verbrauchte wärme e erzeugte arbeit* então tomaria a forma [8]:

$$\frac{\left[\frac{d}{dt} \frac{dQ}{dv} - \frac{d}{dv} \frac{dQ}{dt} \right]}{R \frac{dt dv}{v}} = A$$

ou

$$\frac{d}{dt} \frac{dQ}{dv} - \frac{d}{dv} \frac{dQ}{dt} = \frac{AR}{v}$$

Assim colocando a igualdade diferencial em uma forma completa Clausius chegou em $dQ = dU + AR \frac{a+t}{v} dv$ e afirmou que U seria uma função arbitrária de t e v , com a sendo a constante presente na lei de Gay-Lusac e Mariote $pv = R(a+t)$. Logo depois de concluir estas fórmulas ele comenta que esta equação não é integrável se não houver outra relação entre v e t o que é devido ao trabalho extremo (*äusseren arbeits*) e unicamente ao último termo da equação, concluindo que este trabalho toma a forma diferencial pdv [8].

Investigando a obra de Clapeyron, Clausius reorganizou seu argumento que dizia que seria impossível o movimento perpétuo (*motum perpetuo*). Organizou-o de modo a nunca negar esta máxima, seu resultado seria "que o calor não passe, por si mesmo, de um corpo frio para um corpo quente" [11]. Este princípio, de certa forma, já é uma forma de enunciar a segunda lei da termodinâmica.

Agora em se tratando do trabalho de 1854: "*Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie*", Clausius investigou as transformações de calor em trabalho e a passagem de calor de um corpo quente à um corpo frio. Denotando por $Qf(t)$ a transformação de trabalho em uma quantidade Q de calor à temperatura t e $QF(t_1, t_2)$ a passagem do calor Q de uma certa temperatura t_1 para t_2 .

Para um processo cíclico as transformações devem ter a mesma magnitude, assim se Q_1 for a quantidade de calor que troca de um corpo à outro então $Q_1F(t_1, t_2) - Qf(t) = 0$. Se for avaliado o ciclo reverso e denotar Q' o calor produzido na temperatura t' tem-se: $Q'f(t') + Q_1F(t_1, t_2) = 0$, Combinando as duas equações chega-se em $Q'f(t') - Qf(t) = 0$. Se houver um $Q' - Q$ calor à temperatura t' produzido por meio de trabalho este será equivalente à Q o calor que foi transferido de uma temperatura t à t' ou seja: $(Q' - Q)f(t') + QF(t, t') = 0$.

Utilizando as duas equações é possível eliminar Q' restando: $F(t, t') = f(t') - f(t)$, então Clausius escolheu representar a transformação $f(t) = \frac{1}{T}$ com $T = T(t)$. Menciona-se que ele mesmo tinha muita convicção de que T seria a temperatura absoluta. Esses resultados levam ao chamado teorema da equivalência de transformações, que de suas muitas interpretações, pode ser dito como: A passagem da quantidade de calor Q , da temperatura t_1 à temperatura t_2 tem o mesmo valor equivalente à uma dupla de transformações, a primeira de calor Q em trabalho à temperatura t_1 e a segunda de trabalho ao calor à temperatura t_2 [11].

Abordando esses resultados de forma que hajam vários reservatórios de calor com as temperaturas t_1, t_2, \dots recebendo as quantidades de calor correspondentes Q_1, Q_2, \dots . A contribuição de todas essas transformações somaria $\sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ em um limite infinitesimal torna-se $\int \frac{dQ}{T}$ integrando sobre todos os reservatórios.

Tais resultados serão discutidos em mais trabalhos de Clausius chegando à seguinte formulação: "a soma algébrica de todas as transformações ocorrendo em um processo cíclico pode ser somente positiva ou, em caso extremo, igual a nada" [11]. O teorema toma a forma $\int \frac{dQ}{T} \geq 0$ e propondo a introdução de uma grandeza chamada desagregação Z com a seguinte relação $AdL = TdZ$ onde L é a soma dos trabalhos externo e interno.

Denotando por dH a quantidade de calor contida em certo corpo e $-dQ$ o calor que é retirado de outro

corpo, em um processo de transferência a seguinte equação é válida $dH + AdL = -dQ$. O interessante é que para corpos de temperaturas uniformes a equação se torna $dQ + dH + TdZ = 0$ assim ela pode ser escrita como $\int \frac{dQ+dH}{T} + \int dZ \geq 0$ para processos irreversíveis. Nesta Perspectiva o teorema toma a forma: "A soma algébrica de todas as transformações ocorridas durante uma mudança qualquer de condição pode ser somente positiva ou, em caso extremo, igual a nada" [11].

Clausius continuou seus estudos em um trabalho publicado em 1865 "*Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie*". Nele é introduzida a quantidade $Y - Y_0 = \int \frac{dH}{T}$ o que nos leva à $\int \frac{dQ}{T} = (Y + Z) - (Y_0 + Z_0)$ introduzindo a função entropia $S = Y + Z$ e $S_0 = Y_0 + Z_0$. A entropia (do grego τροπή transformação) recebe o seu nome do próprio Clausius que revela interesse pela proximidade com o termo energia pela proximidade dos dois. Concluindo Clausius sintetiza o que se conhecia da termodinâmica em duas máximas : "A energia do universo é constante" e "A entropia do universo tende a um máximo".

4 Boltzmann contra demônios

O avanço da teoria dinâmica do calor aproximou a mecânica newtoniana da recém nascida termodinâmica, contudo a teoria do calor acabou-se por constituir uma formulação puramente fenomenológica. As vantagens associadas à fenomenologia da teoria dispensam a necessidade da criação de um modelo físico, sendo assim a termodinâmica realizar-se-á no formalismo estatístico da mecânica para formular tais modelos. Nesta perspectiva é que a comunidade científica da época será fortemente influenciada pelo trabalho de Daniel Bernoulli: *Hydrodynamica*, trabalho esse que não teve destaque em sua publicação (1738), talvez pela relativa preferência à adesão ao modelo do calórico da época.

Os trabalhos na área de teoria cinética dos gases fizeram-se presentes nas obras de John Herapath, James Waterson e August Krönig. O que se estuda hoje, talvez esteja mais próximo da obra de 1857 de Clausius (*Über die Art der Bewegung welche wir Wärme nennen*), onde assumia em uma perspectiva atomista, a interação microscópica dos gases como sendo uma série de colisões elásticas, trabalhando com o que viríamos a chamar física estatística. Pautando-se no conceito de média de velocidades sobre uma distribuição estatística, foi possível definir (ou redefinir) as grandezas temperatura, pressão e energia interna em uma ótica microscópica [15].

O mundo microscópico trouxe consigo uma complicação estrutural na segunda lei da termodinâmica notado principalmente por James Clerk Maxwell. Em sua obra de 1870 *Theory of Heat* (1872 a terceira edição) encontra-se, na secção, "limitação da segunda lei da termodinâmica" (tradução livre) do último capítulo, a seguinte afirmação:

"if we conceive a being whose faculties are so sharpened that he can follow every molecule (...) Now let us suppose that such a vessel is divided into two portions, A and B, by a division in which there is a small hole, and that a being, who can see the individual molecules, opens and closes this hole, so as to allow only the swifter molecules to pass from A to B, and only the slower ones to pass from B to A. He will thus, without expenditure of work, raise the temperature of B and lower that of A, in contradiction to the second law of thermodynamics."[14]

Se nós concebermos um ser de faculdades tão precisas podendo seguir qualquer molécula (...) Supondo

o vaso dividido em duas porções, A e B, por uma divisória com um pequeno buraco, e que o ser, podendo ver as moléculas individualmente, abre e fecha o buraco, de modo a deixar apenas as mais rápidas moléculas irem de A para B e apenas as mais lentas de B para A. Ele irá, sem despesa de trabalho, elevar a temperatura em B e reduzir em A (tradução livre).

Este ser receberá, mais adiante, o nome de Demônio por Lorde Kelvin, e assim nasce o talvez mais famoso *gedankenexperiment* (experimento de pensamento) da física, o Demônio de Maxwell. Apesar de ser bem conhecida, essa não foi a primeira crítica à formulação microscópica da segunda lei da termodinâmica, mais especificamente à visão de Boltzmann da segunda lei.

Em seu primeiro trabalho de relevância: "*Üeber die mechanischen Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der wärmetheorie*" em 1866, Boltzmann objetiva dar à segunda lei da termodinâmica, segundo ele mesmo diz, "uma evidência completamente geral e puramente analítica". Segundo Sílvio R. Dahmen [9] os resultados de Boltzmann neste artigo foram mais modestos do que seus objetivos apresentados, tendo que tratar de casos particulares como gases de movimento molecular periódico.

Trabalhando com interações de sistemas gasosos em uma abordagem atomística, Boltzmann parte de uma generalização do princípio da mínima ação e uma definição de temperatura dada por: $T = A \frac{\int \frac{mc^2}{2} dt}{\int dt} + B$ com c a velocidade das partículas. Atendo-se a uma faceta de seu trabalho, ele define a variação de calor: $\delta Q = \sum \varepsilon$ dividindo em pequenos estados pelos quais o sistema passa assim: $\varepsilon = \frac{\delta m \int_{(s_1)}^{(s_2)} c ds}{t_2 - t_1} = \frac{2\delta \int_{(s_1)}^{(s_2)} mc^2 ds}{t_2 - t_1}$. Com isso calcula-se $\frac{\varepsilon}{T} = 2\delta \ln(\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{mc^2}{2} dt)$.

Argumentando que se tratam de temperaturas mutáveis, Boltzmann desmantela cada sistema em elementos dk isso é $\frac{\delta Q}{T} dk = 2\delta \sum \ln(\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{mc^2}{2} dt)$ somando sobre todas as partículas em dk . Uma integral em k logo resultaria em uma soma em todos os estados, assim Boltzmann conclui que a entropia de Clausius seria uma integração em Q o que resulta em: $2\sum \ln(\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{mc^2}{2} dt) + C$ [6].

Boltzmann fez ainda diversos trabalhos de peso na mecânica estatística, como o seu conhecido trabalho, que complementou os de Maxwell, gerando o que se conhece hoje como a distribuição de Maxwell-Boltzmann. Sobre esse trabalho, entre outras coisas, intenta-se mostrar que a grandeza $E = \int_0^\infty f(x,t) [\ln(\frac{f(x,t)}{\sqrt{x}}) - 1] dx$ nunca pode diminuir, com $f(x,t)$ o número de moléculas por unidade de volume chegando a provar que E seria a entropia de Clausius a menos de uma constante [9].

Destacam-se duas importantes críticas ao trabalho de Boltzmann, são elas as crítica de Loschmidt e Zermelo onde são questionados seus métodos e modelos. Para Loschmidt se fosse considerado um sistema gasoso onde partícula do gás se movimentam gerando entropia, então bastava que essas partículas tivessem suas velocidades invertidas para que o sistema evoluísse para uma situação menos entrópica. Boltzmann argumenta a irrealizabilidade do sistema, devido ao número elevado de partículas que haveriam de ter sua velocidade revertida.

Quanto à crítica de Zermelo, o assistente de Planck, foi evocado o Teorema da recorrência de Poincaré: Um sistema mecânico sob ação de forças conservativas de posições e velocidades limitadas, passará obrigatoriamente em um ponto do espaço de fase tão próximo quanto se queira do ponto no tempo inicial. Boltzmann argumenta que esse teorema não invalida a segunda lei da termodinâmica pois o tempo necessário para isso acontecer seria absurdamente grande, como exemplo, o tempo para um gás de centímetros cúbicos de volume retornar ao estado inicial seria muitas ordens de grandezas maior do que a

idade do universo.

1887 é a data da publicação do trabalho: a relação entre a segunda lei da termodinâmica e a teoria da probabilidade, com respeito ao equilíbrio térmico. "*Über die beziehung zwischen dem zweiten Hauptsätze des mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*"

É importante ressaltar que as obras de Boltzmann recorrem à um modelo de energias discretas $0, \varepsilon, 2\varepsilon \dots$ que segundo ele mesmo não é mais do que um recurso matemático, a mesma explicação dada por Planck para sua solução do corpo negro (coincidência?). Usando essa distribuição de energias para determinar o número de maneiras de N partículas assumirem as energias chega-se em $\frac{N!}{N_0!N_1!\dots N_p!}$ onde N_i são o número de partículas que ocupam a energia i .

Chamando $P = \frac{N!}{N_0!N_1!\dots N_p!}$ e argumentando que essa grandeza seria proporcional à probabilidade, ao maximizar $\ln(P)$ Boltzmann percebe que tal grandeza se trata da entropia de Clausius e da grandeza E a menos de uma constante. A famosa relação conhecida como lei de Boltzmann: $S = k_b \ln(\Omega)$ viria a ser posta nesse formato matemático por Plank apenas após a introdução de k_b e seu batismo como Constante de Boltzman pelo próprio Planck.

5 Demônio de Maxwell quântico

Já em 1900, a solução do conhecido problema do corpo negro havia sido publicada. O trabalho rendeu uma série de mudanças na física como se conhecida até então. O resultado de tantas mudanças desembocou no que hoje se conhece por mecânica quântica. Antes da falha em usar um modelo clássico para descrever o corpo negro (que ficou conhecida como catástrofe do ultravioleta) muito se anunciara sobre os fenômenos ainda não descritos pela física encontrarem um fim próximo, pensamento que mudou após a catástrofe.

Fazendo um paralelo com a física conhecida após a mecânica quântica, a presente seção se destina a investigar: como a argumentação de Maxwell, com relação à segunda lei da termodinâmica, mudou. Nota-se que o demônio de Maxwell é um argumento clássico, pois assume a existência de um ser que pudesse distinguir partículas, o que é incompatível com a mecânica quântica. Para que a argumentação de Maxwell seja válida esse ser deve necessariamente pertencer ao limite quântico, chega-se em uma contradição.

Nessa perspectiva, surgem questões a se levantar: se o Demônio de Maxwell é um argumento contraditório, seria a segunda lei da termodinâmica válida uniformemente? Existe algum argumento análogo ao Demônio de Maxwell no mundo quântico que impede a segunda lei da termodinâmica de valer uniformemente? O fato do Demônio de Maxwell ser contraditório não significa nada para a segunda lei? Essas perguntas serão avaliadas à luz dos trabalhos mais recentes em mecânica quântica e termodinâmica.

Já em 1929, Leo Szilard publica seu trabalho intitulado "*Über die Entropieveränderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen*", em tradução livre: Sobre a redução de entropia em um sistema termodinâmico sob a intervenção de seres inteligentes. No trabalho ele estuda as condições que tornem possível a construção de um movimento perpétuo intermediado por seres inteligentes, inspirado na afirmação de Smoluchowski que diz que máquinas de movimento perpétuos

poderiam funcionar se operadas por seres inteligentes.

Em seu trabalho Szlard argumentou que a segunda lei da termodinâmica não haveria de ser violada se fosse atribuída a entropia de $k_b \ln(2)$ para cada medição feita de um observável, tornando-a universal. Após essa proposta para resolver o paradoxo do demônio de Maxwell, Szlard propõe outro paradoxo que futuramente ficaria conhecido como máquina de Szlard. A máquina consiste em um cilindro que contém um gás de uma molécula, logo após um pistão é inserido dividindo desigualmente o cilindro, deixando a molécula de um lado ou de outro, dessa forma o gás entraria em expansão até retomar o volume inicial e iniciar o processo novamente [17].

Foram apresentadas diversas contradições no modelo da máquina de Szlard, mas sem dúvida o mais contundente foi aquele dado por Jauch e Baron. É normal imaginar que um gás de uma molécula clássica obedeceria a lei de Gay-Lusac, mas não se pode afirmar nada sobre o caso quântico, uma vez que ao inserir o pistão o sistema deve passar por uma compressão sem gasto de energia. Também é forte a ideia de que depois de inserir o pistão, quando o gás se expandisse, a posição da partícula dentro do cilindro seria determinada, inserindo $k_b \ln(2)$ de entropia no sistema [18].

Em 1961 é publicado o trabalho de Landauer "Irreversibility and heat generation in computing process", em tradução livre: irreversibilidade e geração de calor em um processo computacional. Neste artigo é abordada a validade da segunda lei da termodinâmica e a proposição feita por Szlard em uma perspectiva de aquisição de dados. Neste trabalho surge o que mais tarde ficaria conhecido como Princípio de Landauer, que reforça a geração de $k_b \ln(2)$ de entropia por BIT (menor unidade de informação) inserido no sistema e impõe a geração de $k_b \ln(2)$ de calor por BIT restaurado do entorno [16].

Não tardou para se afirmar a invalidade dos argumentos de Szlarde e Landauer por serem usados argumentos cíclicos, isso é, a segunda lei da termodinâmica é usada para provar a sua própria validade. Tais críticas acabaram por decaírem em números ao longo dos anos, na medida em que foram se apresentando resultados plausíveis a favor do Princípio de Landauer. Ironicamente máquinas que se propõem a investigar o princípio de Landauer comumente são chamadas de demônios na literatura científica.

Como exemplos de trabalhos que acabam por reafirmar o Princípio de Landauer encontra-se: "*Observing a quantum maxwell demon at work*" [10], "*A quantum-mechanical Maxwell Demon*" [13].

Existe uma analogia para entender o fenômeno do demônio quântico, basta usar um paralelo clássico. Quando se insere um campo magnético em um sistema é precipitado dizer que o momento linear não se conserva pela violação da 3ª lei de Newton. O que ocorre é que existe um momento relativo ao campo que não estava sendo contado e a soma deste acaba por conservar o momento total. O mesmo pode ser aplicado à entropia, assim a informação em forma de BITS faria o papel do momento do campo magnético. Considerando a informação do sistema a entropia se mantém um máximo.

Existem perspectivas de expansão desta área em estudos que buscam explicar os mais diversos fenômenos segundo uma visão termodinâmica. As diversas tentativas de testar o princípio de Landauer revelaram resultados contra intuitivos de que o calor só é gerado quando os BITS de informação são deletados. Indubitavelmente os resultados não são triviais de modo que essa área merece atenção mesmo porque para se aprender mais sobre a viagem no tempo (área de pesquisa das mais ativas, e maior desejo de muitos físicos) é inevitável um concílio com esta lei.

6 Conclusões

Um fato inegável a se ressaltar é que a história da termodinâmica pode ser tratada como tendo iniciado com modelos de máquinas térmicas e coincidentemente ou não as máquinas obrigatoriamente haveriam de encerrar este trabalho. Pensando nisso a termodinâmica atualmente não se encontra independente da realização em modelos de máquinas. Nota-se que as críticas feitas aos trabalhos de Boltzmann continuam muito contundentes os comentários de Boltzmann serviram para explicitar o caráter probabilístico da segunda lei em seu tempo.

A questão enfática é: a segunda lei da termodinâmica não está além de qualquer suspeita. O fato do Demônio de Maxwell ser um argumento contraditório não significa que a segunda lei da termodinâmica seja válida uniformemente, apenas o paradoxo não o é, mas ainda podem existir muitos outros. O interessante é que até agora não existe algum argumento análogo ao Demônio de Maxwell, no mundo quântico, que impeça a segunda lei da termodinâmica de valer uniformemente.

É bem verdade que a última seção do presente trabalho levanta muitas dúvidas e deixa questões abertas sobre o futuro da física. A segunda lei da termodinâmica tem validade uniforme? Existe uma lei mais geral do que a segunda lei que esteja para além de qualquer paradoxo? Apesar de ser um questionamento muito precipitado não se há como ignorar um apontamento insurgente: Seria a mecânica quântica apenas uma consequência da validade uniforme da segunda lei da termodinâmica no limite apropriado?

Ao final do trabalho não se responderam muitas perguntas, ao invés provou-se o pessimismo no campo científico: Observando que o mais próximo do conceito Deus explícito nas teorias, os físicos preferem chamar demônio.

Sobre o demônio de Maxwell quântico, deixo meus agradecimentos à Luíz Roncarati e Israel Siqueira que me fizeram compreender e escrever esse tópico.

7 Referências

- [1] Autor desconhecido. Eolípila. www.moebius-bcn.com. : 03/08/2017.
- [2] Autor desconhecido. máquina de newcomen www.ebah.com.br: 03/08/2017.
- [3] Autor desconhecido. máquina de savery. www.if.ufrgs.br. : 03/08/2017.
- [4] Autor desconhecido. Painel de papin invencoesseculoxix.blogspot.com.br.: 03/08/2017.
- [5] J. M. F. Bassalo. Crônicas da física, volume tomo 6. Belém-Pará, Editora universitária UFPA, 2001.
- [6] Boltzmann. Wien. Ber., 53:195, 1866.
- [7] S. Carnot. Reflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres a développer cette puissance. Paris, chez bachelier, École Polytechnique:38, 1824.
- [8] R. Clausius. über die bewegende kraft der wärme. ostwald's Klassiker der exakten wissenschaften, 99:55, 1850.
- [9] S. R. Dahmen. a obra de boltzmann em física. Revista brasileira de ensino de física, 28:281, 2006.
- [10] N. et al. PNAES, 114:7561–7564, 2017.
- [11] L. R. Evangelista. perspectivas em história da física - da física dos gases à mecânica estatística, volume 2. São Paulo, Livraria da Física, 2015.

- [12]C. C. Laranjeiras. e-Boletim da física, 3:006, 2014.
- [13]S. Lloyd.Phys. Rev., 56:3374, 1996.
- [14]J. K. Maxwell.Theory of heat, volume único. Longmans, Green and C.O.,1872.
- [15]A. M. M. Polito.A construção da estrutura conceitual da física clássica, volume único. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2016.
- [16]R.Landauer. Irreversibility and heat generation in computing process.IBM J. Res. Develop., 5:261–269, 1961.
- [17]L. Szlard. On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of intelligent beings. behavioral science, 9:539, 1964.
- [18]W.H.Zurek. Maxwells demon, Szlards engine and quantum measurement. frontier of non equilibrium statistical physics, 135:150–161, 1984.
- [19]Émile Clapeyron. ,.cahier de l'École polytechnique, XXIII:153, 1834.

Representações da Mecânica de Nambu no Espaço de Hilbert Simplético

CRISTIAN LANDRI * ADEMIR SANTANA †

Programa de Educação Tutorial (PET) e Centro Internacional de Física da
Matéria Condensada, Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil

Abstract

O presente trabalho intenta retomar as ideias de Yochiro Nambu sobre sua generalização da álgebra definida no espaço de fase simplético e investigar as liberdades associadas a uma representação da quantização dessa álgebra (ou n -gebra) segundo o formalismo de Heisenberg.

Palavras-Chave: Nambu, Simplética, Mecânica.

1 Introdução

Inspirado no formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica, Yochiro Nambu propôs em 1973 uma generalização do conceito de espaço de fase, que se acreditava somente poder ser definido em dimensões pares (pois descreve um par de variáveis canônicas, como posição e momento). No caso de Hamilton, a geometria subjacente é caracterizada por uma métrica simplética; e o trabalho de Nambu generaliza essa geometria para quaisquer dimensões (pares e ímpares) [9]. Isso passou a ser conhecido como uma n -gebra [1]. A motivação original de Nambu era estudar uma estrutura algébrica compatível com o confinamento de quarks na matéria hadrônica, que podem aparecer aos pares ou em ternas. Nambu estudou realizações dessa estrutura a partir de simetrias $SU(2)$, em particular para analisar procedimentos de quantização, através do princípio de correspondência de Dirac. Por esses motivos a estrutura de Nambu vem sendo abordada de diversas formas, em particular no contexto das teorias de cordas. Entretanto muitos aspectos demandam novos estudos. A apresentação deste trabalho está organizada da seguinte maneira: Introdução na seção 1, logo após, na seção 2, uma revisão breve da formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica, enfatizando sua estrutura simplética. Na seção 3, introduzimos o conceito de Mecânica de Nambu e uma representação quântica. Na seção 4, apresentamos uma notação da representação para a Mecânica de Nambu, no espaço de Hilbert Simplético. Na seção 5, apresentamos as liberdades associadas ao tripleto das variáveis canônicas, por fim apresentamos as conclusões.

*cristianlandri@gmail.com

†asantana@unb.br

2 Formalismo Hamiltoniano

Recordando o formalismo hamiltoniano, seu principal axioma é o princípio da mínima ação $S = \int p\dot{q} - H(p, q, t)dt$, que pode ser traduzido nas chamadas equações canônicas do movimento ([5] e [8]).

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq}$$

Com H a função Hamiltoniana, dada pela soma das energias potenciais e cinética $H = U + T$, q a coordenada generalizada isto é o conjunto das coordenadas que descrevem o espaço e p o momento generalizado. Assim define-se a estrutura chamada parêntese de Poisson $\{ \ ; \} = \frac{d}{dq} \frac{d}{dp} - \frac{d}{dp} \frac{d}{dq}$, que pode resumir as duas equações anteriores da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}f(q, p, t) = \{f(q, p, t); H\} + \frac{\partial}{\partial t}f(q, p, t)$$

Desse modo é possível criar uma álgebra, que munido com a operação $\{ \ ; \}$, gere o Espaço de Fase sobre o conjunto do produto cartesiano entre posição e momento ($q \times p$, $\{ \ ; \}$). Pelo teorema de Liouville o espaço convencional das coordenadas e o espaço de fase são homomórficos e há de se notar que o espaço de fase é sempre de dimensão par, pois ele é formado por um par de conjuntos de mesma dimensão.

3 Mecânica de Nambu e sua representação quântica

Na tentativa de definir espaços de fase de dimensão ímpar, surgem as medidas feitas por Nambu para empoderar a mecânica nesse sentido. Em seu artigo de 1973, Nambu redefine o conceito de momento e posição generalizada para adotar as variáveis dinâmicas. Em analogia às equações de evolução do sistema, em que uma derivada temporal era relacionada como as derivadas do hamiltoniano, agora definindo um triplete de variáveis dinâmicas (x, y, z) as novas equações de hamilton se tornam:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(y, z)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(z, x)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial(H, G)}{\partial(x, y)}$$

Nessas equações surge a necessidade de uma nova função hamiltoniana, a função G . Dessa maneira os parênteses de Poisson assumem uma nova estrutura. Passariam a se chamar de parênteses de Nambu,

preservando as propriedades necessárias para se construir um produto de Lie [7], são elas: a derivabilidade, a anti simetria e identidade de Jaccobi, que são respectivamente:

$$\{A_1 A_2; B; C\} = A_1 \{A_2; B; C\} + \{A_1; B; C\} A_2$$

$$\{A; B; C\} = -\{B; A; C\} = \{B; C; A\} \quad \text{etc.}$$

$$\{A; B; \{A_1; A_2; A_3\}\} = \{\{A; B; A_1\}; A_2; A_3\} + \{A_1; \{A; B; A_2\}; A_3\} + \{A_1; A_2; \{A; B; A_3\}\}$$

O que leva a equação de Hamilton à:

$$\frac{d}{dt} f(x, y, z) = \langle \nabla f(x, y, z); (\nabla H \times \nabla G) \rangle$$

Nambu chama atenção para o fato de as equações de Euler serem encontradas, com L_x, L_y, L_z como as componentes do momento angular e I_x, I_y, I_z a diagonal do tensor de inércia, se tivermos:

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right)$$

$$H = \frac{1}{2} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)$$

Em seu artigo Nambu propôs relaxar as condições do parêntesis para que fossem geradas representações no espaço de fase da mecânica quântica, e em especial, para que fosse obedecida a relação de Heisenberg: $[X, P] = -\frac{i}{\hbar}$. Assim a quantização das variáveis canônicas (x, y, z) seria de tal forma que aplicando-se a regra de Dirac aos parêntesis de Nambu fosse retomada a relação de Heisenberg. No espaço de fase quântico as variáveis canônicas se tornam (X, Y, Z) satisfazendo: $[X, Y, Z] = -\frac{i}{\hbar}$, sendo este comutador preservando as propriedades relaxadas dos parêntesis de Nambu. A anti simetria e a derivabilidade podem ser vistas de duas formas diferentes, cada uma, no contexto de uma álgebra não comutativa. As combinações possíveis desse par de duas propriedades foi a liberdade a que o Nambu submeteu seus parêntesis, sejam elas:

- Antisimetria:

$$[A, B, C] = -[A, C, B] = [C, A, B]$$

ou

$$[A, A, B] = [A, B, A] = 0$$

- Derivabilidade:

$$[A_1 A_2, B, C] = A_1 [A_2, B, C] + [A_1, B, C] A_2$$

ou

$$[A_1 A_2, B, C] = [A_1, B, C] A_2 + A_1 [A_2, B, C]$$

Combinando-se essas propriedades e na tentativa de satisfazer a identidade de Jaccobi e a nova relação de Heisenberg, Nambu desenvolveu 6 representações possíveis de sua teoria. O presente trabalho se esmerou em redefinir os operadores das variáveis canônicas de uma dessas representações, a saber, a cujos operadores são identificados da seguinte forma: $(X, Y, Z) \alpha (L_x, L_y, L_z)$ os operadores momento angular em cada direção. Nessa representação por questões de normalização, define-se um operador de Casimir dado por: $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ e assim o conjunto dos operadores das variáveis canônicas se torna: $(X, Y, Z) = C^{1/3}(L_1, L_2, L_3)$. Sobre essa representação, deseja-se ressignificar os operadores L_τ na tentativa de vislumbrar mais liberdade da teoria. A quantização do formalismo da mecânica de nambu ainda não é ao todo esclarecida ([2] e [3]), mas amparado pelo teorema de Liouville, é possível valer-se da regra de Dirac para quantização dos parênteses de Nambu. A regra de Dirac afirma que existe a transição entre a mecânica clássica e a mecânica quântica trocando-se a estrutura dos parênteses de Poisson (neste caso os parênteses de Nambu) pelo comutador e as grandezas determinísticas da mecânica clássica pelos operadores probabilísticos quânticos [11]. Para se fazer real a regra de Dirac, é preciso achar quais são esses operadores, que acabam por receber outras representações nesse novo formalismo. A proposta de Nambu foi de assumir os operadores: X, Y e Z com a seguinte relação de quantização $[X; Y; Z] = -i$ [1] desse modo a equação de Heisenberg assume a forma mais próxima ao caso conhecido: $\frac{dF(x,y,z)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[F; H; G]$.

4 Representações simpléticas no espaço de Hilbert

As equações de Hamilton e os parêntesis de poisson clássico podem ser simplificados lançando mão das estruturas e notações simpléticas. Nesta representação são inseridos índices para representar as entidades de uma álgebra vetorial, e o produto de duas quantidades com índices iguais, significam somas, assim as equações se tornam [10]:

$$\{A, B\} = \eta^{\nu\mu} \frac{\partial A}{\partial x^\nu} \frac{\partial B}{\partial x^\mu}; \quad x^\nu = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$\eta^{\mu\nu}$ é uma matriz em que seus elementos podem ser dados pela relação: $\eta^{\mu\nu+n} = \delta^{\mu\nu}$; $\eta^{\mu+n\nu} = -\delta^{\mu\nu}$, com $\eta^{\mu\nu}$ for de dimensão $2n \times 2n$. A equação de evolução do sistema se torna então:

$$\frac{dF(x^\nu)}{dt} = \{F; H\} = \eta^{\nu\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} \frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

Para aprimorar ainda mais a notação, recorrendo à álgebra, pode-se dizer que isso se trata de uma operação entre um espaço e seu dual métrico. Denotando os índices em cima para representar a dualidade com relação aos índices em baixo, simplifica-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \partial_\mu F$$

ou seja:

$$\frac{dF(x^\nu)}{dt} = \eta^{\nu\mu} \partial_\nu F \partial_\mu H$$

Com esta notação é possível dar aos parênteses de Nambu uma estrutura semelhante àquela dada aos parênteses de Poisson. Recordar-se que os parêntesis devem satisfazer as propriedades listadas na secção 3, por isso ele toma a forma:

$$\{A, B, C\} = \varepsilon^{ijk} \partial_i A \partial_j B \partial_k C$$

Com ε^{ijk} o símbolo de Levi civita totalmente antissimétrico. ε^{ijk} para qualquer permutação par da palavra $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ e $\varepsilon^{ijk} = -1$ do contrário. Em mecânica quântica, vetores no espaço de Hilbert representam estados quânticos, mas a evolução do sistema pode ser visto em duas perspectivas. Quando os vetores são parametrizados pelo tempo, dá-se o nome dessa óptica de representação de Schrödiger, mas é possível que os vetores sejam fixos, e os operadores responsáveis pela equação de autovalores variem com o tempo, então essa é a representação de Heisenberg. Adotando-se a representação de Heisenberg, os operadores definidos dentro do espaço de Hilbert podem ser representados como P_i . Valendo-se do segundo postulados da mecânica quântica é possível vislumbrar as equações de evolução dos sistemas clássicos com uma versão quântica como: $\frac{dP_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [P_i, H]$ onde H é o operador hamiltoniano e $[,]$ o comutador. Usando-se essa nova notação, a representação tratada por Nambu na secção anterior revela uma álgebra de Lie com as relações de comutação dadas por: $[L_\nu, L_\mu] = i\varepsilon_{\nu\mu\tau} L_\tau$ com os colchetes representando o comutador tradicional.

5 Investigando liberdades associadas ao triplete de variáveis canônicas

As grandezas momento e posição podem ser vistas como geradoras do momento angular, a saber: $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{q}$ ou na notação exposta acima: $L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$ Em uma representação quântica as grandezas q e p podem ser ressignificadas para os operadores Q e P os quais devem obedecer a relação de Heisenberg [11]. Recordar-se que os operadores posição e momento podem assumir a seguinte representação:

$$Q = q$$

e

$$P = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial q}$$

Porém esses operadores podem ser redefinidos sempre obedecendo a relação de Heisenberg. Uma forma conveniente de defini-los é como:

$$Q = \alpha_1 q + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial p}$$

e

$$P = \beta_1 p + \beta_2 \frac{\partial}{\partial q}$$

Observa-se que esses novos operadores são mais gerais pois preservam o caso conhecido quando: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = -\frac{i}{\hbar}$ e apresentam uma liberdade maior, na medida em que obedecem a

relação de Heisenberg. Recordando-se de tudo o que foi exposto no presente trabalho, deseja-se aliar a representação da mecânica de Nambu supracitada com a redefinição do operador momento angular dado por $L_i = \varepsilon_{ijk} Q_j P_k$ e a dita expansão da liberdade dos operadores acima. Apenas dessa vez a relação de Heisenberg a ser obedecida será a relação de comutação dos operadores L_i que remonta à relação de Heisenberg-Nambu: $[X, Y, Z] = -\frac{i}{\hbar}$. Para gozar de uma liberdade ainda maior podem ser gerados os operadores Quânticos dados por:

$$Q_i = \alpha_{1i} q_i + \alpha_{2i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

e

$$P_i = \beta_{1i} p_i + \beta_{2i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Assim adota-se $\hbar = 1$ e a relação que deve ser obedecida e que auxiliará a criar os vetores é:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[(\varepsilon_{i\mu\nu} Q_\nu P_\mu), (\varepsilon_{j\tau\phi} Q_\tau P_\phi)] = \varepsilon_{k\eta\rho} Q_\eta P_\rho$$

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{i\mu\nu} (\alpha_{1\nu} q_\nu + \alpha_{2\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu}) (\beta_{1\mu} p_\mu + \beta_{2\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}), \varepsilon_{j\tau\phi} (\alpha_{1\tau} q_\tau + \alpha_{2\tau} \frac{\partial}{\partial p_\tau}) (\beta_{1\phi} p_\phi + \beta_{2\phi} \frac{\partial}{\partial q_\phi})] = \\ & = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{k\eta\rho} (\alpha_{1\eta} q_\eta + \alpha_{2\eta} \frac{\partial}{\partial p_\eta}) (\beta_{1\rho} p_\rho + \beta_{2\rho} \frac{\partial}{\partial q_\rho}) \end{aligned}$$

Reunindo termos em comutadores pode-se simplificar a expressão acima unindo os termos de q_τ com $\frac{\partial}{\partial q_\nu}$ e p_ν com $\frac{\partial}{\partial p_\tau}$. Se for investigada a relação de comutação entre q_τ e $\frac{\partial}{\partial q_\nu}$, e também p_ν e $\frac{\partial}{\partial p_\tau}$ pode-se provar que: $[q_\tau, \frac{\partial}{\partial q_\nu}] = -\delta_{\nu\tau}$ e $[p_\nu, \frac{\partial}{\partial p_\tau}] = -\delta_{\nu\tau}$. A equação simplificada que se deve satisfazer, sem perda de generalidade, então é:

$$\begin{aligned} & -M_\mu \varepsilon_{i\nu\mu} \varepsilon_{j\mu\phi} (\alpha_{1\mu} \beta_{1\phi} q_\mu p_\phi + \alpha_{1\mu} \beta_{2\phi} q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\phi} + \alpha_{2\mu} \beta_{1\phi} \frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\phi + \alpha_{2\mu} \beta_{2\phi} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\phi}) = \\ & = i\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{k\eta\rho} (\alpha_{1\eta} \beta_{1\rho} q_\eta p_\rho + \alpha_{1\eta} \beta_{2\rho} q_\eta \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \alpha_{2\eta} \beta_{1\rho} \frac{\partial}{\partial p_\eta} p_\rho + \alpha_{2\eta} \beta_{2\rho} \frac{\partial}{\partial p_\eta} \frac{\partial}{\partial q_\rho}) \end{aligned}$$

Com $M_\mu = (\alpha_{1\mu} \beta_{2\mu} - \beta_{1\mu} \alpha_{2\mu})$.

É possível provar que $\varepsilon_{i\nu\mu} \varepsilon_{j\mu\phi} = -\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{k\eta\rho}$ ([6] e [3]), usa-se apenas algumas propriedades de epsilons e deltas de kronecker. O importante é que esta equação admite muitas soluções, e em especial existe uma solução imediata a ser discutida em conclusões. Para M_μ exclusivamente de natureza covariante, desenvolve-se a equação para os índices de μ , ν e ϕ , chamando $F_{\eta\rho} = \alpha_{1\eta} \beta_{1\rho} q_\eta p_\rho + \alpha_{1\eta} \beta_{2\rho} q_\eta \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \alpha_{2\eta} \beta_{1\rho} \frac{\partial}{\partial p_\eta} p_\rho + \alpha_{2\eta} \beta_{2\rho} \frac{\partial}{\partial p_\eta} \frac{\partial}{\partial q_\rho}$ e sabendo que $\varepsilon_{i\tau\alpha} \varepsilon_{\tau\alpha j} = \delta_{iy} \delta_{jy}$ com $y \neq \tau$, a parte direita da equação será:

$$i(\delta_{i\eta}\delta_{j\rho} - \delta_{i\rho}\delta_{j\eta})F_{\eta\rho}$$

A parte esquerda:

$$(M_3\delta_{i2}\delta_{j2} + M_2\delta_{i3}\delta_{j3})F_{11} - M_3\delta_{i2}\delta_{j1}F_{12} - M_2\delta_{i3}\delta_{j2}F_{13} + (M_1\delta_{i3}\delta_{j3} + M_3\delta_{i1}\delta_{j1})F_{22} - M_3\delta_{i1}\delta_{j2}F_{21} \\ - M_1\delta_{i3}\delta_{j2}F_{23} + (M_1\delta_{i2}\delta_{j2} - M_2\delta_{i1}\delta_{j1})F_{33} - M_2\delta_{i1}\delta_{j3}F_{31} - M_1\delta_{i2}\delta_{j3}F_{32}$$

6 Conclusões

É notável a maior liberdade que essa teoria proporciona em relação ao formalismo tradicional da mecânica quântica, maior ainda se torna a sua utilidade com a generalização proposta dos operadores q e p . É óbvio que tal formalismo só tem utilidade se puder reproduzir o conteúdo físico desenvolvido no último século, isto pode ser evidenciado na medida em que a relação de Heisenberg é preservada, o que se faz verdade devido à equação apresentada para M_μ .

Para evidenciar que a relação de Heisenberg é satisfeita basta notar que M_μ não precisa ter necessariamente um caráter covariante, pois tal característica foi inserida no desenvolvimento para aumentar a liberdade das representações, assim fazer a conversão de $M_\mu \rightarrow M$ não desmerece as equações. Dito isso como os índices η e k estão contraídos a relação mais imediata a se obter é $M = -i$, ou seja existe uma representação mais geral do que aquela de Heisenberg, dada por: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = -i$, pois note que para $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = -i$ essa relação é satisfeita.

Mais do que isso, talvez o resultado mais relevante, é a comparação dos resultados de Isabela Couto et al. [4], os seus parâmetros α e β são definidos de forma diferente, mas fazendo as devidas conversões, percebe-se que esse caso trata-se exatamente do mesmo resultado. as representações dadas por: $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = i, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -i$ e $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_1 = 1, \beta_2 = -\frac{i}{2}$, são aquelas referentes à Torres-Vegas [15] e A. E. Santana et. al. [12] respectivamente.

O caso covariante é de uma complexidade tal que se torna ineficiente expressar todos as suas possibilidades, no entanto um caso particular interessante é quando se igualam os termos que contem $F_{\eta\rho} \forall \eta$ e ρ da esquerda e da direita, desse modo um sistema de 9 equações é formado. Adotando-se $\bar{\sigma} \in S_3$ [14] o conjunto das permutações de 1 a 3 o sistema pode ser denotado:

$$M_{\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{1\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)} + M_{\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}(\tau)} = 0$$

$$M_\tau\delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)} = i(\delta_{i\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}(\tau)} - \delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)})$$

$$M_\tau\delta_{i\bar{\sigma}^{-1}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^{-2}(\tau)} = i(\delta_{i\bar{\sigma}^{-2}(\tau)} - \delta_{i\bar{\sigma}^{-1}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^{-2}(\tau)})$$

Essas igualdades são válidas para qualquer permutação do subconjunto de S_3 dado por $\{\bar{\sigma} \in S_3 / \bar{\sigma} \forall \bar{\sigma}$ t.q. $\bar{\sigma}^{-1} = \bar{\sigma}\}$

7 Referências

- [1] A.E.Santana and R.Muradian. , ;, .
- [2] H. Awata and M. Li. , ;, .
- [3] E. Butkov. Mathematical physics, volume unico. Addison-Wesley, 1973.
- [4] I. Couto and A. Santana.artigo de PIBIC, -:-, 2016.
- [5] N. M. E.C.G. Sudarshan. Classical dynamics, volume unico.Wiley-Interscience, 1974.
- [6] S. Hassani.Mathematical Physics A Modem Introduction to Its Foundations, volume unico. Library of congress, 1999.
- [7] J.-S. Huang.Lectures on Representation Theory, volume unico. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [8] L. D. Landau.Mechanique Classique, volume unico. editions mir, 1966.
- [9] Y. Nambu.Physical Review D, 7:2405, 1973.
- [10] C. G. Oliveira.Journal of Mathematical Physics, 18:120, 1976.
- [11] J. J. Sakurai and J. J. Napolitano.Modern Quantum Mechanics, volume unico. Addison-Wesley, 1994.
- [12] A. Santana and A. R. Filho.Rev. Bras. Ens. Fis., 22:199, 2000.
- [13] S.Codriansky.Revista Mexicana de Fisica, 49:103, 2003.
- [14] W. C. Shculz.Theory and Applications of Grasmann Algebra, volume único. Transgalactic publishing Company, 2011.
- [15] G. Torres-Vega and J. Frederick.J. Chem. Phys., 12:93, 1990.

Caracterização de nanopartículas Fe_3O_4 funcionalizadas com óleo essencial de Croton cajucara Benth como plataforma para aplicações em biomedicina

J. J. ATOCHE-MEDRANO F. H. ARAGÓN J. A. H. COAQUIRA

Núcleo de Física aplicada, Universidade de Brasília, Brasília DF 70910-990, Brasil.

Abstract

Nesse trabalho foi obtido nanopartículas de magnetita usando o método de decomposição térmica, posteriormente foram funcionalizadas com óleo essencial de Croton cajucara Benth, sendo esta espécie conhecida pelas propriedades gastroprotetoras, podendo de essa forma o sistema ser candidato como plataforma para aplicações em biomedicina. Difração de raios-x foi usado para caracterizar o tamanho do cristalito, obtendo-se um tamanho ~ 10.1 nm com elevada cristalinidade sem evidencia de outras fases cristalinas além da magnetita (Fe_3O_4), o ajuste usando refinamento Rietveld evidenciou uma boa concordância com a magnetita. A morfologia e tamanho das nanopartículas funcionalizadas foram realizadas usando microscopia eletrônica de transmissão (MET), os resultados mostraram, forma esférica e tamanho ~ 14 nm com baixa polidispersão ($\sigma \sim 0.3$) para amostra com dupla cobertura orgânica. As medidas da magnetização em função do campo magnético mostrou um comportamento superparamagnético a 300 K para as amostras funcionalizadas. O efeito observado a partir do recobrimento com óleo essencial sobre as nanopartículas mostrou uma diminuição nas interações entre partículas, segundo os resultados ZFC (Zero field cooled) e FC (Field cooled), onde o sistema funcionalizado mostrou uma temperatura de bloqueio menor ($T_b \sim 35K$ quando comparado ao sistema sem óleo essencial ($T_b \sim 215K$). Finalmente foram realizados ensaios para teste de viabilidade celular in vitro usando fibroblastos (NIH/3T3) com linhagem celular, para avaliar o efeito citotóxico do sistema funcionalizado, os resultados mostraram que a partir de um valor menor a 2.5 mg/mL se incrementou a viabilidade celular, o que sugere um valor adequado para realizar outros ensaios complementares para aplicações em biomedicina.

Palavras-Chave: Nanopartículas magnetita, caracterização magnética, ensaio in vitro.

1 Introdução

Atualmente o uso de materiais magnéticos biocompatíveis tem sido de grande interesse pelas diversas potenciais aplicações em biomedicina, como agentes de contraste em imagem por ressonância magnética (IMR) 1, entrega de fármacos em sítios alvo (drug delivery) 2, ou hipertermia magnética 3. Após obter as

nanopartículas existem diversos materiais orgânicos que podem ser usados para recobrir as nanopartículas, como dextran, quitosana ou óleos essenciais [4]. Croton cajucara Benth (CCB) é uma planta da parte norte do Brasil que é comumente usada para tratamento de distúrbios gástricos [5]. Nesse trabalho, foram obtidas nanopartículas de magnetita com reduzido tamanho, para serem usadas como carregador de óleo essencial de CCB visando possível tratamento em biomedicina, usando campo magnético externo para aproveitar as propriedades de superparamagnetismo das nanopartículas funcionalizadas.

2 Materiais e Métodos

Nanopartículas de magnetita foram obtidas usando uma variação da rota por decomposição térmica [6]. O óleo essencial foi obtido a partir das folhas de CCB usando método de hidrodestilação [7]. Foram usadas duas amostras: a primeira amostra foi obtida após finalizar o processo de Síntese chamada M1. Posteriormente foi adicionado sobre uma parte da primeira amostra o óleo essencial para finalmente obter a segunda amostra M2. A caracterização estrutural foi feita usando um difratômetro (Bruker, modelo D8 Advance) com uma fonte Cu $k\alpha$ e ângulo de varredura $20^\circ - 80^\circ (2\theta)$, com velocidade $0.5^\circ/\text{min}$ e passo 0.05° . A caracterização morfológica e tamanho das duas amostras foram realizadas usando MET usando um microscópio JEOL modelo 1011 operando a 80 kV. A partir das imagens obtidas foram contadas ~ 1200 nanopartículas usando o programa ImageJ, na construção dos histogramas foi usado uma distribuição log-normal, considerando uma seleção de classe mediante o método de Sturges [8].

A caracterização magnética das duas amostras foi realizada usando um dispositivo supercondutor de interferência quântica (SQUID) modelo MPMS3. O ensaio de viabilidade celular (MTT) foi realizado para avaliar a citotoxicidade, visando possíveis aplicações biomédicas do sistema funcionalizado. Para isso foi usado uma concentração inicial de 50 mg/mL de amostra M2. O revestimento foi feito numa placa de 96 poços contendo cada poço $100\mu\text{L}$ de meio de cultura e a linha de células de fibroblasto 5x10³ NIH/3T3 incubadas durante 24 horas. Uma diluição em série (10 vezes) foi preparada a partir da concentração inicial para M2, Control-CTRL (solução salina), controle Tween 20 - CTRL TWEEN (usado para auxiliar na diluição do sistema no meio de cultura).

3 Resultados e discussão

Analises estruturais

A figura 1 mostra o espectro de difração de raios-x (DRX) da amostra M1, a partir do espectro foi identificado a fase cristalina da magnetita, a mesma que está em concordância com os dados do JCPDS (card no. 01-088-0315), onde pode ser observado que não existe presença de outra fase cristalina. O padrão de DRX foi refinado usando método de Rietveld, usando a interface GSAS (General Structure Analysis System)

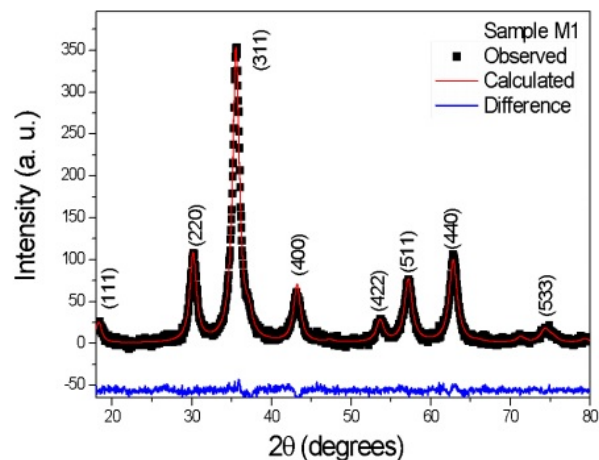


Figure 1: Difratoograma da amostra M1 a temperatura ambiente. Os pontos representam a medida experimental, a linha vermelha continua representa o valor calculado e a linha azul a diferença entre esses valores.

O valor do tamanho do cristalito usando a equação de Debye-Scherrer [9] foi de $\langle D \rangle_{XRD} = 10.1 \pm 0.3$ nm.

Analises morfológicas

Na figura 2 a) e b) é mostrado a micrografia das amostras M1 e M2 junto com as distribuições de tamanho.

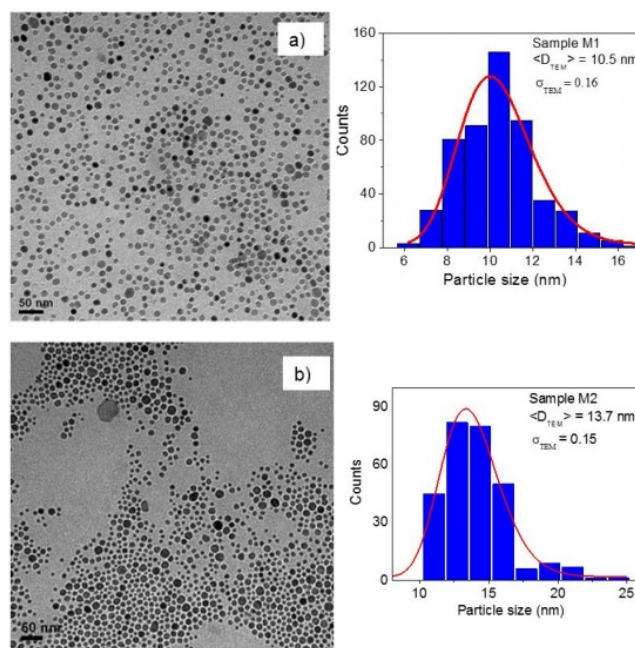


Figure 2: a) Micrografia das nanopartículas de magnetita recobertas com ácido oleico (OA) M1; b) micrografia das nanopartículas recobertas com OA e adicionalmente recobertas com óleo essencial (EO) M2.

Os diâmetros médios obtidos para M1 foi de 10.5 ± 0.1 nm com polidispersão (σ) = 0.16, enquanto

que para a amostra M2 foi de 13.7 ± 0.3 nm, com polidispersão (σ) = 0.15. Esses valores de polidispersão baixos sugerem uma distribuição de tamanho monodispersa, possivelmente relacionada à rota de síntese usada [10]. O incremento do tamanho da amostra M2 seria consequência do recobrimento adicional com o EO. Os valores encontrados para as amostras M1 e M2 evidenciam uma boa concordância com os valores obtidos a partir de DRX, sugerindo ausência da chamada camada morta na superfície cristalina, que é usual quando usado outra rota de sínteses como por exemplo a Co-precipitação química [11].

Propriedades magnéticas

Figura 3 a) e b) apresenta curvas de magnetização em função do campo magnético (curva de histerese), para um rango de ± 70 kOe, para 300 K e 5 K. Nas figuras inseridas é mostrado com maior detalhe as curvas de histereses, a partir dos resultados para ambos casos, um comportamento superparamagnético é evidenciado, o que está em concordância para partículas com valores menores a 30 nm a temperatura ambiente [12].

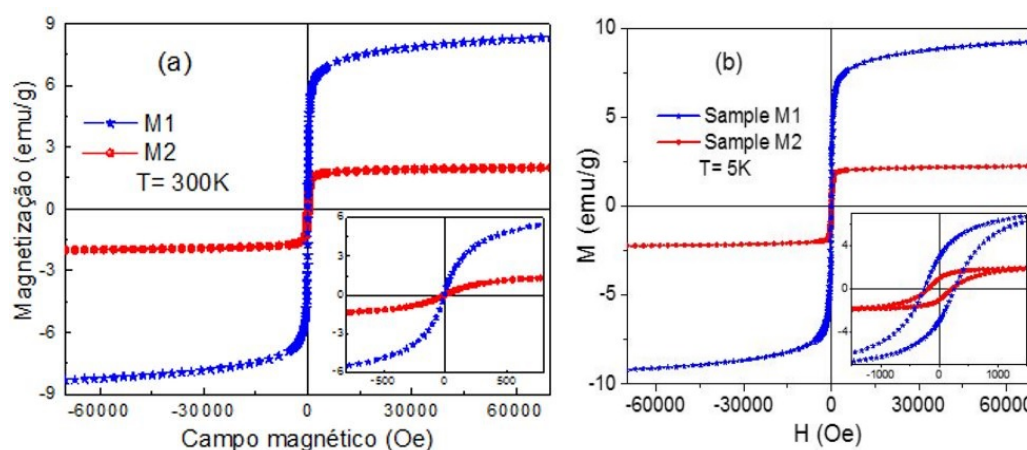


Figure 3: Curvas de histerese a (a) 300 K e (b) 5 K da nanopartículas de magnetita recobertas com AO (M1) e OA com recobrimento adicional de EO (M2).

A Figura 4 mostra as (ZFC) e (FC) das amostras M1 e M2 mostrando uma transição evidente do estado bloqueado para o superparamagnético em torno da temperatura média de bloqueio (T_B), que está relacionada ao ponto máximo da curva ZFC. No entanto, as duas amostras mostram um comportamento de relaxamento térmico bastante diferente do momento magnético, com o máximo da curva ZFC deslizando para baixo de ~ 210 K para ~ 35 K, enquanto foi adicionado EO como segunda camada. Similares resultados referidos à diminuição dos valores de T_B após a funcionalização de nanopartículas com surfactantes orgânicos já foi relatada na literatura [13]. A partir do diâmetro obtido a partir da micrografia para a amostra M2 e a relação para a temperatura de bloqueio $T_B = \frac{K_{EFF}V}{25k_B}$ onde K_{EFF} é a constante de anisotropia efetiva, V é o volume das nanopartículas, e k_B é a constante de Boltzmann, o valor de $T_B \sim 30$ K foi estimado para sistema sem interação, aleatoriamente orientado e forma esférica, que estão em concordância com os valores encontrados para as curvas ZFC associadas à amostra M2. De outro lado a amostra M1 mostrou uma temperatura $T_B \sim 210$ K o que estaria associada com uma forte interação entre as partículas, quando comparadas à amostra M2 (~ 30 K). Além disso, a chamada temperatura irreversível

(T_{IRR}), definida como a temperatura onde as curvas FC e ZFC se juntam enquanto o sistema é aquecido de temperaturas mais baixas a altas, é diferente para as amostras (M1 e M2), passando de quase zero para a amostra M1 até ~ 215 K para a amostra M2. Essas características descritas acima, sugerem que para a amostra M1 as nanopartículas se encontram mais próximas umas de outras, enquanto que para a amostra M2 as partículas se encontram mais afastadas umas das outras devido ao recobrimento adicional. Porém, parece que ocorreu um recobrimento não homogêneo, em vez de homogêneo, das moléculas de OA por moléculas de OE ao realizar o segundo revestimento. Essa hipótese poderia ser sustentada pela mudança de TB em relação ao T_{IRR} observado na amostra M2.

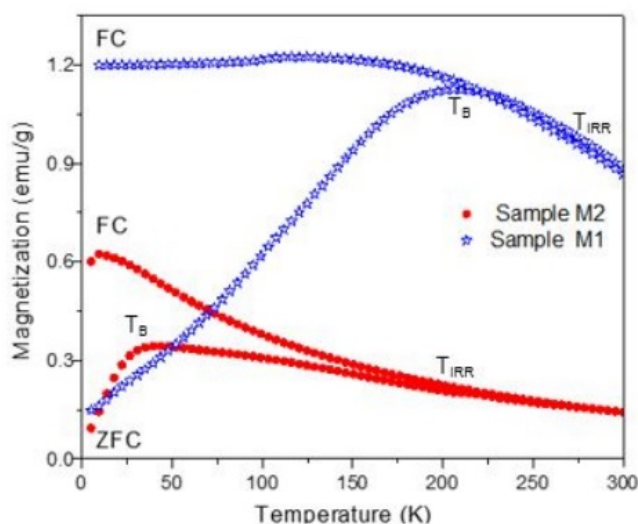


Figure 4: Medidas de magnetização em função da temperatura, ZFC and FC, das amostras M1 e M2. O campo usado durante as a medida foi de 30 Oe.

Viabilidade celular

A figura 5 mostrou que a partir da quinta diluição a viabilidade celular aumentou em relação às primeiras diluições (com maior concentração de nanopartículas), sugerindo que o sistema M2 da concentração de 2.5 mg/mL apresentaria baixa toxicidade em Células NIH/3T3. Outros ensaios in vitro são necessários usando outras concentrações e outras linhas celulares para complementar os resultados do sistema.

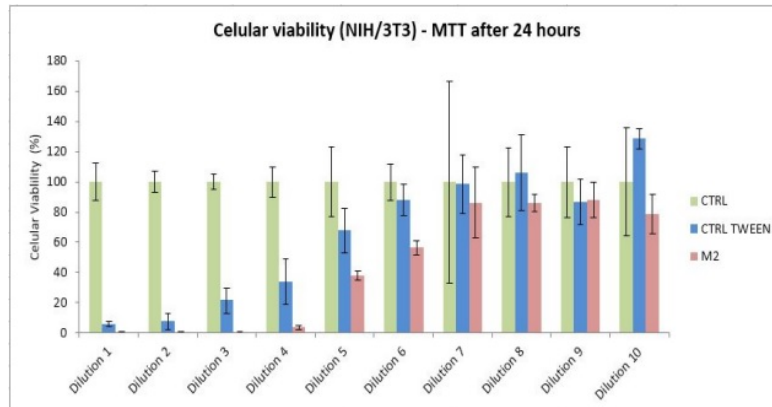


Figure 5: Ensaio MTT para a amostra M2, mostrando aumento da viabilidade celular abaixo da 5ª diluição.

4 Conclusões

Nanopartículas de magnetita monodispersas com diâmetro médio de ~ 10 nm foram sintetizadas com sucesso e revestidas com ácido oleico (amostra M1) e óleo oleico mais óleo essencial (amostra M2). A amostra M1 foi obtida usando uma rota de decomposição térmica, enquanto a amostra M2 foi produzida a partir da amostra M1 tratando esta última com óleo essencial. A análise usando DRX evidenciou a presença da magnetita, usando TEM foi obtido tamanho de 10.5 nm para M1 e 13.7 nm para M2, os valores estão em concordância respeito do tamanho do cristalito obtido por DRX. As medidas magnéticas evidenciaram que foi reduzido assim drasticamente a interação partícula-partícula para a amostra M2, conforme confirmado pelo seu menor valor de temperatura de bloqueio ($T_B = 35$ K) avaliado a partir de uma medida ZFC. Encontramos o valor da T_B experimental da amostra M2 muito próximo do valor estimado a partir da relação clássica $T_B = \frac{K_{eff}V}{25k_B}$ (~ 30 K), que explica as nanopartículas magnéticas que não interagem. Diferentemente, o maior valor de T_B (~ 210 K) que encontramos na amostra M1 sugere uma forte interação partícula-partícula atribuída tanto à magnetização de saturação mais elevada quanto à única camada de revestimento superficial. De fato, nossos resultados revelam uma combinação única de propriedades térmicas e magnéticas da amostra M2, sugerindo sua aplicação em biomedicina a partir do resultado de viabilidade celular (MTT), para o fornecimento de óleo essencial usando magneto-hipertermia.

5 Agradecimentos

À CAPES, pelo apoio financeiro concedido. Ao laboratório de Geofísica da Unb, pelas medidas de DRX. Ao laboratório da Biologia, pelas medidas MET. À Dra. Graziela Joanitti e ao Mg. Henrique Loback, do Instituto da Biologia, pelo apoio na realização do ensaio MTT.

6 Referências bibliográficas

- [1] AMIRI, S.; SHOKROLLAHI, H. The role of cobalt ferrite magnetic nanoparticles in medical science. *Materials Science and Engineering: C*, v. 33, n. 1, p. 1-8, 2013.
- [2] CHOWDHURI, A. R.; BHATTACHARYA, D.; SAHU, S. K. Magnetic nanoscale metal organic frameworks for potential targeted anticancer drug delivery, imaging and as an MRI contrast agent. *Dalton Transactions*, v. 45, n. 7, p. 2963-2973, 2016.
- [3] WABLER, M.; ZHU, W.; HEDAYATI, M.; ATTALURI, A.; ZHOU, H.; MIHALIC, J.; GEYH, A.; DEWEESE, T. L.; IVKOV, R.; ARTEMOV, D. Magnetic resonance imaging contrast of iron oxide nanoparticles developed for hyperthermia is dominated by iron content. *International Journal of Hyperthermia*, v. 30, n. 3, p. 192-200, 2014.
- [4] MIHAI GRUMEZESCU, A. Essential oils and nanotechnology for combating microbial biofilms. *Current Organic Chemistry*, v. 17, n. 2, p. 90-96, 2013.
- [5] HIRUMA-LIMA, C. A.; TOMA, W.; DE SOUZA GRACIOSO, J.; DE ALMEIDA, A. B. A.; BATISTA, L. M.; MAGRI, L.; DE PAULA, A. C. B.; SOARES, F. R.; NUNES, D. S.; BRITO, A. R. M. S. Natural trans-crotonin: The antiulcerogenic effect of another diterpene isolated from the bark of *Croton cajucara* Benth. *Biological and Pharmaceutical Bulletin*, v. 25, n. 4, p. 452-456, 2002.
- [6] SUN, S.; ZENG, H.; ROBINSON, D. B.; RAOUX, S.; RICE, P. M.; WANG, S. X.; LI, G. Monodisperse mfe₂o₄ (m= fe, co, mn) nanoparticles. *Journal of the American Chemical Society*, v. 126, n. 1, p. 273-279, 2004.
- [7] BOUTEKEDJIRET, C.; BENTAHAR, F.; BELABBES, R.; BESSIERE, J. Extraction of rosemary essential oil by steam distillation and hydrodistillation. *Flavour and Fragrance Journal*, v. 18, n. 6, p. 481-484, 2003.
- [8] LIANG, J.; DU, N.; SONG, S.; HOU, W. Magnetic demulsification of diluted crude oil-in-water nanoemulsions using oleic acid-coated magnetite nanoparticles. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, v. 466, p. 197-202, 2015.
- [9] CULLITY, B. *Elements of X-ray Diffraction*. Addison and Wesley Publishing Company Inc. Reading, USA, p. 32-106, 1978.
- [10] PATSULA, V.; MOSKVIN, M.; DUTZ, S.; HORÁK, D. Size-dependent magnetic properties of iron oxide nanoparticles. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, v. 88, p. 24-30, 2016.
- [11] KIM, D. K.; MIKHAYLOVA, M.; ZHANG, Y.; MUHAMMED, M. Protective coating of superparamagnetic iron oxide nanoparticles. *Chemistry of Materials*, v. 15, n. 8, p. 1617-1627, 2003.
- [12] PRADHAN, P.; GIRI, J.; BANERJEE, R.; BELLARE, J.; BAHADUR, D. Preparation and characterization of manganese ferrite-based magnetic liposomes for hyperthermia treatment of cancer. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 311, n. 1, p. 208-215, 2007.
- [13] GUARDIA, P.; BATLLE-BRUGAL, B.; ROCA, A.; IGLESIAS, O.; MORALES, M.; SERNA, C.; LABARTA, A.; BATLLE, X. Surfactant effects in magnetite nanoparticles of controlled size. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, v. 316, n. 2, p. e756-e759, 2007.

REFLEXÕES

OYANARTE PORTILHO*

Instituto de Física - Universidade de Brasília - UnB
Brasília-DF

Abstract

Faz-se um apanhado de algumas argumentações contra e a favor da existência da Divindade e da alma, e discutem-se suas implicações em relação a uma percepção coerente da vida e do Universo do ponto de vista ético-moral. Na opinião do autor, a abordagem teísta com múltiplas vidas oferece uma opção que pode trazer respostas satisfatórias diante de questões intrigantes que vêm sendo levantadas desde alguns milênios.

1 Nota do Editor

O conteúdo do texto a seguir difere daquele que muitos esperariam encontrar em uma revista de Física. Entretanto, a Physicae Organum não é uma revista de Física usual. Ela é uma revista que tem, por missão precípua, o estabelecimento de uma relação próxima com alunos de graduação e pós-graduação dos Departamentos e Institutos de Física brasileiros. Nesse sentido, artigos que possam trazer considerações que permitam reflexões sobre temas que eventualmente sejam caros a este público encontram acolhida nesta Revista. O texto do professor Portilho reflete a posição religiosa dele que pode encontrar eco na posição de muitos de nossos alunos, assim como certamente representará posição diametralmente oposta a de tantos outros - como a que sustenta este editor. A Revista, por sua vez, não possui posicionamento religioso, em sentido editorial. Acreditamos que ambos os grupos terão muito a aproveitar da leitura de uma posição sincera do autor sobre o assunto, não raro anátema em círculos de alunos e professores de Física.

Olavo Leopoldino da Silva Filho
Editor Gerente, Physicae Organum

*email: e-mail: portilho@unb.br

2 Introdução

A noção do divino e do sobrenatural é primitiva e possivelmente acompanha o homem desde o alvorecer da capacidade de raciocinar e de sentir emoções de forma contínua e consistente. Como tal, há quem a considere como algo ultrapassado e, portanto, inapropriado para o homem moderno, que deve, segundo esses, livrar-se de qualquer referência que possa lembrar superstição, magia, o místico ou artigo de fé, que o desloque do palpável e do passível de análise científica, ou que sirva de solução genérica para questões complexas. Entretanto a Ciência parece longe de suprir respostas a todas as perguntas que emergem na mente inquieta e perscrutante, como as clássicas “quem somos?”, “de onde viemos?”, “para onde vamos?”, ou qual seria o sentido da vida, da existência. Segundo a Ciência, o Universo veio do Nada, como uma grande explosão, ocorrida entre 13 e 14 bilhões de anos atrás. Do ponto de vista de uma das leis básicas da Física, a da conservação da massa-energia, não há nada de absurdo nisso. É como escrever a singela identidade algébrica $0 = E + (-E)$. A parcela E positiva representa toda a energia armazenada nas massas das partículas que constituem a matéria universal, adicionada à energia associada aos seus movimentos e aos movimentos das partículas sem massa, enquanto que a parcela negativa $(-E)$ está basicamente ligada à energia que resulta da atração gravitacional entre todas as massas. Acontece que o Universo é algo bastante intrincado. Nem todos os detalhes de sua evolução ainda são compreendidos, como, por exemplo, a razão da imensa assimetria representada pela abundância de matéria em contraposição à escassez de antimatéria. Ou o significado da energia escura e quais são os constituintes da matéria escura. Vale dizer que percebemos o Universo através de uma estreita fresta de 5%. O restante, constituído pela energia escura e pela matéria escura, é de natureza ainda por ser desvendada. Porém o mais intrigante é entender a irrupção da vida a partir da matéria bruta. Vida que se traduz, num primeiro passo, no caso dos organismos unicelulares, em um sistema com ânimo próprio e habilidade de reprodução. Em seguida, aprimora-se a um complexo conjunto de órgãos que atuam de maneira harmônica e coordenada, como indicativo de um planejamento muito criterioso e sábio. Mais tarde, vê-se associada a consciência, vontade, determinação, inteligência, sentimento. Um salto deveras fantástico. Nessa etapa, será lícito considerar o ser simplesmente como uma máquina ultrassofisticada, resultante tão somente de evolução seletiva? Ademais, os processos que fluem no Universo interior do ser inteligente são de enredamento tal que por certo superam os do Universo material. Com a desvantagem de aparentemente não se poder contar com o auxílio da ferramenta matemática na sua abordagem, tão utilizada no estudo do outro. Em resumo, está-se diante de um fato desafiador à aptidão analítica. Do vazio absoluto e de uma singularidade primordial surgiram não só a matéria e a energia como também entes pensantes, capazes de elucubrar sobre si, de explorarem os seus “universos interiores”, e de se extasiarem diante do que os envolve. Isso sugere todo um design inteligente que processos puramente aleatórios, por si só, não parecem capazes de responder.

Outro ponto que se deve considerar diz respeito às bases da ética e da moral. Argumente-se que por certo esses princípios se desenvolveram como forma natural de se estabelecer harmonia e justiça nos relacionamentos da existência em comum. Contudo, a sua aceitação, mesmo em termos muito gerais, por algumas pessoas, não é nada pacífica. Há quem se rebele obstinadamente contra o enquadramento a atitudes de civilidade, das mais simples, de forma alucinada, prejudicando seriamente poucos e muitos. Quando aplicadas sanções previstas na lei, não é rara a produção de nenhum efeito educativo notável; nesses, o que se verifica é a reincidência continuada na maldade. Pergunte-se por que motivo, diante da

intervenção ineficaz da sociedade, tais pessoas deverão se convencer a adotarem uma mudança radical de comportamento e de visão. Se observarmos a progressão dos costumes é evidente que têm se abrandado ao longo de séculos e milênios. Seria impensável que, hoje, a população de uma metrópole pudesse assistir, como diversão, a espetáculos de carnificina numa grande arena. Antes, prevalecia o direito da força, e, no presente, busca-se o direito da razão. Em que perfeitos e sólidos fundamentos se situam os princípios da ética e da moral, capazes de arrastar recalcitrantes para a conciliação com a sociedade? Em outras palavras, que norma regula esse longo e contínuo direcionamento do Mal para o Bem, do bruto para o melhor? Em que poderosas bases se sustenta a “seta do Bem”[1])?

Postas essas questões um tanto enigmáticas, pode-se adotar a posição confortável de aceitação da realidade tal como ela se apresenta e de se dar por satisfeito. Ou, alternativamente, pode-se considerar a existência de um agente, acima do espaço e do tempo, que concebeu tudo o que existe e todas as leis que regem o Universo e a sua evolução, tanto do ponto de vista físico quanto do ético e moral. Uma referência eterna, absoluta, para o Bem, para a Perfeição, para o Amor, para a Justiça e para tudo o mais que se considere como Virtude.

Deus foi e é concebido de diferentes maneiras. Por exemplo, pode ter sido cruel, ciumento e vingativo, cuja ira deveria ser atenuada pelo sacrifício de vidas humanas, de animais, ou por penitências. Mas essas diferenças se devem às limitações da criatura diante do Criador. Tem sido mais fácil imaginá-lo com humanas emoções. Ademais, é de se supor que a criatura finita jamais poderá alcançar o Infinito, embora possa e deva estar sempre buscando dele se aproximar. Portanto, não faz sentido o posicionamento crítico de alguém pela maneira com que o outro contempla e entende a Divindade. O sábio é admitir-se que as visões são todas dignas de respeito, mesmo no caso do paganismo, e que devem ser ponderadas sem preconceitos. À medida que se avança, o entendimento se aperfeiçoa. Com que direito alguém poderá imiscuir-se numa particular relação criatura-Criador?

Por vários motivos, há quem adote posição de inteira descrença e ceticismo em relação à existência de Deus. Alguns, por enxergarem uma ampla contradição entre a suposta justiça e providência divinas e a dura realidade por que regularmente atravessa uma parcela numerosa de pessoas, envolvidas com problemas de saúde e de deficiência física ou mental, desde o nascimento, em condições materiais adversas para si e suas famílias, vitimadas por violência, perseguições e injustiças de diversa ordem, afligidas por acidentes, desastres e revezes, enquanto que uma minoria conta com todas as condições de estabilidade, apoio, conforto e demais facilidades. A questão da presença do Mal¹⁾ e dessas aparentes injustiças é de difícil compreensão se se supor que há apenas uma vida[2]). Mas se se admitir, em primeiro lugar, que existe uma essência imortal, indestrutível, para cada pessoa – a alma; que esta se aperfeiçoa em cada uma de múltiplas experiências associadas a corpos carnis – a reencarnação; que a trajetória evolutiva das almas se regula por regras estritas e precisas que proporcionam um processo pedagógico de longuíssimo prazo, baseado na “ação e reação” (lei do carma) – então o cenário se aclara e se dissolvem as aparentes incoerências e injustiças. Diante de qualquer sofrimento, a rigor, não há inocentes, por maior que seja a magnitude da violência, ressaltados os casos em que voluntariamente se submete ao sacrifício por um bem maior. Colhe-se o que se planta. A colheita pode tardar, mas não falha, adaptada às condições

¹O “problema do mal” foi possivelmente apontado pela primeira vez pelo filósofo grego Epicuro de Samos, entre os séculos III e IV a.C e posteriormente tratado por S. Agostinho e outros.

e necessidades presentes. Trata-se do embate de si para consigo, o por vezes duríssimo caminho para a conciliação e apaziguamento da consciência. Ou de indeléveis lições, para sempre incorporadas ao patrimônio íntimo. Dessa forma, o Mal surge como consequência do uso impróprio do livre arbítrio, de maneira mais ou menos consciente. Contudo, seus inevitáveis reflexos terão sempre caráter educativo para o autor.

Resta examinar a existência da alma ou espírito. Esse conceito é por certo tão antigo quanto o da divindade e, por suas raízes primitivas, também é visto como uma hipótese descartável, sem lugar no pensamento do homem moderno que vive rodeado de Ciência e Razão. Entretanto houve, em todos os tempos e culturas, quem afirme perceber espíritos ou deuses, ser intuído por eles, ser capaz de receber suas comunicações[3]), presságios²⁾ e relatos sobre a “vida após a morte”. Por ser fenômeno de difícil controle, sujeito a fraudes, geralmente não recebe a devida atenção. Porém, alguns pesquisadores sérios afirmam que há vários casos sugestivos de reencarnação[4]). Isso certamente reforçou a iniciativa de alguns terapeutas que desenvolveram a chamada “terapia de regressão”[5]), um avanço para muito além do posicionamento de alguns próceres da Psicologia, que enxergaram na primeira infância, e mesmo da vida intrauterina, a origem de muitos traumas emocionais. Outras ocorrências consideradas como transcendentais, como as experiências de quase morte (EQM), parecem corroborar a tese de que a consciência extrapola-se à morte[6]). De qualquer maneira, a crença em Deus leva de forma coerente à crença na existência da alma. Não se pode deixar de encarar essa possibilidade diante do fenômeno da morte física. Cada qual poderá indubitavelmente certificar-se de sua veracidade, ou não, nesse momento a que ninguém se furta.

Outro motivo para a negação da Divindade se estabelece ao se considerar a fé como uma ferramenta insegura, superada, sem nenhuma validade, por apartada da razão, de se buscar a verdade. Não passaria de uma muleta, usada por ingênuos para cruzar a vida. Contudo, note-se que a fé guarda intimidade com a intuição. E que a razão, em muitos momentos de inflexão histórica, de avanço inovador, não pôde prescindir da intuição, embora esta possa eventualmente se enganar. Por exemplo, quando se defendeu, há mais de 2.000 anos, evidentemente sem nenhum lastro empírico para isto, que a matéria seria constituída de elementos básicos indivisíveis – os átomos³⁾). Portanto, a fé e a razão não se encontram tão distantes uma da outra como muitos podem julgar e tampouco são necessariamente incompatíveis. A fé, quando não balizada pela razão, seria, sim, cega, facilmente levada pelo embalo da fantasia e de serventia questionável. Enquanto que a razão, por si só, não satisfaz aos anseios mais transcendentais que todos alimentam, em maior ou menor grau. Ou seja, o voo é muito mais célere, profícuo e seguro com o recurso das duas asas, da fé e da razão, em ação harmônica, cooperativa – usando-se da conhecida metáfora[7]). A ideia de Deus é o apogeu da fé aliada à razão.

Mais um possível escolho está associado a uma forte repulsa à religião, que tem a fé como principal elemento, ao tomá-la como um emaranhado de crenças e dogmas, atrelada a textos sagrados contraditórios, que em muitos pontos colidem com o conhecimento científico, embora se atribua a eles origem divina. Isso não é de se surpreender, pois foram desenvolvidos numa e para uma sociedade com usos e costumes rudimentares, bem diferentes do moderno, com tecnologia primária e ciência inexistente. Em primeiro lugar, é preciso lembrar que as religiões são movimentos humanos, embora busquem o divino, e, como tal,

²Como é o caso dos oráculos, que tiveram o de Delfos como o mais famoso, e em relação às mitológicas sibilas, retratadas por Michelangelo na Capela Sistina.

³Demócrito (e seu mestre Leucipo), no século IV a.C.

estão sujeitas a imperfeições e a críticas inteiramente cabíveis. Tanto em relação aos que contribuíram para os seus textos basilares, sob alegada inspiração ou não, quanto aos que firmaram ou reviram pontos doutrinários, aos que nelas assumiram posição de autoridade ao longo do tempo, ou que estão na linha de frente como sacerdotes, ministros, monges, pregadores, rabinos, xeiques, clérigos, gurus e assemelhados. Igualmente, causa natural rejeição a atitude fundamentalista, intolerante, de algumas congregações religiosas, o que tem gerado inumeráveis guerras, disputas e violência de toda ordem, em flagrante oposição a um dos princípios fundamentais das religiões, que é de que somos todos irmãos. A interpretação ao pé da letra de certas passagens ou as suas diferentes leituras também causam muita discórdia e distanciamento entre grupos religiosos, entre crentes de um mesmo grupo, e entre crentes e ateus ou agnósticos. Muitos dos últimos consideram, já por esse motivo, que não deveria existir religião. Porém, o fanatismo se manifesta em vários setores da atividade humana, como no político e até no esportivo, pelo comportamento das torcidas desvairadas. A religião, surpreendente e infelizmente, inclui-se nessa lista. Satanizar a religião é o mesmo que satanizar os homens, que a compõem e constroem. Há, sim, que se avançar sobre as causas das contradições humanas, e a religião, compreendida para além da superficialidade, como elo entre a criatura e o Criador, ponte entre o imanente e o transcendente, tem a contribuir de forma decisiva para a construção de uma sociedade verdadeiramente fraterna e solidária. Aliás, esse é um de seus principais eixos. Lamente-se a amplitude da capacidade de alguns desses líderes de distorcer o que possa haver de mais sagrado, e de decidir por desvios os mais tortuosos.

Alguns preferem, por conveniência, não acreditar em Deus, pois a possibilidade de existência de uma justiça absoluta e de terem que se defrontar com consequências de atitudes equivocadas os apavora. A perspectiva da impunidade lhes provê o entorpecente que usam para postergar o inevitável exame de consciência. Outros, declaram-se teístas mas muitos de seus comportamentos em nada refletem essa posição. Deixam-se levar de bom grado pelas paixões, pelo egoísmo, pela falsidade. Recusam-se a ver o outro como seu igual, com mesmos direitos e deveres. Mal sabem a que conduzem as incoerências entre o que a si mesmos declaram crer e prometem procurar seguir, e como de fato pensam e agem. Não há tribunal mais rigoroso que o da consciência. O alívio frente à cobrança que mais tarde se faz só se obtém após o alcance da legítima harmonia entre o que se acredita e o correspondente comportamento, na exata proporção.

Note-se, entretanto, que crer em Deus não implica necessariamente em adotar uma determinada religião. O movimento religioso é importante já que o compartilhamento da fé com outros adeptos só a reforça, desde que se esteja sempre cômico de que as pessoas são todas portadoras de deficiências ético-morais que vão do leve ao gravíssimo. Faz parte da condição humana. Com efeito, a “verdadeira” religião não tem rótulo. Ela é simplesmente aquela que é alimentada no interior de cada um, perante a consciência, a qual reflete a presença de Deus no íntimo do crente. É essa relação tão próxima com o Criador o que realmente importa. Enquanto a religião “externa” e seus religiosos podem (ou não) estar maculados por muita hipocrisia e descaminhos. Portanto, a eventual dificuldade de escolha de qual religião abraçar não deve, de forma alguma, obstaculizar a fé.

Enxerga-se no interior do homem e no seio da sociedade uma verdadeira guerra entre o Bem e o Mal. A capacidade discricional, para um lado ou para outro, é corolário do livre arbítrio das pessoas. As más ações e os maus pensamentos são condenados pela Ética, pela Moral, pelas religiões, pelas leis humanas. Enquanto que Deus é tomado como a origem de todo o Bem, vários textos religiosos personalizam o Mal

em um ser ou em seres determinados a desviar os homens do bom caminho, numa verdadeira competição para se apossarem de suas almas⁴). Os que falharem poderiam se tornar presas desses gênios do Mal para sempre, em zonas de perpétuo sofrimento⁵). Entretanto surge aí uma contradição: como poderia Deus, com toda a sua Perfeição e Onisciência, criar tais figuras? Ou, as tendo criado inicialmente para o Bem, como uma verdadeira elite, tenha permitido que algumas se rebelassem e regredissem para o Mal eterno? Isso não faz sentido. Assim, o Mal só pode ser uma alegoria para a ausência temporária do Bem⁶), uma assintonia com o Divino. É como a obscuridade, que se dissolve com a luz. Portanto, deve-se ter em mais alta conta a tarefa da autoiluminação, da busca pelas virtudes, da conscientização de que somos todos irmãos, da completa abstenção a toda forma de violência e preconceito, da higienização dos porões da personalidade. Se se deseja contribuir para a reforma do mundo, cuide-se prioritariamente da renovação de si mesmo. Pela observação das dificuldades do progresso humano, pode-se concluir com segurança que o intervalo de uma vida está longe de ser bastante para que se avance conforme o ideal – o que se constitui em mais um reforço para a tese da reencarnação. A “seta do Bem”, vista coletivamente, é consequência do esforço individual no sentido do engrandecimento espiritual.

Outros esperam manifestações espetaculares para se acreditar em Deus, como se Ele, para demonstrar a sua presença, lhes devesse bradar com voz de trovão: “– Bom dia!”. Contudo, o que de mais intrigante e inspirador poderia haver para se recordar de Deus do que presenciar e viver cotidianamente o nascer ou o pôr do sol, perceber a elegância e o perfume das flores, observar o voo de pássaros e insetos, sentir a brisa suave; do que nos insufla a visão do céu estrelado, os acordes da bela melodia, o gesto de bondade de alguém...

A vida, por vezes, interna-se em trecho acidentado. É-se provado duramente quanto à capacidade de resistir ao descontrole, ao desespero; à tentação das saídas escapistas da bebida, das drogas, do suicídio. Sente-se só, num barquinho, diante de enorme tsunami. Sem a firme convicção de que se trata de distúrbio passageiro, a requerer paciência e tenacidade para ser superado, e a certeza de que um poder maior o regula na precisa extensão das forças, ao mesmo tempo em que vela por todos, a aflição dominaria e beiraria o insuportável. O recurso da oração, considerado por muitos como piegas e sem sentido, predispõe mais eficazmente ao alívio e ao refazimento psíquico. E até mesmo em relação a desequilíbrios somáticos, segundo alguns defendem. É frequente cobrar-se dos céus a resposta que parece não chegar. Entretanto, deve-se questionar se não se porta como criança, que pede a seus pais um caminhão de brinquedos ou um estoque de guloseimas. Rogar a Deus a cura de certa doença ou a imediata cessação de outra dificuldade pode não encontrar eco da forma que se espera. O motivo talvez esteja no papel que esses embaraços deverão desempenhar sobre o engrandecimento da pessoa, em termos de experiência de vida e de revisão de lições de conteúdo cármico. Nada acontece por acaso. Contudo, a resposta certamente virá de outra maneira, por meio de estímulo ao exercício da calma, de fortalecimento da coragem, com consequente

⁴Seria o caso de Lúcifer e sua coorte, como narrado no Velho Testamento por Ezequiel e Isaías, embora haja interpretações diversas para os “anjos decaídos”. Numa delas, tratar-se-ia de metáfora para uma migração espiritual forçada, em massa, de almas que entravavam o progresso moral num certo mundo ou em alguns mundos distantes. Sua paulatina incorporação à carente humanidade terrestre, por outro lado, teria trazido enormes benefícios, pela contribuição decisiva para o avanço civilizatório dos últimos milênios.

⁵Por exemplo, conforme a descrição de Dante Alighieri em “A Divina Comédia”, com as ilustrações marcantes de Gustave Doré, adicionada à contribuição pictórica de Hieronymus Bosch.

⁶Ver nota 2.

renovação da esperança e do otimismo, sob nova perspectiva. Os crentes contam inegavelmente com recursos extras diante de adversidades. Os reencarnacionistas, em particular, dispõem de argumentos adicionais para as superar, advindos do amplo descortino com que contemplam o passado e o presente, e com a certeza com que bem esperam o futuro sem fim. São reforços para não tombarem para a vala da depressão e do pânico, sob o acicate de tragédias, reais ou imaginárias. A fraternidade e a solidariedade são-lhes espontâneas, pois não se deixam levar por preconceitos de qualquer espécie que tanto distanciam as pessoas: de classe social, de etnia, de ideologia, de crença, de gênero.

Aceite-se ou não, gravitamos, todos, para Deus, em trajetória infinita, desde nossa criação espiritual, cuja época não se sabe determinar. Deus é a mais elevada concepção do pensamento, a fonte de inspiração para os sentimentos mais profundos, o porto onde ancora a razão. O amor e a sabedoria divina apresentam-se por toda a parte. Em especial, guarda-se Deus dentro de si e sua presença pode ser sentida, como o mais precioso bem. Nem sempre se respirou neste belo mundo. Nesse sentido, somos todos ET's. E nem sempre se teve consciência de si. Nossas raízes perpassam os minerais e os vegetais. Somos parte de uma humanidade universal e a vida, em múltiplas e inimagináveis formas, floresce por toda parte, assim como a inteligência. O grande objetivo, projeto para a eternidade, é compreender e amar a Deus de forma cada vez mais ampla e próxima, e o mesmo com relação aos semelhantes e à natureza, que é obra, direta ou indireta, de Deus.

Satisfeitas a perfeita justiça e as conveniências de ordem espiritual, escreve-se o amanhã sob o exercício no presente do livre arbítrio. Portanto, não é fortuita uma boa parte dos eventos mais importantes da vida. O mecanismo que materializa o chamado “acaso” é complexo e foge à compreensão. Apesar disso, cada pessoa poderá se recordar de várias situações intrigantes, com indicações de que tenham acontecido “coincidências” inexplicáveis, sincronismos inesperados[8]). Mas é certo que, como tudo, não fogem ao controle da onisciência e providência divinas.

Crer ou não na existência de Deus é uma questão de foro íntimo. Reconhecer-se, em essência, como imortal, também. Estariam os incrédulos em “desvantagem” em relação aos crentes, no caso de estarem enganados? Têm-se deficiências e fraquezas, não importando a posição que se adota em relação à fé. Entretanto, conforme já comentado, há indicações fortes de que os crentes estão municiados de mais diversas razões para suportarem as agruras da vida com estoicismo e, conseqüentemente, de mais recursos para as superar. Todos desejam ser felizes. Para muitos a felicidade parece inalcançável, em função de múltiplos obstáculos com que se deparam e, principalmente, de como estabelecem as condições para se sentirem felizes. Sem a visão mais larga de uma existência sem fim, a vida pode se tornar um suplício de amarguras, pela ausência de perspectivas e, conseqüentemente, de esperança. O período de uma vida é demasiado curto para se atingir a luz da sabedoria e os excelsos prazeres da bem-aventurança. O quanto há para se burilar a personalidade? Para os crentes existem, em síntese, dois objetivos a serem buscados: dedicar-se ao amor a Deus e ao amor aos homens. Que têm como corolário o aprofundamento na ética e na moral, o conhecimento do Bem e sua incorporação à personalidade e às ações. Embora o amor a Deus esteja fora de cogitação para os não crentes, o segundo é perfeitamente cabível e desejável, com o exercício seguro de boas práticas. Tanto quanto para os crentes. E é inegável que ao se buscar sinceramente amar os homens, está-se também amando a Deus. Portanto, os não crentes não são, por necessário, mais propensos a portar deficiência que os crentes. Sendo Deus a fonte de todo o amor, todos os que com amor tratam os homens atuam como verdadeiros agentes do Criador. O que leva a se concluir que o autêntico amor

aos homens conduz naturalmente a Deus, crentes e incrédulos. Por outro lado, os que se declaram crentes e que exploram a boa fé e praticam em nome de Deus toda sorte de impropriedades e ignomínias contra os homens, demonstram ser os verdadeiros incrédulos. Que profundidade tem o poço que cavam para si?

Não se prova a existência de Deus, pelo menos de uma maneira que a todos convença sem contestações. O tema não se encaixa no escopo da Ciência que, portanto, em nada pode auxiliar, embora, ao ler os livros da Natureza, revele paulatinamente suas maravilhas e, por conseguinte, a sabedoria do Criador. Não obstante, apresentam-se argumentos que indicam a sua existência. O que convence o crente é o sentimento de sua presença dentro de si, em sua vida, no universo. O não crente afirma nada sentir e considera a hipótese como inteiramente dispensável e até absurda. Contrapõe argumentos para firmar a sua posição. Porém muitos deles são gerados por equívocos, pela falta de entendimento em vista das diferentes imagens com que cada um concebe e cultua a Divindade, e por dificuldades apenas aparentemente insuperáveis. Como é o caso da questão da providência divina diante das misérias do mundo. Em muitas situações, o certo seria o não crente perguntar-se em que Deus não crê. Pois o conceito que se tem de Deus não é único entre as pessoas e nem deve ser estático. Amplia-se, aperfeiçoa-se e enriquece-se com o passar do tempo. O que é perfeitamente esperado para a criatura de compreensão limitada, diante do Criador Infinito. Como dito, em última instância trata-se de questão de foro íntimo. O tema é de importância crucial na vida, pelos reflexos que certamente ocasionam na maneira de encará-la, de pensar e de agir e, por isso, não pode ser ignorado. Com a mesma prioridade deve ser tratada a questão da existência da alma e da imortalidade.

Há que se considerar, entretanto, que um Universo sem Deus, e sem a alma, terá uma existência um tanto inglória. Surgido, pelo que se sabe, materialmente do Nada, foi possível por um processo inteiramente incompreensível a transição da matéria bruta à Consciência e à Inteligência. Independentemente de possíveis cenários para o futuro distante (Big Rip – expansão rápida do Universo, a um ponto suficiente para separar as partículas do átomo; Big Freeze – expansão com “apagão” das estrelas e conseqüente resfriamento geral em direção a zero kelvin; Big Crunch – contração a uma singularidade, isto é, um Big Bang às avessas), não se espera que a vida, como a conhecemos, possa continuar viável em qualquer parte do Universo e, conseqüentemente, o mesmo para a Consciência e para a Inteligência. Nenhum de seus traços restará. Debalde procurar, portanto, pelo sentido da existência, ou saber de onde viemos e para onde vamos. Menos significativo se torna apreciar a Beleza. Todos os princípios basilares como de Amor, Justiça, Ética e Moral tornam-se intrinsecamente efêmeros, e alguém que detenha a força e o poder considerará eventualmente possível tomá-los como maleáveis, ao gosto de seus interesses momentâneos e caprichos. Desse modo, perde-se amplamente o caráter essencial dos parâmetros – para alguns, não haveria por que impor conseqüências para quem os ofenda, entronando-se a impunidade. E nem obrigação alguma, para os últimos, de responderem perante si mesmos. Sem Deus não há, a rigor, princípios absolutos.

Em contraste, tem-se que a marcha é interminável. Os horizontes, amplos, ilimitados. Multidões incontáveis à frente, multidões incontáveis à retaguarda. Não importa a posição em que se encontra. Importa avançar, nunca estacionar. Em essência não se perece jamais, a imortalidade é inestimável herança. O Universo é muito mais do que no presente consegue-se vislumbrar. Quantas maravilhas ainda conserva, para deleitosamente surpreender? Se há uma fatalidade, é a que todos, numa só irmandade, abraçarão a Luz. Ela a todos aguarda, paciente.

3 AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Prof. Olavo Leopoldino da Silva Filho e a Ismael Pimenta Portilho, por comentários críticos que ajudaram a enriquecer o texto, e ao Dr. Adison Lengruber do Amaral pelo incentivo permanente para que eu escreva.

References

- [1] Carl R. Rogers, “Tornar-se Pessoa” (Martins Fontes, 1976). O psicoterapeuta da nova “abordagem centrada na pessoa” reconheceu a presença do “sentido positivo” na psique humana: “(...) a lição é simplesmente esta: a experiência mostrou-me que as pessoas têm, fundamentalmente, uma orientação positiva” (p. 38).
- [2] Carlo Filice, “The Moral Case of Reincarnation”, *Religious Studies* 42, 45–61 (2006) (Cambridge University Press). O autor confronta os esquemas deístas de “vida única” e de “vidas múltiplas”, com respeito a questões tais como o problema do mal e a aparente injustiça cósmica.
- [3] Carl R. Rogers, “Um Jeito de Ser” (Editora Pedagógica e Universitária-EPU, 1983). O psicoterapeuta atualizou, a um certo momento, a edição dessa obra, para rever suas concepções até então ali expressas sobre a morte e a continuação do espírito, em função de experiências por quais ele e sua esposa passaram em 1979 com um suposto sensitivo (p. 30).
- [4] Ian Stevenson, “20 Casos Sugestivos de Reencarnação” (Difusora Cultural, 1970).
- [5] Raymond Moody, “Coming Back: a Psychiatrist Explores Past-Life Journeys” (Bantam Books, 1991); Winifred Blake Lucas (ed.), “Regression Therapy: a Handbook for Professionals” (Deep Forest Press, 1993).
- [6] Eben Alexander III, “Uma Prova do Céu – a Jornada de um Neurocirurgião à Vida Após a Morte” (Sextante, 2013).
- [7] João Paulo II, Encíclica *Fides et Ratio*: “A fé e a razão constituem como que as duas asas pelas quais o espírito humano se eleva à contemplação da verdade”.
- [8] Pierre Weil, “Lágrimas de Compaixão – e a Revolução Silenciosa Continua!” (Editora Pensamento, 1999). Um dos nomes da “Psicologia Transpessoal”, o autor relata, entre outras coisas, sua transferência para o Brasil, a criação da UNIPAZ em Brasília-DF, e alguns exemplos desses “sincronismos” em sua vida.

Nanopartículas Magnéticas: Simulações de Curvas de Magnetização em Função do Campo para o Regime Superparamagnético

(MAGNETIC NANOPARTICLES: SIMULATIONS OF MAGNETIZATION CURVES AS A FUNCTION OF THE FIELD FOR THE SUPERPARAMAGNETIC REGIME)

GUILHERME MOISÉS SAMPAIO*, ANA LÚCIA BRANDL†, JOÃO PAULO B. FALLEIROS‡

Universidade Federal de São Carlos / UFSCar - (Campus Sorocaba), Sorocaba - SP, Brasil.

Resumo

A compreensão dos fenômenos ligados ao magnetismo permitiu avanços nos mais variados campos do conhecimento e diversas aplicações modernas que hoje fazem parte do nosso cotidiano. Especificamente, as nanopartículas (NPs) magnéticas têm despertado um grande interesse por parte dos pesquisadores nas últimas décadas. Esta curiosidade devido às suas propriedades diferenciadas é decorrente de suas dimensões reduzidas e de interações de superfície. Um dos principais fenômenos físicos que surgem ao se reduzir o tamanho de partículas magnéticas é o chamado superparamagnetismo. Neste artigo são apresentados os resultados e a análise das medidas das curvas de magnetização em função do campo magnético externo aplicado $M(H)$, assim como uma descrição e entendimento do formalismo matemático ligado ao fenômeno magnético em nanoescala por meio da aplicação do modelo proposto por Langevin à NPs magnéticas em regime superparamagnético não-interagente. Neste sentido, utilizamos de simulações teóricas de curvas de magnetização em função do campo aplicado a fim de estudar alguns parâmetros e verificar a sua compatibilidade com dados de caracterização magnética obtidos para amostras de NPs de magnetita. Desta forma,

*Graduado em Física. Mestre em Ciência dos Materiais pela Universidade Federal de São Carlos / UFSCar - (Campus Sorocaba). Atua como Professor de Física. E-mail: [guilherme.dydx@gmail.com].

†Professora do Departamento de Física, Química e Matemática - (DFQM) da Universidade Federal de São Carlos / (UFSCar - Campus Sorocaba). Doutora em Física pela Unicamp. Atualmente, trabalha com pesquisa na área de Magnetismo e Propriedades Magnéticas de Sistemas Nanoestruturados. E-mail: [albrandl@ufscar.br].

‡Graduado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de São Carlos / (UFSCar - Campus Sorocaba).

pudemos obter informações relevantes para a análise do comportamento magnético relativo a estes sistemas nanoparticulados.

Palavras-chave: Nanopartículas magnéticas; Superparamagnetismo; Simulações.

Abstract

The comprehension of the phenomena related to magnetism allowed advances in the most varied fields of knowledge and several modern applications that are now part of our daily lives. Specifically, the magnetic nanoparticles (NPs) have attracted a great interest from researchers in recent decades. This curiosity comes from its unique properties due to its reduced dimensions and surface interactions. One of the main physical phenomena that appear when we reduce the size of a magnetic particle is called superparamagnetism. This paper presents the results and analysis of the measurements of magnetization curves as a function of the external applied magnetic field $M(H)$, as well as a description and understanding of the mathematical formalism attached to the magnetic phenomenon at nanoscale through the application of the Langevin's model proposed to magnetic NPs in superparamagnetic and non-interacting regime. In this sense, we use theoretical simulations of magnetization curves as a function of the applied field to study some parameters and verify its compatibility with magnetic characterization data obtained for samples of magnetite NPs. In this way, we could obtain relevant information to the analysis of the magnetic behavior related to these nanoparticulate systems.

Keywords: Magnetic Nanoparticles; Superparamagnetism; Simulations.

1 INTRODUÇÃO

Partículas ferromagnéticas de dimensões nanométricas são fortemente influenciadas pela agitação térmica [1]. Esta agitação térmica que afeta o sistema pode ser descrita como movimentos de agitação que influenciam especialmente objetos nanométricos ou ainda menores, como os átomos e as moléculas. Exemplos destas agitações térmicas podem ser visualizados sem grandes dificuldades em nosso cotidiano como por exemplo, na evaporação de certa quantidade de água quando aquecida até atingir o seu ponto de ebulição.

Quando um material ferromagnético atinge tamanhos nanométricos, os momentos de dipolo magnético de todos os átomos que compõem a nanoestrutura apresentam uma configuração do tipo monodomínio, onde temos todos os momentos magnéticos apontando para uma mesma direção. Dependendo dos tamanhos característicos das nanopartículas (NPs) magnéticas, as flutuações térmicas resultantes da própria temperatura ambiente já tornam-se suficientes para impedir que o vetor momento magnético total (μ_{total}) continue direcionado para uma mesma orientação fixa, fazendo com que haja uma oscilação entre os seus estados de equilíbrio a uma taxa que pode chegar até a 1 trilhão (10) de vezes por segundo! [1].

Com isso, NPs magnéticas que apresentarem uma barreira de energia anisotrópica¹ menor do que a energia térmica do sistema irão sofrer reversões em sua magnetização, a uma taxa temporal que apresenta

¹A influência da anisotropia magnética é descrita essencialmente como sendo a dependência do comportamento de um material magnético com relação à uma orientação cristalográfica, fazendo-o apresentar uma preferência de se magnetizar em uma determinada direção [2].

um tempo característico de oscilação entre estas duas posições estáveis, chamado de tempo de relaxação magnética [3].

Contudo, é sabido que as propriedades dinâmicas das NPs magnéticas acabam estando vinculadas também ao tempo de medida que é aplicado a cada experimento. Este tempo característico de medida pode variar de cerca de (100 s) (para uma medida magnética convencional utilizando-se magnetômetros VSM ou SQUID) até valores de tempo muito pequenos, da ordem de (10^{-8} s) (como em medidas de Espectroscopia Mössbauer) [4].

É apenas com a aplicação de um campo magnético externo de elevada intensidade que se torna possível estabelecer que o vetor momento magnético resultante se orientará para uma determinada direção fixa. Neste sentido, o conjunto de NPs ferromagnéticas passa a apresentar agora um comportamento semelhante ao de um material com características paramagnéticas, com a diferença de que estes nanomateriais passam a exibir valores de momentos magnéticos extremamente altos².

Diz-se portanto, que essas NPs encontram-se em um regime superparamagnético, termo introduzido por Bean e Livingston [5].

2 Relaxação Magnética

Como mencionado anteriormente, o momento de dipolo magnético de uma NP que se encontra em um regime superparamagnético oscila de um estado de equilíbrio para outro se houver energia térmica suficiente. Neste sentido, torna-se conveniente definir o tempo característico destes "saltos" sobre a barreira energética, ou seja, determinar o tempo característico de relaxação magnética destas NPs.

O tempo de relaxação característico destas mudanças de estado entre os dois mínimos de energia pode ser descrito matematicamente por [3]:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{KV}{k_B T}\right), \quad (1)$$

onde temos que (KV) representa a barreira de energia anisotrópica, sendo (K) a constante de anisotropia, (V) o volume da nanopartícula, ($k_B T$) é a energia térmica associada ao sistema, onde (k_B) é a constante de Boltzmann e (T) é a temperatura do sistema. A constante (τ_0) é um valor de ordem de grandeza entre (10^{-9} s) e (10^{-10} s) (determinado empiricamente ou estimado teoricamente) para um caso de anisotropia uniaxial e, onde ($KV \gg k_B T$) [6, 7]. Sendo que o inverso de (τ_0) é a chamada frequência de tentativas de salto pela barreira de anisotropia (f_0), o que denota portanto um valor de magnitude entre (10^9 Hz) e (10^{10} Hz). Esta [Eq. (1)] utilizada para se estimar o tempo característico de relaxação de uma NP, juntamente com os seus pressupostos é conhecida dentro do estudo de nanomagnetismo como modelo de Néel-Brown [8].

Analisando-se a [Eq. (1)], podemos verificar que o tempo de relaxação (τ) de uma NP é proporcional ao seu volume, isto é, NPs com diâmetros maiores exibirão um tempo maior para que o seu momento

²Sabe-se que para materiais paramagnéticos normais, o valor da intensidade do momento magnético é de apenas alguns poucos magnetons de Böhr, enquanto que, para uma partícula de ferro (Fe) com uma geometria esférica de por exemplo, (50 nm de diâmetro), a intensidade do momento magnético é de aproximadamente ($12000 \mu_B$) [4].

de dipolo magnético possa sofrer uma reversão em seu sentido, evidenciando desta forma o seu perfil exponencial.

Contudo, também é possível observarmos que o tempo de relaxação está ligado à temperatura do sistema, ou seja, quanto maior for a temperatura (mais energia térmica associada ao sistema), mais rápido se dará a reversão no sentido do momento de dipolo magnético de uma NP.

É importante acentuarmos que o comportamento superparamagnético destes sistemas (a uma determinada temperatura) acaba dependendo também de um outro parâmetro, como apontamos brevemente na introdução, que vem a ser a escala de tempo necessária para se efetuar a medida magnética em questão (t_m).

Neste sentido, se tivermos um tempo de relaxação magnética associado aos momentos de dipolo que seja muito pequeno quando comparado ao tempo necessário para se realizar a medida ($\tau \ll t_m$), então, dizemos que a NP encontra-se no estado superparamagnético, visto que, no decorrer da medida, os momentos magnéticos irão sofrer várias reversões em seus estados de equilíbrio, resultando desta forma, em uma medida de magnetização remanente (M_R)³ que será nula.

Caso contrário, se tivermos um tempo de relaxação magnética muito maior do que o tempo de medida ($\tau \gg t_m$), os momentos de dipolo magnético das NPs não irão conseguir "saltar" a barreira de energia anisotrópica no transcorrer do tempo de medida, logo, podemos afirmar que esta NP encontra-se em um regime de bloqueio ou bloqueada [10].

Igualando-se o tempo característico de relaxação magnética ao tempo necessário para se realizar a medida ($\tau = t_m$), podemos definir a chamada temperatura de bloqueio (T_B), que vem a ser a temperatura que delimita a transição destes dois regimes magnéticos (superparamagnético e bloqueado) para uma determinada dimensão de NP. Em vista disto, como esta transição entre os dois regimes magnéticos depende do tempo de medida característico, o comportamento superparamagnético é, as vezes, referido como um comportamento magnético extrínseco.

Manipulando-se a [Eq. (1)], é possível definir respectivamente a temperatura de bloqueio (T_B) e o volume crítico ($V_{crít.}$) para uma NP que se encontra no estado superparamagnético, como descrito abaixo:

$$\ln \tau = \ln \tau_0 + \frac{KV}{k_B T}, \quad (2)$$

$$T_B (\ln \tau - \ln \tau_0) = \frac{KV}{k_B}, \quad (3)$$

$$T_B \cdot \ln \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) = \frac{KV}{k_B}. \quad (4)$$

Para uma medida magnética convencional, temos que o tempo de medida é de aproximadamente (100 segundos), substituindo este valor para (τ), podemos escrever:

³A remanência ou magnetização remanente (M_R) pode ser descrita como uma defasagem da magnetização (M) em relação ao campo externo aplicado (H), ou seja, para um campo (H) nulo, existiria ainda uma magnetização (M) residual. Desta forma, a remanência pode ser encarada como sendo o máximo valor de campo que um material é capaz de produzir [9].

$$T_B \ln \left(\frac{10^2}{10^{-9}} \right) = \frac{KV}{k_B}, \quad (5)$$

$$T_B \cdot \ln 10^{11} = \frac{KV}{k_B}, \quad (6)$$

$$T_B \cdot 11 \ln(10) = \frac{KV}{k_B}, \quad (7)$$

$$T_B \cdot 25,33 = \frac{KV}{k_B}, \quad (8)$$

$$T_B \approx \frac{KV}{25k_B}. \quad (9)$$

A partir da [Eq. (9)] podemos definir o volume crítico ($V_{crít.}$) abaixo do qual uma NP encontra-se no estado superparamagnético:

$$V_{crít.}^{spm} \approx \frac{25k_B T}{K}. \quad (10)$$

Percebe-se a partir das equações acima que o volume crítico ($V_{crít.}$) está relacionado à temperatura de bloqueio (T_B) de forma diretamente proporcional. Assim, havendo um aumento nas dimensões da NP, haverá também um aumento em sua respectiva temperatura de bloqueio e vice-versa.

Neste contexto, constata-se que para um determinado tempo de medida um sistema pode manifestar uma resposta de regime bloqueado enquanto que, um simples aumento neste parâmetro (t_m) resultará na observação de um regime superparamagnético. Portanto, as propriedades destes dois regimes magnéticos em nanoescala acabam estando, de certo modo, relacionadas a este critério.

3 FUNÇÃO DE LANGEVIN

Para nosso estudo, consideraremos um sistema de NPs magnéticas monodomínio, idênticas (de mesmo volume e de mesma geometria esférica) e não-interagentes entre si. Adotaremos que tal conjunto magnético esteja em equilíbrio térmico a uma determinada temperatura (T) e na presença de um campo magnético externo (H), sendo que para esta temperatura todas as NPs encontram-se em um estado superparamagnético, ou seja, temos que nesta situação o valor associado a energia térmica do sistema é maior do que o valor associado a barreira de energia anisotrópica.

Consideraremos ainda que todos os momentos de dipolo magnético em cada NP estejam alinhados mesmo durante uma rotação do momento magnético resultante desta NP pela aplicação de um campo magnético externo (rotação coerente, ou em uníssono).

Nestas circunstâncias, considera-se que o momento magnético total da NP comportase como um vetor clássico ($\vec{\mu}$), isto é, assume-se que a NP seja análoga a um átomo com um momento magnético muito intenso ou um "supermomento".

Para as curvas de magnetização características de NPs superparamagnéticas, a parcela da magnetização alinhada pelo campo externo (H) aplicado pode ser descrita pelo formalismo matemático da função de Langevin [11]:

$$L\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) = \coth\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{\mu H}. \quad (11)$$

Desta forma, a magnetização de um sistema contendo (N) nanopartículas por unidade de volume pode ser descrita por:

$$M(H, T) = N\mu L\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right), \quad (12)$$

sendo que a magnetização de saturação pode ser escrita como ($M_s = N\mu$), o que faz com que a magnetização reduzida seja equivalente a própria função de Langevin:

$$\frac{M}{M_s} = L\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right), \quad (13)$$

ou, ainda podemos escrever de forma geral, como utilizado neste artigo que:

$$M = M_s \cdot L\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right). \quad (14)$$

Caso o sistema de NPs esteja de fato em um estado superparamagnético, as medidas de magnetização em função do campo magnético externo aplicado, feitas para algumas temperaturas diferentes, acima da temperatura de bloqueio (T_B) do sistema, já faria com que observássemos o comportamento de (M/M_s) versus (H/T). Neste sentido, a teoria nos aponta que se todas as curvas obtidas convergirem para uma única curva em comum, depois de normalizadas, o conjunto analisado encontra-se de fato em um regime superparamagnético [11].

Contudo, no caso de sistemas nanoparticulados reais, pequenos desvios podem ser observados nesta curva geral, em virtude da existência de uma distribuição de tamanhos resultante dos métodos de síntese química, anisotropia de superfície e efeitos de interações dipolares existentes entre as próprias NPs do sistema [11].

O gráfico da [Figura 1] representa a curva característica da função de Langevin em função do parâmetro (x). É possível observar que a saturação do conjunto magnético ocorre para um valor de (x) muito grande, fato que de acordo com a [Função (11)] demonstra uma correspondência de temperatura muito baixa ou, a aplicação de um campo magnético externo muito intenso, ou ainda, a combinação destas duas condições físicas.

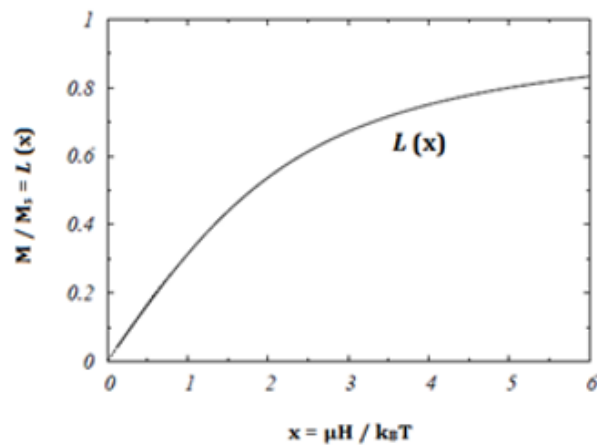


Figura 1: Representação da curva característica da função de Langevin - (Fonte: Ref. [3]).

3.1 Sistemas com Distribuição de Tamanhos

A hipótese de que um sistema de NPs magnéticas seja formado por partículas com características monodomínio é apropriada, uma vez que elas geralmente apresentam diâmetros em uma faixa menor do que os diâmetros máximos necessários para que ocorra esta transição de estados de partículas multidomínios para monodomínios [4].

Entretanto, adotar que um sistema magnético seja constituído por NPs com tamanhos idênticos é geralmente uma consideração pouco real. Apenas um pequeno número de métodos de síntese proporcionam um controle rigoroso nas dimensões das nanoestruturas [12]. Sendo que a grande maioria das técnicas de síntese empregadas acabam resultando em amostras que apresentam uma faixa de distribuição de tamanhos [11].

Nesta perspectiva, um sistema real de NPs apresentará uma distribuição de tamanhos e, conseqüentemente, também uma distribuição de momentos magnéticos (Apêndice A)⁴. Diversos processos de síntese de NPs magnéticas produzem normalmente funções de distribuição do tipo log-normal [13], visto que, os histogramas de tamanhos das NPs provenientes das imagens de Microscopia Eletrônica de Transmissão (MET) podem ser bem ajustados empregando-se este tipo de função.

A [Função (15)] a seguir expressa uma distribuição de momentos magnéticos $f(\mu)$ definida como uma distribuição normal (gaussiana) do logaritmo do argumento (μ) [14,

⁴No (Apêndice A), no fim deste artigo, encontra-se descrito com maiores detalhes a relação de conversão entre variáveis de uma transformação $f(\mu)$ para $f(D)$ a partir do ajuste de curvas magnéticas.

15]:

$$f(\mu) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\mu} \exp \left[-\frac{\ln^2 \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)}{2\sigma^2} \right] \quad (15)$$

Uma função de distribuição do tipo log-normal é uma função assimétrica, como ilustrada pela [Figura 2], definida pelos valores medianos (μ_0) de seus momentos magnéticos e da largura de distribuição (σ) destes momentos. Tanto o valor médio ($\langle \mu \rangle$) dos momentos quanto o valor da moda ($\mu_{m\acute{a}x}$) da curva característica de uma distribuição log-normal podem ser escritos em função do valor mediano (μ_0) e da largura (σ) da distribuição [4]:

$$\text{Valor m\acute{e}dio: } \langle \mu \rangle = \mu_0 \exp \left(\frac{\sigma^2}{2} \right). \quad (16)$$

$$\text{Valor da moda: } \mu_{m\acute{a}x} = \mu_0 \exp \left(-\sigma^2 \right). \quad (17)$$

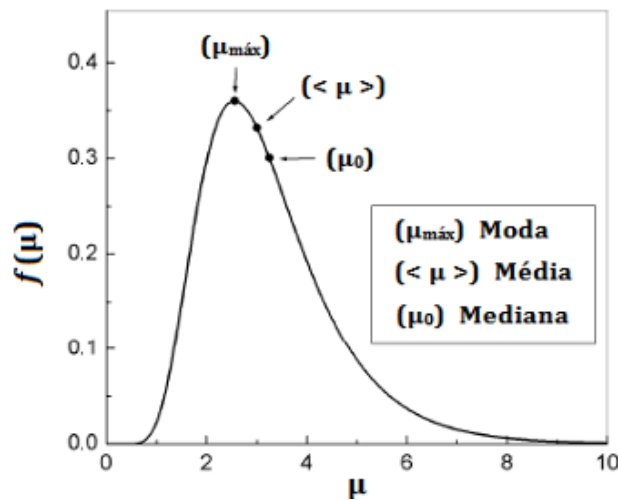


Figura 2: Representação de uma distribuição log-normal dos momentos magnéticos, destacando as diferenças entre os valores da moda ($\mu_{m\acute{a}x}$), média ($\langle \mu \rangle$) e mediana (μ_0) - (Fonte: Adaptada da Ref. [4]).

A magnetização de um sistema de NPs magnéticas (em regime superparamagnético) com uma distribuição de tamanhos pode ser descrita matematicamente fazendo-se a

convolução da [Eq. (12)] com a distribuição de tamanhos mais adequada. Efetuando-se a integração sobre todos os valores de momentos magnéticos (μ) associados ao conjunto, teremos uma expressão mais adequada para descrever o comportamento de um sistema real de NPs [13]:

$$M = N \int_0^{\infty} \mu f(\mu) L\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) d\mu. \quad (18)$$

Para fins de simulações numéricas, pode-se utilizar da seguinte equação [13]:

$$M = N \int_0^{\infty} \mu \left[\coth\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) - \frac{k_B T}{\mu H} \right] \left[\frac{N}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{\ln^2\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)}{2\sigma^2}\right) \right] d\mu. \quad (19)$$

É importante destacarmos, que geralmente a magnetização de saturação (M_s)⁵ associada às NPs magnéticas não apresenta correspondência com a magnetização de saturação dos respectivos materiais em escala macroscópica (materiais massivos ou do tipo bulk). A existência desta desigualdade de valores pode ser explicada pelo fato de as NPs apresentarem em sua superfície uma camada atômica irregular. Neste sentido, quanto menor for a dimensão da NP, mais intenso será este efeito em sua superfície (causando uma maior desorientação cristalina), resultando portanto em um decréscimo de sua magnetização de saturação [17, 18].

De modo específico, para a magnetita (Fe_3O_4) esta diferença é considerável: temos valores que variam entre (30 emu/g) à (60 emu/g), no caso das NPs e, entre (92 emu/g) à (100 emu/g), no caso de materiais do tipo bulk [19].

4 MÉTODO DE CARACTERIZAÇÃO MAGNÉTICA

O processo utilizado para a síntese das NPs magnéticas, via co-precipitação [20] resultou em um ferrofluido contendo NPs de cor castanho escuro dispersas em meio aquoso. As NPs formadas apresentaram forte resposta magnética sob a aplicação de um campo magnético externo. O recobrimento destas NPs com quitosana (polímero natural) com a finalidade de impedir a formação de aglomerados fez com que a coloração da amostra se alterasse para castanho claro, [Figura 3].

⁵Em termos matemáticos, pode-se dizer que a magnetização de saturação (M_s) corresponde ao produto entre o momento magnético resultante de cada átomo e o respectivo número de átomos existentes no material considerado [16].

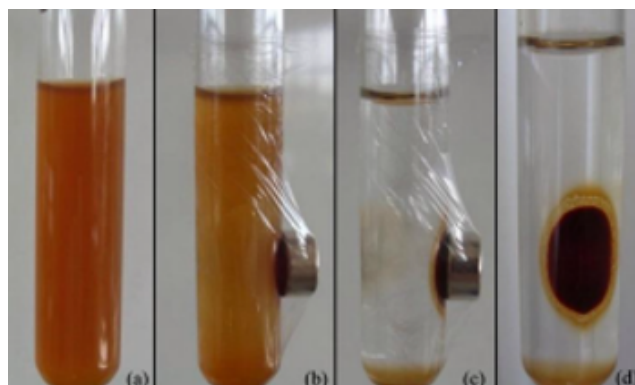


Figura 3: Ferrofluido obtido pelo método de co-precipitação, recobertas com uma camada polimérica de quitosana. (a) Resposta magnética das NPs sob aplicação de um campo magnético externo (b) após 1 minuto, (c) após 10 minutos e (d) após 20 minutos.

Para a análise magnética das NPs sintetizadas foram utilizadas medidas de curvas de magnetização em função do campo magnético externo $M(H)$ sob diferentes temperaturas.

Os magnetômetros empregados e que utilizam o "Superconducting Quantum Interference Device" ou (SQUID) como detectores são atualmente os sistemas mais sensíveis para as medidas de pequenas vibrações de fluxo magnético, da ordem de ($10^{-9} emu$) [21], ideais para sistemas nanoestruturados. O princípio básico de operação do (SQUID) é baseado na quantização do fluxo magnético em um circuito supercondutor fechado. As medidas neste magnetômetro são feitas com campos que variam de (zero) à (5,5 T) e a temperaturas que variam de (2 K) à (400 K).

As medidas isotérmicas de magnetização em função do campo magnético $M(H)$ foram realizadas para as temperaturas de (10 K), (50 K), (100 K) e (300 K), com valores de campo (H) de até (10 kOe), efetuadas no Laboratório de Materiais e Baixas Temperaturas (LMBT) do Instituto de Física "Gleb Wataghin" da UNICAMP.

4.1 Método de Simulação das Curvas $M(H)$

As simulações das curvas de $M(H)$ foram realizadas empregando-se o formalismo matemático da função de Langevin para o superparamagnetismo [Função (11)], e adotando-se condições específicas para o sistema de NPs magnéticas em questão. Reforçamos aqui que para os nossos cálculos, consideramos a presença de um conjunto de

NPs com uma geometria esférica, monodispersas [ou seja, com uma mesma medida de diâmetro (D_0) para todas as NPs], com uma configuração monodomínio e apresentando uma rotação coerente entre todos os seus momentos de dipolo magnético. Além disso, desconsideramos os efeitos de interações dipolares existentes entre as próprias NPs do sistema.

Admitimos também que a barreira energética de anisotropia uniaxial efetiva (E_A) do conjunto poderia ser ultrapassada, uma vez que, a energia térmica (da ordem de $k_B T$) associada ao sistema já seria o suficiente para fazer com que todos os momentos magnéticos conseguissem rotacionar livremente entre os seus eixos de fácil magnetização (neste contexto, temos que $k_B T \gg KV$). Desta forma, consideramos que todas as NPs estavam acima da temperatura de bloqueio do sistema e, portanto, em um regime superparamagnético.

Foram adotadas três temperaturas diferentes para as simulações: (50 K), (100 K) e (300 K), e um campo magnético limite (H) de (12 kOe), um pouco acima do valor utilizado nas curvas dos dados experimentais, que foi de (10 kOe).

Para que conseguíssemos analisar a correspondência das simulações teóricas com os dados experimentais, tivemos que efetuar, primeiramente, a subtração de uma inclinação de componente paramagnética⁶ da curva obtida pelo magnetômetro (SQUID), ou seja, extrair o sinal de contribuição devido a presença da quitosana e/ou impurezas na amostra, a fim de que ficássemos somente com a assinatura magnética das NPs.

O cálculo de retirada desta componente paramagnética ocorreu da seguinte forma:

[i] Pegamos os dados brutos obtidos a partir do magnetômetro, respectivamente para as três temperaturas de (50 K), (100 K) e (300 K) e dividimos os valores desta coluna pela massa total da amostra (magnetização / massa);

[ii] Então removemos a inclinação da reta (sinal paramagnético associado à quitosana e/ou impurezas);

[iii] Calculamos a magnetização de saturação (M_s) média (referente tanto ao campo máximo negativo quanto positivo) e, dividimos a curva gerada por esta magnetização de saturação média [magnetização reduzida (M/M_s)];

⁶O comportamento paramagnético tem a sua origem ligada aos átomos que possuem um número ímpar de elétrons e, consequentemente, desemparelhados em razão de um cancelamento incompleto dos momentos magnéticos de spin e/ou orbital [9].

[iv] A curva resultante deste processo estava coerentemente saturando em torno de (1,0) pois foi normalizada por (M_s).

Com relação aos parâmetros adotados, foram realizadas simulações de $M(H)$ para diferentes valores de diâmetro [geralmente de (5 nm) à (10 nm)] dentro de cada temperatura considerada anteriormente.

Com os valores definidos para representar nosso diâmetro (D_0), calculamos os respectivos volumes (V_0) das NPs (adotando sua geometria como esférica). Com as informações de volume, calculamos suas respectivas massas (m) empregando a equação de densidade, na qual utilizamos a densidade da magnetita com valor igual a ($5,197 \cdot 10^{-9} \text{ g/nm}^3$). Com as informações de massa, investigamos três diferentes valores para a magnetização de saturação (M_s) das NPs: (40 emu/g), (60 emu/g) e (80 emu/g). O cálculo aconteceu sabendo-se que o valor do momento magnético mediano (μ_0) associado à NP é igual ao produto de sua magnetização de saturação pelo valor de sua respectiva massa: ($\mu_0 = M_s \cdot m$).

Com os valores de momentos magnéticos calculados para cada diâmetro pré-determinado foi possível utilizar a função de Langevin empregando-se campos magnéticos (H) que variavam de (- 12 kOe) à (+ 12 kOe) e assim, assinalar a respectiva curva desta função.

Por fim, com a realização destas simulações foi possível comparar as curvas teóricas e analisar a sua correspondência com os dados experimentais, verificando para qual diâmetro simulado (D_0) houve o melhor ajuste com relação a curva real, possibilitando desta forma, realizar uma boa estimativa sobre as dimensões das NPs do sistema.

Todas as simulações das curvas de $M(H)$ demonstradas neste trabalho foram realizadas utilizando-se do conjunto de ferramentas e recursos presentes no *software* OriginPro 8.5.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos para as curvas de $M(H)$ das NPs magnéticas revestidas por quitosana estão expressos pela [Figura 4].

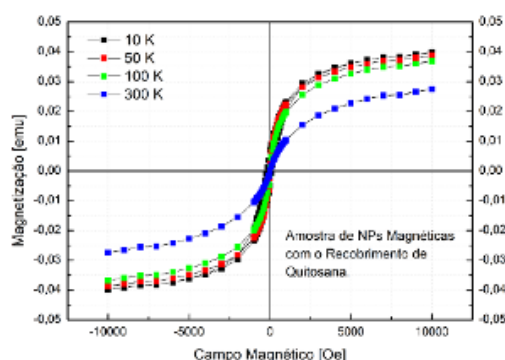


Figura 4: *Curvas de $M(H)$ para a amostra de NPs magnéticas sintetizadas com o recobrimento polimérico de quitosana, sob as temperaturas de (10 K), (50 K), (100 K) e (300 K).*

Para uma melhor visualização dos dados experimentais são apresentados na [Figura 5 (A), (B), (C) e (D)] a seguir as curvas de $M(H)$ isoladamente para as quatro temperaturas indicadas na figura anterior, a fim de que possamos observar com mais clareza a ocorrência dos comportamentos bloqueado e superparamagnético do sistema em suas respectivas temperaturas.

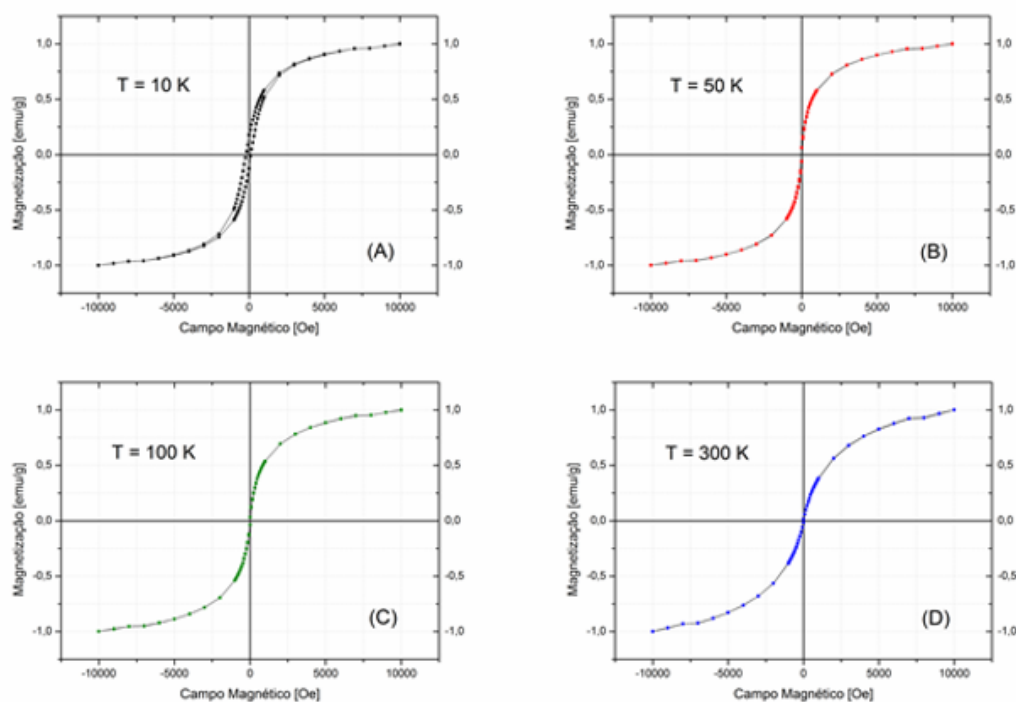


Figura 5: *Curvas de $M(H)$ para a amostra de NPs magnéticas recobertas por quitosana, isoladamente para as temperaturas de: (A) 10 K, (B) 50 K, (C) 100 K e (D) 300 K. Regime bloqueado para (10 K) e regime superparamagnético para (50 K), (100 K) e (300 K).*

Com base na análise das curvas apresentadas na [Figura 5 (A), (B), (C) e (D)] pode-se constatar que as amostras de NPs apresentam um comportamento bloqueado (presença de histerese magnética⁷) à temperatura de (10 K), visto que, a magnetização remanente (M_R) e o campo coercitivo (H_C) mostram-se com valores não nulos a esta temperatura, [Tabela 1].

Temperatura [K]:	(M_R) [emu]:	(M_R) [emu/g]*:	(H_C) [O_e]:	(H_C) [o_e/g]*:
10	$\approx 0,0071$	$\approx 0,78$	$\approx 101,5$	$\approx 11153,8$

Tabela 1: *Valores de magnetização remanente (M_R) e campo coercitivo (H_C) para a amostra de NPs magnéticas recobertas por quitosana, para a respectiva temperatura de (10 K).*

* Massa total da amostra sintetizada igual a ($m = 0,0091g$)

Por outro lado, para as demais isotermas de (50 K), (100 K) e (300 K), observou-se que ($M_R = H_C = 0$), o que implica em um conjunto de NPs em regime superparamagnético (ausência de histerese magnética) a estas temperaturas.

A partir dos dados experimentais obtidos, fizemos o tratamento destas isotermas através de uma sequência de procedimentos como especificado na [Seção (4.1)]. Inicialmente, foi feita a divisão das respectivas colunas de magnetização (M) pela massa total da amostra sintetizada ($m = 0,0091$ g). Em seguida, identificamos as respectivas magnetizações de saturação (M_s), tanto os valores positivos (+ M_s) quanto os valores negativos (- M_s) para as três temperaturas consideradas durante as simulações, sendo possível desta forma calcular uma média aritmética destes valores de (M_s), como apresentado na [Tabela 2] a seguir:

⁷A histerese magnética pode ser descrita como sendo a impossibilidade de um sistema retornar à sua configuração inicial ainda que, o campo externo (H) tenha sido removido por completo. Em outras palavras, a curva não retorna seguindo o seu caminho original, produzindo deste modo, o "laço fechado" característico, (abertura da curva), ao qual denominamos de histerese magnética. Para maiores detalhes, (cf. Ref. [22]).

Temperatura [K]:	$(+M_s)$ [emu/g] :	$(-M_s)$ [emu/g]:	Média Aritmética (M_s) [emu/g]:
50	+ 4,26	- 4,25	4,255
100	+ 4,05	- 4,04	4,045
300	+ 3,01	- 3,01	3,01

Tabela 2: Valores de magnetização de saturação (M_s) (positivos, negativos e médio) para as temperaturas de (50 K), (100 K) e (300 K) referente as NPs. Os valores de (M_s) já estão representados na unidade [emu/g], considerando a massa total da amostra sintetizada igual a ($m = 0,0091$ g)

Com o cálculo destas médias de (M_s) foi possível construir a representação gráfica da magnetização reduzida (M/M_s) para cada uma das temperaturas, como demonstramos anteriormente na [Figura 5 (A), (B), (C) e (D)].

Entretanto, para que pudéssemos confrontar as curvas simuladas com os dados experimentais, devemos inicialmente observar que os gráficos da [Figura 5], para as três temperaturas que se mostram em regime superparamagnético (não iremos trabalhar com a curva da [Figura 5 (A)] nesta parte do artigo) apresentam uma inclinação de componente paramagnética. Desta forma, tivemos que efetuar a subtração desta inclinação como representado pela [Figura 6 (A), (B) e (C)], de modo que as curvas mostram-se saturadas para ($H_{máx.}$).

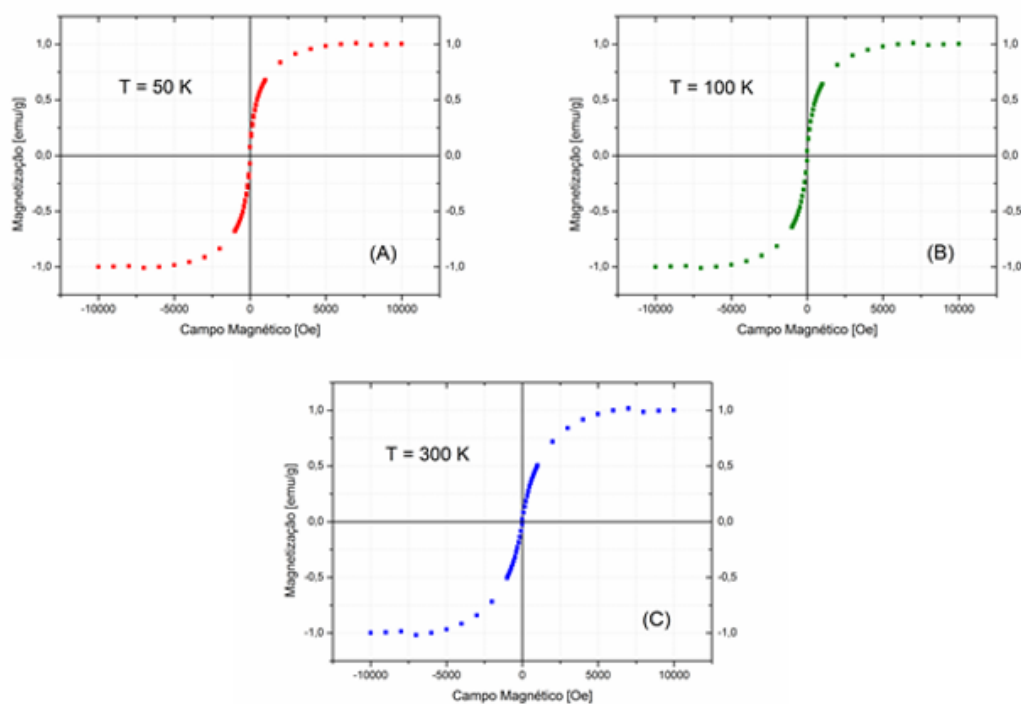


figura 6: *Curvas de $M(H)$ com as respectivas subtrações da componente paramagnética. As curvas estão normalizadas por (M_s) e, dentro de um intervalo de campo de (-12 kOe) à (+12 kOe) para as temperaturas de: (A) 50 K, (B) 100 K e (c) 300 K.*

As curvas agora expressas com a extração do sinal paramagnético mostram-se mais próximas da representação real de um material monodomínio magnético e com um comportamento típico de superparamagnetismo, conforme previsto pelo Modelo de Langevin.

5.1 Simulações para (T = 50 K)

A seguir são apresentadas algumas simulações e comparações das curvas teóricas com as curvas experimentais para a temperatura de (50 K), a fim de que possamos analisar a sua correspondência e verificar para qual diâmetro simulado (D_0) houve o melhor ajuste com relação a curva real (lembrando que estamos considerando um sistema nanoestruturado não-interagente).

As curvas da [Figura 7 (A), (B), (C) e (D)] (em vermelho) representam as simulações com valores de magnetização de saturação iguais a ($M_s = 60$ emu/g). Além disso, para os gráficos experimentais (em preto) estão sendo consideradas as curvas de $M(H)$ que já foram removidas a reta com o sinal paramagnético.

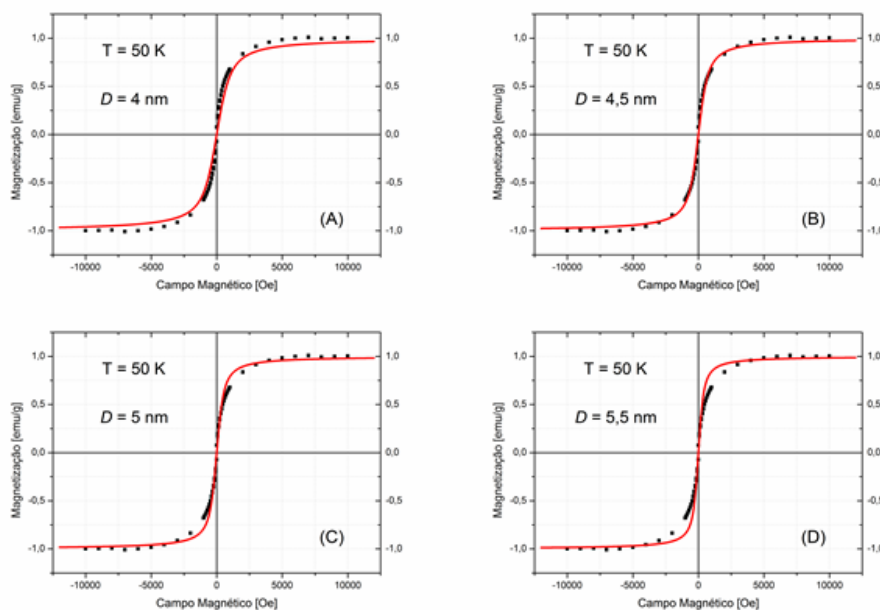


Figura 7: Curvas de $M(H)$ simuladas (em vermelho) para o regime superparamagnético com variações de diâmetros correspondentes a: (A) 4 nm, (B) 4,5 nm, (C) 5 nm e (D) 5,5 nm, sobrepostas às curvas experimentais (em preto) para a respectiva temperatura de (50 K) e magnetização de saturação igual a ($M_s = 60$ emu/g).

A partir dos cálculos realizados podemos ressaltar que o melhor diâmetro simulado foi o de valor igual a ($D_0 = 4,5$ nm), [Figura 7 (B)].

5.2 Simulações para (T = 100 K)

Aplicando-se os mesmos procedimentos com algumas modificações somente relativas a nova temperatura nos parâmetros de cálculo da função de Langevin, a [Figura 8 (A), (B), (C) e (D)] apresenta as melhores simulações gráficas de $M(H)$ agora para a temperatura de (100 K).

As curvas simuladas teoricamente estão representadas em vermelho e as curvas reais em verde; também adotamos para os cálculos valores de magnetização de saturação iguais a ($M_s = 60$ emu/g).

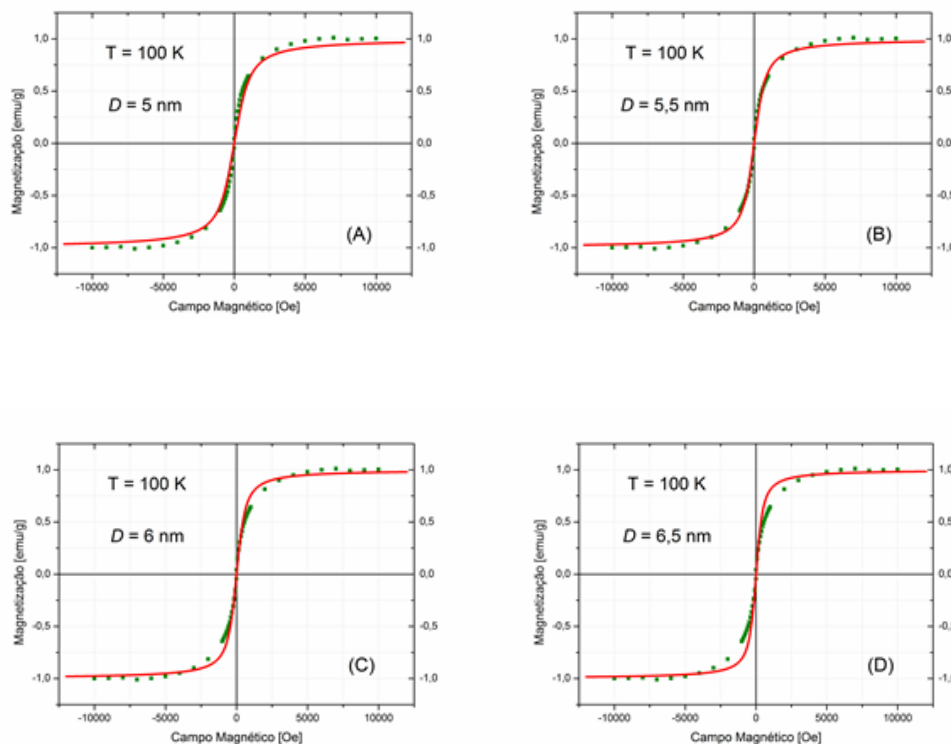


Figura 8: *Curvas de $M(H)$ simuladas (em vermelho) para o regime superparamagnético com variações de diâmetros correspondentes a: (A) 5 nm, (B) 5,5 nm, (C) 6 nm e (D) 6,5 nm, sobrepostas às curvas experimentais (em verde) para a respectiva temperatura de (100 K) e magnetização de saturação igual a ($M_s = 60$ emu/g).*

A partir das representações das curvas simuladas, pode-se verificar que um bom ajuste com relação à curva real ocorreu para um valor de diâmetro igual a ($D_0 = 5,5$ nm), [Figura 8 (B)]. Valores de diâmetro atribuídos às simulações um pouco abaixo como o de (5 nm) na [Figura 8 (A)], ou um pouco acima como os de (6 nm) na [Figura 8 (C)] ou (6,5 nm) na [Figura 8 (D)] fizeram com que suas respectivas curvas apresentassem pequenos desvios com relação ao eixo central da nossa curva experimental.

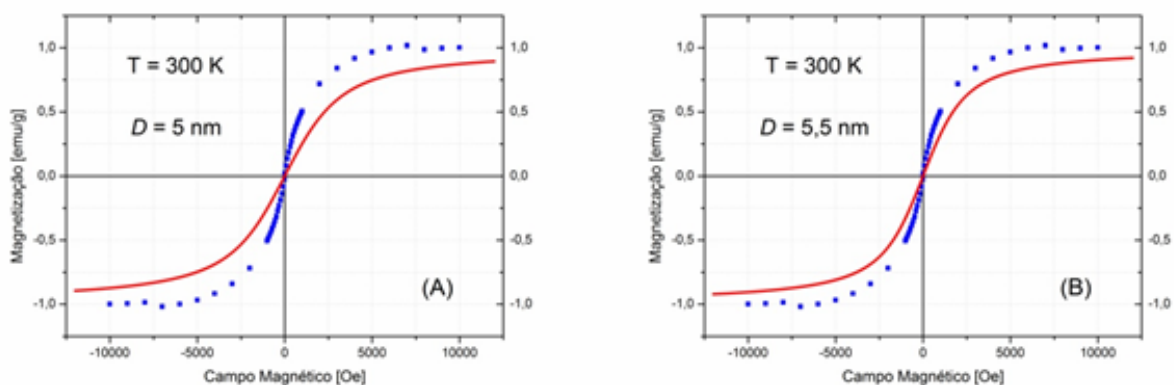
Entretanto, notamos que este valor de (5,5 nm) encontrado como melhor simulação para a isoterma de (100 K) difere do resultado obtido para a curva de temperatura igual a (50 K) do tópico anterior.

5.3 Simulações para ($T = 300$ K)

A seguir na [Figura 9 (A), (B), (C) e (D)] estão representadas as melhores simulações realizadas para a temperatura de (300 K).

Ressaltamos que foram adotados os mesmos procedimentos de simulação das curvas dos itens anteriores, e com os mesmos valores de parâmetros para a função de Langevin.

Neste tópico temos que as curvas simuladas estão representadas em vermelho enquanto que as curvas reais mostram-se na cor azul.



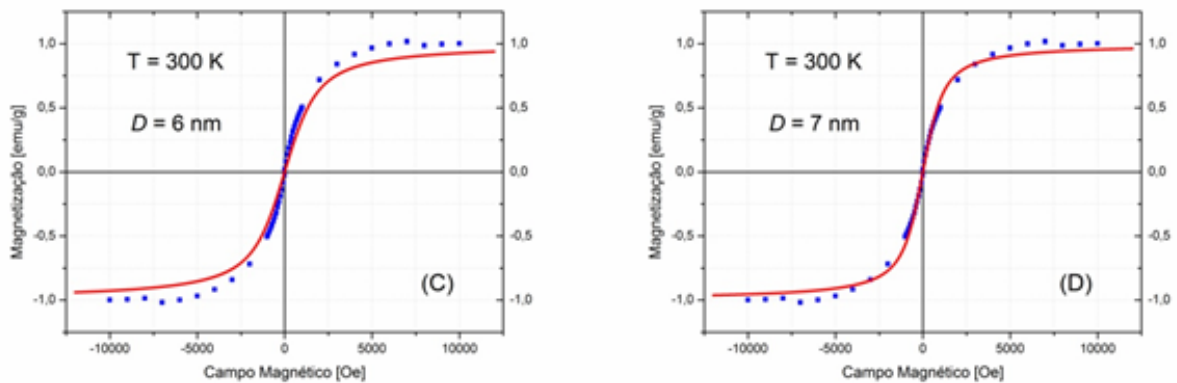


Figura 9: Curvas de $M(H)$ simuladas (em vermelho) para o regime superparamagnético com variações de diâmetros correspondentes a: (A) 5 nm, (B) 5,5 nm, (C) 6 nm e (D) 7 nm, sobrepostas às curvas experimentais (em azul) para a respectiva temperatura de (300 K) e magnetização de saturação igual a ($M_s = 60$ emu/g).

Pela análise das curvas de $M(H)$ simuladas para a temperatura de (300 K), evidencia-se que a melhor simulação para a série de pontos desta curva experimental ocorreu para o valor de diâmetro igual a ($D_0 = 7$ nm), [Figura 9 (D)]. Valor este, que também difere dos resultados obtidos para as curvas anteriores de (50 K) e (100 K).

Estas divergências nos resultados nos levam a seguinte interpretação: como o método de síntese via co-precipitação produz, com frequência, sistemas polidispersos [23] (ou seja, com uma variedade de tamanhos de NPs), como de fato abordamos na [Seção(3.1)], podemos estar observando os efeitos desta dispersão de tamanhos em nossas simulações.

Na prática, diversas variáveis são responsáveis por afetar de modo significativo a homogeneidade, dimensão, natureza e o próprio comportamento magnético das NPs resultantes de um sistema [24].

Dentre estas variáveis, pode-se citar como exemplo a temperatura de reação de síntese, o tempo transcorrido durante a síntese, a velocidade de agitação da amostra, dentre outros fatores [24].

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Com base na preparação do conjunto de dados experimentais, para posteriores simulações, identificamos que as curvas de $M(H)$ para as amostras de NPs magnéticas recobertas por quitosana mostraram-se em regime bloqueado para a temperatura de (10 K), visto que, a curva obtida apresentava o laço característico da histerese magnética, com valores de magnetização remanente e coercividade diferentes de zero. Já, para as demais temperaturas de (50 K), (100 K) e (300 K), verificamos que as curvas de $M(H)$ apresentavam um comportamento superparamagnético típico, uma vez que, demonstravam ausência do ciclo fechado da histerese magnética.

A partir do estudo realizado por meio das simulações, pudemos verificar que as melhores correspondências das curvas teóricas com os dados experimentais ocorreram respectivamente para diâmetros iguais a: [(4,5 nm) para a temperatura de (50 K)], [(5,5 nm) para a temperatura de (100 K)] e [(7 nm) para a temperatura de (300 K)].

A [Tabela 3] expõe de forma resumida a relação dos parâmetros empregados e obtidos através das simulações realizadas.

Temperatura [K]:	Diâmetro [nm]:	(M_s) [emu/g]:	(μ_0) [emu]:
50	4,5	60	$\approx 1,49.10^{-5}$
100	5,5	60	$\approx 2,72.10^{-5}$
300	7	60	$\approx 5,60.10^{-5}$

Tabela 3: Valores de temperatura (T), diâmetro (D_0), magnetização de saturação (M_s) e momentos magnéticos medianos (μ_0) utilizados para as simulações das curvas de $M(H)$.

No entanto, estes três resultados encontrados divergem entre si, o que nos leva a considerar que o nosso método de simulação mostra-se ainda limitado, uma vez que, não leva em consideração uma distribuição de tamanhos, e nem a presença de efeitos de interações dipolares existentes entre as próprias NPs, sendo que tais influências são comuns em sistemas nanomagnéticos reais e acabam sendo desconsideradas no modelo superparamagnético convencional de Langevin.

Contudo, as simulações aqui realizadas e a obtenção dos parâmetros iniciais relacionados à correta descrição do comportamento superparamagnético constituem uma etapa intermediária importante que contribuirá para o desenvolvimento de outras simulações, a fim de possibilitar uma compreensão mais sofisticada e abrangente das curvas de $M(H)$, o que em última análise, pode ser fundamental para se investigar se uma determinada

aplicação será bem sucedida.

(APÊNDICE A) - CONVERSÃO DAS DISTRIBUIÇÕES DE MOMENTOS MAGNÉTICOS $f(\mu)$ PARA UMA DISTRIBUIÇÃO DE TAMANHOS $f(D)$

Conforme mencionado anteriormente, na [Seção(3.1)], funções de distribuição do tipo log-normal caracterizam-se por serem funções assimétricas sendo que, em transformações de variáveis, apenas os valores de momentos magnéticos medianos (μ_0) podem ser convertidos de modo independente. Para análises magnéticas em geral, é importante que haja uma conversão das distribuições de momentos magnéticos $f(\mu)$ para uma distribuição de tamanhos $f(D)$.

Para tal transformação, é possível estabelecer uma correspondência entre os valores medianos de momentos magnéticos (μ_0) e de diâmetro (D_0), adotando para isso uma geometria esférica para as NPs.

Neste sentido, sabendo-se que o momento magnético mediano associado a uma NP pode ser dado por ($\mu_0 = M_{SB} \cdot V_0$) e que seu respectivo volume pode ser escrito como sendo ($V_0 = \pi \cdot D_0^3 / 6$), temos que:

$$\mu_0 = M_{SB} V_0 = M_{SB} \frac{\pi}{6} D_0^3 = \frac{M_{SB} \pi D_0^3}{6}, \quad (20)$$

no qual (M_{SB}) corresponde a magnetização de saturação do material massivo e (V_0) é o volume mediano de uma nanoesfera com um diâmetro (D_0).

7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - (CNPq) pelo apoio financeiro recebido durante o período de desenvolvimento deste trabalho.

8 REFERÊNCIAS

- [1] *Knobel, M. e Goya, G. Revista Scientific American Brasil, 58 (2004).*

- [2] *Guimarães, A.P. Revista Brasileira de Ensino de Física* 22, 382 (2000).
- [3] *Cullity, B.D. and Graham, C.D. Introduction to Magnetic Materials. 2nd ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2009.*
- [4] *Brandl, A.L. Propriedades Magnéticas de Sistemas Nanocristalinos. Campinas. 122 f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física "Gleb Wataghin". Universidade Estadual de Campinas. 2004.*
- [5] *Bean, C.P. and Livingston, J.D. Journal of Applied Physics* 30, 120S (1959).
- [6] *Guimarães, A.P. Principles of Nanomagnetism. Berlin: Editora Springer Science & Business Media, 2009.*
- [7] *Knobel, M.; Nunes, W.C.; Socolovsky, L.M.; De Biasi, E.; Vargas, J.M. and Denardin, J.C. Journal of Nanoscience and Nanotechnology* 8, 2836 (2008).
- [8] *Néel, L. and Acad, C.R. Sci., (Paris) 228, 664 (1949); Néel, L. Ann. Geophys. 5, 99 (1949).*
- [9] *Faria, R.N. e Lima, L.F.C.P. Introdução ao Magnetismo dos Materiais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.*
- [10] *Alves, T.M.M.T. Síntese e caracterização de nanopartículas de óxidos de ferro para aplicações biomédicas. Campinas. 99 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física "Gleb Wataghin". Universidade Estadual de Campinas. 2007.*
- [11] *Knobel, M. Revista Brasileira de Ensino de Física* 22, 387 (2000).
- [12] *Wonterghem, J.V.; Morup, S.; Charles, S.W. and Wells, S. Journal of Colloid and Interface Science* 121, 558 (1988).
- [13] *Ferrari, E.F.; da Silva, F.C.S. and Knobel, M. Physical Review B (Condensed Matter)* 56, 6086 (1997).
- [14] *Miranda, M.G.M.; Bracho Rodríguez, G.J.; Antunes, A.B.; Baibich, M.N.; Ferrari, E.F.; da Silva, F.C.S. and Knobel, M. Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 185, 331 (1998).

- [15] Denardin, J.C.; Brandl, A.L.; Knobel, M.; Panissod, P.; Pakhomov, A.B.; Liu, H. and Zhang, X.X. *Physical Review B* 65, 064422-1 (2002).
- [16] Callister, W.D.Jr. and Rethwisch, D.G. *Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução*. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012.
- [17] Morales, M.P.; Veintemillas, V.S.; Montero, M.I.; Serna, C.J.; Roig, A.; Casas, L.; Martinez, B. and Sandiumenge, F. *Chemistry of Materials* 11, 3058 (1999).
- [18] Battle, X. and Labarta, A. *Journal of Physics D: Applied Physics* 35, R15 (2002).
- [19] Goya, G.F.; Berquó, T.S.; Fonseca, F.C. and Morales, M.P. *Journal of Applied Physics* 94, 3520 (2003).
- [20] Chieko, Y. *Influência das condições de síntese por precipitação nas características da zircônia estabilizada com MgO e aplicação no sistema ZrO₂ - MgO - Y₂O₃*. São Paulo. 190 f. Tese (Doutorado em Ciências - Área de Tecnologia Nuclear - Materiais). Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - Autarquia Associada à Universidade de São Paulo. 2004.
- [21] Sampaio, L.C.; Garcia, F.; Cernicchiaro, G.R.C. e Takeuchi, A.Y. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 22, 406 (2000).
- [22] Leite, V.S. e Figueiredo, W. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 29, 53 (2007).
- [23] Sun, J.; Zhou, S.; Hou, P.; Yang, Y.; Weng, J.; Li, X. and Li, M. *Journal of Biomedical Materials Research Part A* 80, 333 (2007).
- [24] Aquino, R.; Tourinho, F.A.; Itri, R.; e Lara, M.C.F.L. and Depeyrot, J. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 252, 23 (2002).

Deduzindo $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$ da eletrodinâmica de Ampère

J. P. M. C. CHAIB*

Universidade Católica de Brasília - UCB, Departamento de Física
QS 7 LT 01 - Águas Claras, Brasília - DF, 71966-700

Resumo

Este artigo apresenta uma forma de deduzir a expressão, $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$, a partir da Força de Ampère considerando o caso geral da interação entre um circuito fechado de forma qualquer l' e um elemento de corrente $id\vec{l}$.

Keywords: Força de Ampère, Eletrodinâmica, Campo Magnético

1 Introdução

Apesar do nome de A. -M. Ampère (1775 – 1836) ser reconhecido por conta da denominação dada para a intensidade de corrente elétrica, o mesmo ainda não ocorre quando se trata de seus trabalhos. Em [1] encontra-se o alerta para a distorção de conceitos e fatos a respeito do trabalho de Ampère e de seus contemporâneos. Entre os erros mais comuns encontra-se a atribuição de autoria à Ampère para a lei de Maxwell denominada “lei de Ampère (!)”. Ou dar autoria à Biot e Savart para a expressão para o campo magnético devido a um elemento de corrente.¹ A análise dos passos de Ampère que culminaram na publicação de seu livro *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos Deduzida Unicamente da Experiência* — o *Principia* da eletrodinâmica segundo [2] — bem como a primeira tradução integral desse livro para língua estrangeira (português!), encontra-se em [3].

No sentido de enriquecer o material sobre o assunto, apareceram trabalhos de história e ensino de física envolvendo a *Eletrodinâmica de Ampère* e seus debates. Por exemplo, a exploração no ensino de física do debate entre Biot e Ampère para a interpretação do experimento de Oersted, [4]. Recentemente fundamentados em [5] e usando da notação da época, Dias e Dias apresentaram um resumo dos cálculos principais desenvolvidos por Ampère relacionados aos casos de equilíbrio, [6]. Mais recente ainda, em [7] usa-se da configuração específica da força entre o fio condutor retilíneo infinito e uma espira condutora

*e-mail:jopachaib@gmail.com

¹A origem das denominações que levam a essas autorias mal atribuídas ainda nos é um mistério.

para ilustrar a equivalência do resultado integrado e levantar o debate sobre o ensino da (correta) Força de Ampère nos ambientes formais.

Na verdade, é de conhecimento entre os pesquisadores da Eletrodinâmica de Ampère que a forma diferencial da Força de Ampère obedece a terceira lei de Newton em todas as configurações, o que não vale para a forma diferencial moderna, [3, p. 269]. Sabe-se também que, apesar dessa diferença, elas são equivalentes na forma integrada, como se demonstrará aqui. E esse fato não é mera coincidência, como destacou J. Bertrand (1822 – 1900):

As leis descobertas por Ampère permanecem na ciência como uma base sólida e incontestável sobre a qual se apoiam com confiança mesmo aqueles que tem tentado substituí-las por outras. É, com efeito, pela concordância completa de seus princípios propostos com os de Ampère — dentro de todos os casos onde a verificação é realizável — que se crê poder justificar as novas teorias. [8, p. 297]

Notou-se, entretanto, a carência de um material demonstrando a dedução da força eletrodinâmica $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$ a partir da Força de Ampère, de uma maneira mais geral, e usando de notação moderna. Sendo assim, para ajudar no desenvolvimento de discussões futuras, neste artigo se fará a dedução geral da força de um circuito fechado com forma qualquer sobre um elemento de corrente disposto de forma arbitrária. Esta demonstração pode ser usada em cursos de eletrodinâmica ou cálculo vetorial.

2 Transformações convenientes para integração

2.1 Primeiro passo: expressar a força em termos de derivadas parciais

Tomemos antes a interação entre dois elementos de correntes $id\vec{l}$ e $i'd\vec{l}'$ a uma distância \vec{r} segundo a Força de Ampère:

$$d^2\vec{F} = -\frac{\mu_0 ii'}{4\pi r^2} \hat{r} \left[2 \left(d\vec{l} \cdot d\vec{l}' \right) - 3 \left(\hat{r} \cdot d\vec{l} \right) \left(\hat{r} \cdot d\vec{l}' \right) \right]. \quad (1)$$

Para realizar a integração da força de um circuito fechado l' de forma qualquer sobre o elemento de corrente $id\vec{l}$, nos interessa reescrever (1) em termos de derivadas parciais.

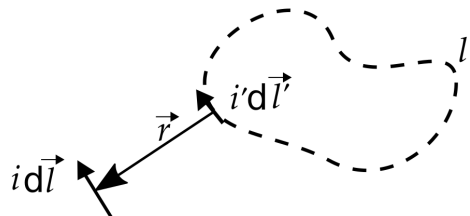


Figura 1: Elementos de corrente $id\vec{l}$ e $i'd\vec{l}'$ a uma distância \vec{r}

No sistema cartesiano, temos:

$$\vec{r} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}, \quad (2a)$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (2b)$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2c)$$

Como um ponto no circuito l define as coordenadas x, y, z , podemos parametrizar $x(l)$, $y(l)$ e $z(l)$. O mesmo vale para o circuito l' e as coordenadas x', y', z' . De maneira que no fundo $r(l, l')$. Assim:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{1}{r} \left((x - x') \frac{\partial x}{\partial l} + (y - y') \frac{\partial y}{\partial l} + (z - z') \frac{\partial z}{\partial l} \right), \quad (3a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial l'} = \frac{-1}{r} \left((x - x') \frac{\partial x'}{\partial l'} + (y - y') \frac{\partial y'}{\partial l'} + (z - z') \frac{\partial z'}{\partial l'} \right). \quad (3b)$$

Também temos que,

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial l} = 2 \left((x - x') \frac{\partial x}{\partial l} + (y - y') \frac{\partial y}{\partial l} + (z - z') \frac{\partial z}{\partial l} \right), \quad (4a)$$

$$\frac{\partial^2(r^2)}{\partial l' \partial l} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial x'}{\partial l'} + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial y'}{\partial l'} + \frac{\partial z}{\partial l} \frac{\partial z'}{\partial l'} \right). \quad (4b)$$

Por outro lado, $d\vec{l} = dl_x \hat{x} + dl_y \hat{y} + dl_z \hat{z}$. Além disso, por terem a mesma dimensão, $dl_x = dx$, $dl_y = dy$ e $dl_z = dz$. Então:

$$dl_x = \frac{\partial x}{\partial l} dl; \quad dl_y = \frac{\partial y}{\partial l} dl \quad \text{e} \quad dl_z = \frac{\partial z}{\partial l} dl. \quad (5)$$

Assim, temos que,

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot d\vec{l} &= \frac{(x - x')}{r} dl_x + \frac{(y - y')}{r} dl_y + \frac{(z - z')}{r} dl_z = \\ &= \frac{(x - x')}{r} \frac{\partial x}{\partial l} dl + \frac{(y - y')}{r} \frac{\partial y}{\partial l} dl + \frac{(z - z')}{r} \frac{\partial z}{\partial l} dl \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{r} \cdot d\vec{l} &= \frac{1}{r} \left((x - x') \frac{\partial x}{\partial l} + (y - y') \frac{\partial y}{\partial l} + (z - z') \frac{\partial z}{\partial l} \right) dl. \end{aligned} \quad (6)$$

Ao comparar (3a) e (6), chegamos:

$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial r}{\partial l} dl. \quad (7)$$

De maneira análoga,

$$\hat{r} \cdot d\vec{l}' = \frac{-1}{r} \left((x - x') \frac{\partial x}{\partial l'} + (y - y') \frac{\partial y}{\partial l'} + (z - z') \frac{\partial z}{\partial l'} \right) dl'. \quad (8)$$

Ao comparar (3b) e (8), chegamos:

$$\hat{r} \cdot d\vec{l}' = -\frac{\partial r}{\partial l'} dl' . \quad (9)$$

Continuando,

$$\begin{aligned} d\vec{l} \cdot d\vec{l}' &= dl_x dl'_x + dl_y dl'_y + dl_z dl'_z = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial l} \frac{\partial x'}{\partial l'} + \frac{\partial y}{\partial l} \frac{\partial y'}{\partial l'} + \frac{\partial z}{\partial l} \frac{\partial z'}{\partial l'} \right) dl dl' . \end{aligned} \quad (10)$$

Comparando (4b) com (10), temos

$$\begin{aligned} d\vec{l} \cdot d\vec{l}' &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial l' \partial l} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l'} \left(2r \frac{\partial r}{\partial l} \right) = \\ &= -\left(r \frac{\partial^2 r}{\partial l' \partial l} + \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo (7), (9) e (11) em (1):

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F} &= -\frac{\mu_0 ii'}{4\pi r^2} \hat{r} \left[-2 \left(r \frac{\partial^2 r}{\partial l' \partial l} + \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right) dl dl' + 3 \left(\frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right) dl dl' \right] \\ &= -\frac{\mu_0 ii'}{4\pi r^2} \hat{r} \left[-2r \frac{\partial^2 r}{\partial l' \partial l} + \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right] dl dl' \end{aligned} \quad (12)$$

Manipulando mais um pouco,

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F} &= \frac{\mu_0 ii'}{2\pi r} \hat{r} \left[\frac{\partial^2 r}{\partial l' \partial l} - \frac{1}{2} r^{-1} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right] dl dl' = \\ &= \frac{\mu_0 ii'}{2\pi r^{\frac{1}{2}}} \hat{r} \left[r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 r}{\partial l' \partial l} - \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial r}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial l'} \right] dl dl' = \\ &= \frac{\mu_0 ii'}{2\pi r^{\frac{1}{2}}} \hat{r} \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial l} \right) \right] dl dl' . \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 Segundo passo: Tratar as componentes em separado

Ao realizar o produto escalar, temos o seguinte:

$$d\vec{l} \cdot \hat{x} = dl \cos(\theta_x) \quad \text{e} \quad d\vec{l}' \cdot \hat{x} = dl'_x . \quad (14)$$

Assim, usando das relações obtidas em (5), temos que:

$$\cos(\theta_x) = \frac{\partial x}{\partial l} \quad ; \quad \cos(\theta_y) = \frac{\partial y}{\partial l} \quad \text{e} \quad \cos(\theta_z) = \frac{\partial z}{\partial l} . \quad (15)$$

O que faz bastante sentido pensando geometricamente. Usaremos a forma do cosseno, ao invés da derivada parcial, para não confundir na notação. Assim, também se atribui uma intuição geométrica para o cálculo desenvolvido.

Igualmente para reduzir um pouco a quantidade dos símbolos, vamos considerar — sem perda nenhuma na generalização — que o ponto central do elemento de corrente $id\vec{l}$ se encontra na origem do sistema de coordenadas. De maneira que $(x,y,z) = (0,0,0)$ e

$$\vec{r} = (-x'\hat{x} - y'\hat{y} - z'\hat{z}) . \quad (16)$$

Desenvolvendo como fizemos em (3a), e usando (15) chegamos que:

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{1}{r} [-x' \cos(\theta_x) - y' \cos(\theta_y) - z' \cos(\theta_z)] . \quad (17)$$

Ao mesmo tempo, de (13), temos que a componente x da força entre elementos de correntes fica:

$$d^2F_x \hat{x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ii'}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{-x'}{r} \hat{x} \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial l} \right) \right] dl dl' . \quad (18)$$

Para aliviar a notação, por enquanto, não escreveremos o versor \hat{x} . Assim, substituindo (17) em (18) temos:

$$d^2F_x = \frac{\mu_0}{2\pi} ii' dl dl' \frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l'} \left[\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} (x' \cos(\theta_x) + y' \cos(\theta_y) + z' \cos(\theta_z)) \right] . \quad (19)$$

Manipulando,

$$\begin{aligned} d^2F_x &= \frac{\mu_0}{2\pi} ii' dl dl' \frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial l'} \frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_x) + \left(\frac{\partial}{\partial l'} \frac{y'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_y) + \left(\frac{\partial}{\partial l'} \frac{z'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_z) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} ii' dl dl' \left[\left(\frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l'} \frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_x) + \frac{x'}{y'} \left(\frac{y'}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l'} \frac{y'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x'}{z'} \left(\frac{z'}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l'} \frac{z'}{r^{\frac{3}{2}}} \right) \cos(\theta_z) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} ii' dl dl' \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{r^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cos(\theta_x) + \frac{x'}{y'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{y'}{r^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cos(\theta_y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x'}{z'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{z'}{r^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \cos(\theta_z) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} ii' dl dl' \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'^2}{r^3} \right) \cos(\theta_x) + \frac{x'}{y'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{y'^2}{r^3} \right) \cos(\theta_y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x'}{z'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{z'^2}{r^3} \right) \cos(\theta_z) \right] . \quad (20) \end{aligned}$$

Por outro lado temos que, pela regra da derivada do produto

$$\begin{aligned} \frac{y'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \right) + \frac{x'}{y'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{y'^2}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \cdot \frac{y'^2}{r^3} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x'}{y'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{y'^2}{r^3} \right) &= \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x' y'}{r^3} \right) - \frac{y'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Igualmente,

$$\frac{x'}{z'} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{z'^2}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x' z'}{r^3} \right) - \frac{z'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{z'} \right). \quad (22)$$

Assim, usando (21) e (22) em (20), temos:

$$\begin{aligned} d^2 F_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} ii' dl dl' \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'^2}{r^3} \cos(\theta_x) + \frac{x' y'}{r^3} \cos(\theta_y) + \frac{x' z'}{r^3} \cos(\theta_z) \right) + \right. \\ &\quad \left. - \cos(\theta_y) \frac{y'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \right) - \cos(\theta_z) \frac{z'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{z'} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Para simplificar o primeiro termo entre parênteses de (23) usamos do produto escalar $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dl \cos(\theta)$, que combinado com (17):

$$-\frac{x'}{r} \cos(\theta_x) - \frac{y'}{r} \cos(\theta_y) - \frac{z'}{r} \cos(\theta_z) = \cos(\theta). \quad (24)$$

Disto temos que:

$$\left(\frac{x'^2}{r^3} \cos(\theta_x) + \frac{x' y'}{r^3} \cos(\theta_y) + \frac{x' z'}{r^3} \cos(\theta_z) \right) = -\frac{x'}{r^2} \cos(\theta) \quad (25)$$

Assim, substituindo (25) em (23), encontramos:

$$\begin{aligned} d^2 F_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} ii' dl dl' \left[\frac{\partial}{\partial l'} \left(-\frac{x'}{r^2} \cos(\theta) \right) + \right. \\ &\quad \left. - \cos(\theta_y) \frac{y'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \right) - \cos(\theta_z) \frac{z'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{z'} \right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Tomando, em (26) o produto dos elementos dl e dl' com os termos dentro dos colchetes, quando olhamos para a variável y' temos:

$$\begin{aligned} dl \cos(\theta_y) \frac{y'^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{x'}{y'} \right) dl' &= \\ = dl_y \frac{y'^2}{r^3} \left(\frac{y' \frac{\partial x'}{\partial l'} - x' \frac{\partial y'}{\partial l'}}{y'^2} \right) dl' &= \\ dl_y \left(\frac{y' dl'_x - x' dl'_y}{r^3} \right) &. \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, e retomando a escrita suprimida do versor \hat{x} , (26) fica:

$$d^2F_x \hat{x} = \frac{\mu_0}{4\pi} ii' \left[dl \frac{\partial}{\partial l'} \left(\frac{-x'}{r^2} \cos(\theta) \right) dl' + \right. \\ \left. - dl_y \left(\frac{y' dl'_x - x' dl'_y}{r^3} \right) - dl_z \left(\frac{z' dl'_x - x' dl'_z}{r^3} \right) \right] \hat{x}. \quad (28)$$

Pode-se obter as demais componentes da força elementar de maneira análoga, de maneira que,

$$d^2F_y \hat{y} = \frac{\mu_0}{4\pi} ii' \left[dl \frac{\partial}{\partial l'} \left(-\frac{y'}{r^2} \cos(\theta) \right) dl' + \right. \\ \left. - dl_x \left(\frac{x' dl'_y - y' dl'_x}{r^3} \right) - dl_z \left(\frac{z' dl'_y - y' dl'_z}{r^3} \right) \right] \hat{y} \quad (29)$$

e

$$d^2F_z \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} ii' \left[dl \frac{\partial}{\partial l'} \left(-\frac{z'}{r^2} \cos(\theta) \right) dl' + \right. \\ \left. - dl_x \left(\frac{x' dl'_z - z' dl'_x}{r^3} \right) - dl_y \left(\frac{y' dl'_z - z' dl'_y}{r^3} \right) \right] \hat{z} \quad (30)$$

3 Obtendo $d\vec{F} = id\vec{l} \times \vec{B}$

Lembrando também que $\vec{r} = (-x' \hat{x} - y' \hat{y} - z' \hat{z})$, note-se que ao integrar a força sobre um circuito l' começando na extremidade l'_1 e terminando na extremidade l'_2 , o primeiro termo entre os colchetes da resultante de (28), (29) e (30) adquire a seguinte forma:

$$-(x'_2 \hat{x} + y'_2 \hat{y} + z'_2 \hat{z}) \frac{\cos(\theta_2)}{r_2^2} + (x'_1 \hat{x} + y'_1 \hat{y} + z'_1 \hat{z}) \frac{\cos(\theta_1)}{r_1^2} = \quad (31a)$$

$$= \cos(\theta_2) \frac{\hat{r}_2}{r_2} - \cos(\theta_1) \frac{\hat{r}_1}{r_1}. \quad (31b)$$

Cujo valor é zero para uma integral fechada, ou se os limites de r_1 e r_2 forem para o infinito.

Assim, tomando (28), (29), (30) e trocando a ordem dos fatores para rearranjar em uma forma um pouco mais familiar, pode-se escrever que,

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} ii' \left[\left(dl_y \oint_{l'} \frac{x' dl'_y - y' dl'_x}{r^3} - dl_z \oint_{l'} \frac{z' dl'_x - x' dl'_z}{r^3} \right) \hat{x} + \right. \\ + \left(dl_z \oint_{l'} \frac{y' dl'_z - z' dl'_y}{r^3} - dl_x \oint_{l'} \frac{x' dl'_y - y' dl'_x}{r^3} \right) \hat{y} + \\ \left. + \left(dl_x \oint_{l'} \frac{z' dl'_x - x' dl'_z}{r^3} - dl_y \oint_{l'} \frac{y' dl'_z - z' dl'_y}{r^3} \right) \hat{z} \right] \quad (32)$$

Ao definirmos,

$$B_x \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} i' \oint_{l'} \frac{y' dl'_z - z' dl'_y}{r^3} ; \quad (33a)$$

$$B_y \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} i' \oint_{l'} \frac{y' dl'_z - z' dl'_y}{r^3} ; \quad (33b)$$

$$B_z \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} i' \oint_{l'} \frac{x' dl'_y - y' dl'_x}{r^3} \text{ e} \quad (33c)$$

$$\vec{B} \equiv B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} , \quad (33d)$$

chegamos a dois resultados.

O primeiro consiste que, lembrando que as componentes de \vec{r} são negativas no nosso cálculo, pode-se usar a definição de produto vetorial para simplificar as expressões acima em:

$$\vec{B} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{i' d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3} . \quad (34)$$

Ampère foi o primeiro a chegar nessa expressão. Na época denominou a integral $\oint_{l'} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}}{r^3}$ — note que o termo i' foi deixado de fora — como *Diretriz*, [3, p. 177]. Uma grandeza que depende apenas da forma do circuito.

E finalmente, o segundo resultado leva à simplificação de (32) :

$$\begin{aligned} d\vec{F} = & i [(dl_y B_z - dl_z B_y) \hat{x} + \\ & + (dl_z B_x - dl_x B_z) \hat{y} + \\ & + (dl_x B_y - dl_y B_x) \hat{z}] . \end{aligned} \quad (35a)$$

Que ao usar também a definição de produto vetorial fica:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \quad (35b)$$

O que significa que qualquer circuito fechado exercerá uma força perpendicular ao elemento de corrente interagente. Ao contrário do que se pensa, esta consequência expressa matematicamente foi obtida em primeira mão por Ampère, o desenvolvedor original da teoria da interação entre elementos de corrente.

4 Considerações finais

Sabendo do resultado da direção da força de um circuito fechado ser perpendicular ao elemento de corrente, J. C. Maxwell (1831-1879) interpretou que a força eletromagnética era uma expressão da *pressão do éter eletromagnético* sobre esse elemento. Isto provavelmente foi um dos pontos principais que o motivou admitir somente a existência de correntes fechadas na sua concepção eletromagnética. Soma-se

também que a partir de (34) se deduz a *lei da não existência do monopolo magnético* das equações de Maxwell, e — somando a equação da conservação das cargas — a forma completa da *lei circuital magnética* (a também chamada lei de Ampère-Maxwell), [9, p. 82].

Deve-se destacar igualmente que a demonstração desenvolvida aqui, tem a mesma validade didática de — como fazemos em mecânica — deduzir as leis de Kepler da força gravitacional newtoniana. Esses procedimentos são um caminho “de volta” se comparados ao processo histórico. Tal como Newton usou como referência as leis de Kepler para encontrar (ou fundamentar) sua força gravitacional, Ampère usou em seu livro o teorema extraído experimentalmente no *caso de equilíbrio da não existência de força tangencial* primeiro, para depois chegar à forma final de sua expressão para a força entre elementos de corrente, [3, p. 191].

Por fim, espera-se que este artigo contribua para discussões futuras, dentro e fora de sala de aula.

Referências

- [1] Chaib, J. P. M. C. e Assis, A. K. T. . Distorção da obra eletromagnética de Ampère nos livros didáticos. *Rev. Bras. de Ensino de Física*, **29**(1), 65, (2007).
- [2] Williams, L. P., Ampère, André-Marie Em: Gillispie, C. C. (Ed.) *Dictionary of Scientific Biography* Vol.1, Nova York: Charles Scribner's Sons, (1981) p. 139–147.
- [3] A. K T, Assis e Chaib, J. P. M. C., *Eletrodinâmica de Ampère*. Campinas: Editora da Unicamp, (2011).
- [4] Braga, M., Guerra, A. e Reis, J. C. *Science & Education*, **21**(6), 921, (2012).
- [5] Chaib, J. P. M. C. *Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*, Campinas, pp. 386, Tese (doutorado), Unicamp (2009).
- [6] Dias, V. H. A. e Dias, P. M. C. *Rev. Bras. de Ensino de Física*, **37**(4), 4601, (2015).
- [7] dos Santos, H. S. T. e Gardelli, D. *Cad. Bras. de Ensino de Física*, **34**(3), 864, (2017).
- [8] Bertrand, J. *Jour. de Physique Théorique et Appliquée*, **3**(1), 297, (1874).
- [9] Assis, A. K. T. *Eletrodinâmica de Weber*. Campinas: Editora da Unicamp, (1995).

Força de uma casca esférica em um corpo acelerado: independência da posição

LUCAS M. COSTA* FÁBIO M. S. LIMA†

Instituto de Física, Universidade de Brasília

19 de março de 2018

Resumo

Em um trabalho anterior [Physicae Organum 2 (2), 1 (2016)], foi mostrado que uma força gravitacional do tipo Weber, a qual, além do termo newtoniano, inclui termos que contemplam o movimento relativo entre os corpos que interagem, é não-nula quando um corpúsculo em repouso no centro de uma casca esférica homogênea é acelerado em relação a ela. Nesta nota, mostramos matematicamente que a mesma força é obtida qualquer que seja a posição do corpúsculo no interior da casca.

Palavras-chave: Força gravitacional, Teorema das cascas, Princípio de Mach, Mecânica Relacional.

I. INTRODUÇÃO

Considere um corpúsculo de massa m localizado no interior de uma casca esférica de massa M , distribuída uniformemente. Devido à simetria da casca esférica, qualquer força que só dependa da distância r entre os corpos interagentes fornecerá uma resultante nula quando o corpo estiver *no centro* da casca. Na Proposição 70 do Livro I do *Principia* (1687) [1], Newton provou um teorema essencial para a sua nova mecânica e cosmologia, qual seja o teorema XXX, que estabelece que uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos interagentes fornecerá uma resultante *nula* para um corpúsculo no interior de uma casca esférica homogênea, **qualquer que seja a posição do corpúsculo**. Como a lei universal de gravitação de Newton assume que a interação gravitacional só depende do produto das massas e do inverso do quadrado da distância entre elas [2], então a força gravitacional exercida pela casca deve permanecer nula mesmo que o corpo esteja em movimento em relação à casca. Esta nulidade foi crucial para que Newton pudesse desprezar a influência gravitacional das estrelas distantes sobre o movimento dos corpos nas proximidades da Terra e no sistema solar, já que elas estão distribuídas uniformemente por toda a esfera celeste, como apontado no Corolário 2 da Proposição 14, no Livro III

*Graduando da ENE-UnB, bolsista PIBIC.

†Prof. Adjunto do IF-UnB. Corresponding author: fabio@fis.unb.br

do *Principia* [2]. Esse mesmo resultado nulo também é previsto (com a casca esférica em repouso) pela Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Einstein (1879-1955) em 1915 [3, 4].¹

Tendo em vista que a TRG não contempla o princípio de Mach, o qual afirma que a inércia de um corpo é determinada pela distribuição das massas de todo o resto do Universo, Assis propôs na Ref. [7] a *Mecânica Relacional* como uma teoria alternativa às teorias de gravitação de Newton e de Einstein, com a vantagem de sempre contemplar o princípio de Mach. Nessa nova mecânica, postula-se uma versão gravitacional da força eletrodinâmica de Weber, com termos que dependem da velocidade e da aceleração relativas entre os corpos [8]. Na Ref. [9], diversos casos de movimento relativo entre uma casca esférica e um corpo são discutidos, mostrando-se que, *em geral, o movimento relativo acelerado faz com que a casca exerça uma força não-nula sobre o corpo*. No Apêndice A.1 da Ref. [9], aquele autor afirma que a casca exercerá uma força não-nula sobre um corpo em seu interior quando este acelerar em relação à casca, mas não é fornecida uma demonstração. Isto motivou um dos autores (FMSL) e colaboradores a calcularem a integral de superfície da força gravitacional no caso mais simples de um corpúsculo *inicialmente parado no centro de uma casca esférica* [10], o que forneceu uma resultante não-nula e oposta à aceleração do corpo. Aqui nesta nota, desenvolvemos o cálculo correspondente ao caso mais geral, em que o corpo acelerado ocupa **qualquer posição no interior da casca esférica**.

II. FORÇA EXERCIDA PELA CASCA

A força gravitacional exercida por um corpo de massa m_1 sobre um corpo de massa m_2 postulada pela Mecânica Relacional é dada por [7, 9]:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] \hat{r}_{21}, \quad (1)$$

onde $\hat{r}_{21} \equiv \vec{r}_{21}/r_{21} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, G é a constante universal de gravitação e c é a velocidade da luz no vácuo. Note que esta força depende da velocidade relativa $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt = \vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \hat{r}_{12}$ e da aceleração relativa $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt = [\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 + \vec{a}_{12} \cdot \vec{r}_{12}] / r_{12}$, conforme Eqs. (2.10) e (2.11) da Ref. [8], respectivamente. A situação física em que estamos interessados é aquela em que um corpúsculo com massa m encontra-se inicialmente parado em um ponto qualquer dentro de uma casca esférica de raio R , cuja massa M está uniformemente distribuída, com uma densidade superficial $\sigma = M/(4\pi R^2)$. No instante $t = 0$, o corpo passa a acelerar uniformemente na direção arbitrária \hat{a} , que forma um ângulo α com o vetor-posição \vec{C} , como ilustrado na Fig. 1.² Neste caso, assumindo $\xi = 6$ (este é o valor que leva à precessão observada para o periélio de Mercúrio, como mostrado na Seç. 23.1 da Ref. [9]), a força exercida pelo elemento de massa dM (corpo 1) sobre o corpúsculo (corpo 2) fica:

$$d^2\vec{F} = -\frac{Gm dM}{r^2} \left(1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}, \quad (2)$$

¹Este resultado nulo da TRG pode ser obtido tomando-se $\omega = 0$ na expressão obtida em 1918 por Thirring para a força gravitacional exercida por uma casca esférica girante sobre um corpo movendo-se em seu interior [5, 6].

²Estamos assumindo que essa aceleração está sendo provocada por alguma força externa à casca, oriunda de outros corpos.

onde, por simplicidade, fizemos $\hat{r} \equiv \hat{r}_{21} = \vec{r}/r$, como indicado na Fig. 1. Aqui, $dM = \sigma dS$ é o elemento de massa da casca, onde $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ é o elemento de área em coordenadas esféricas, localizado em $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, já que estamos tomando a origem O do sistema de coordenadas no centro da casca. Sem perda de generalidade, escolheremos o eixo z apontando na direção da posição inicial do corpúsculo, identificada por $\vec{C} = C\hat{k}$ na Fig. 1, a seguir.

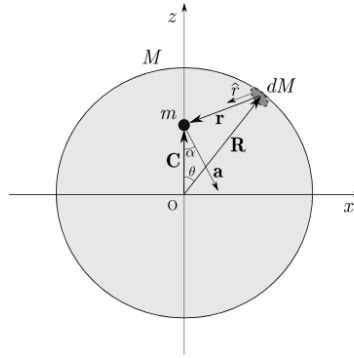


Figura 1: Casca esférica de raio R e massa M , em repouso, interagindo com um corpúsculo de massa m , inicialmente parado em um ponto qualquer dentro da casca, indicado pelo vetor \vec{C} . No instante $t = 0$, o corpo é acelerado ao longo da direção arbitrária \hat{a} , a qual forma um ângulo α com o eixo z . Os vetores \vec{C} , \vec{R} e \vec{r} são coplanares, pois $\vec{r} = \vec{C} - \vec{R}$, porém \vec{a} , em geral, não está no mesmo plano desses vetores.

Para determinar a força total \vec{F} exercida pela casca sobre o corpo temos que calcular a integral de superfície de $d^2\vec{F}$ sobre toda a casca esférica. Entretanto, o primeiro termo (o newtoniano) fornecerá uma integral nula, de acordo com o teorema XXX do *Principia* [1]. Além disso, estamos considerando que o corpo encontra-se inicialmente parado em relação à casca, de forma que o termo que contém a velocidade relativa $\dot{r} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{r}$ é nulo em $t = 0$. Então, restará somente o termo com \ddot{r} :

$$\vec{F} = -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\ddot{r}}{r} \hat{r} \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3)$$

A aceleração relativa \ddot{r} é facilmente determinada assumindo-se que a casca permanece em repouso, de modo que $\vec{a}_1 = \vec{0}$, enquanto o corpúsculo é acelerado em relação a ela, ou seja $\vec{a}_2 = \vec{a} = a\hat{a}$, onde $a > 0$ é o módulo da aceleração do corpúsculo no instante $t = 0$. Dessa forma, $\ddot{r} = \vec{a} \cdot \hat{r}$, o que nos leva a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \hat{r}}{r} \hat{r} \sin\theta d\theta d\phi \\ &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{r} \sin\theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (4)$$

Como o vetor posição-relativa é $\vec{r} = \vec{C} - \vec{R}$, essa integral pode ser expandida na forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left(\vec{C} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \sin\theta d\theta d\phi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{R} \sin\theta d\theta d\phi \right) \\ &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\vec{a} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{C} - \vec{R}}{r^3} \sin\theta d\theta d\phi \right) \vec{C} - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot (\vec{C} - \vec{R})}{r^3} \vec{R} \sin\theta d\theta d\phi \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

A primeira integral, acima, pode ser resolvida expandindo-a da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{C} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{R} d\theta d\varphi &= I_1 \vec{C} - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) d\theta d\varphi \\ &= I_1 \vec{C} - \hat{i} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi x \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \hat{j} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi y \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$I_1 \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta, \quad (7)$$

já que $r = \sqrt{R^2 + C^2 - 2RC \cos \theta}$ (obtida com a lei dos cossenos) não depende de φ . A substituição simples $u^2 = R^2 + C^2 - 2RC \cos \theta$, com $u du = RC \sin \theta d\theta$, resulta em

$$I_1 = \frac{2\pi}{RC} \int_{R-C}^{R+C} \frac{1}{u^2} du = \frac{4\pi}{R(R^2 - C^2)}. \quad (8)$$

As três últimas integrais da Eq. (6) também podem ser resolvidas analiticamente substituindo-se $x = R \cos \varphi \sin \theta$, $y = R \sin \varphi \sin \theta$ e $z = R \cos \theta$, que são as expressões usuais em coordenadas esféricas. Com isso, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi x \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi = R \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^3} d\theta \quad (9)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi = R \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^3} d\theta, \quad (10)$$

que são *ambas nulas*, pois $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$, e

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z \frac{\sin \theta}{r^3} d\varphi d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^\pi \cos \theta \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Fazendo a mesma substituição simples que utilizamos para resolver I_1 , nas Eqs. (7) e (8), obtemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi R \int_{R-C}^{R+C} \frac{\frac{u^2 - R^2 - C^2}{(-2RC)} \frac{u du}{RC}}{u^3} \\ &= -\frac{2\pi R}{2R^2 C^2} \int_{R-C}^{R+C} \frac{u^2 - (R^2 + C^2)}{u^2} du \\ &= -\frac{\pi}{RC^2} \int_{R-C}^{R+C} \left[1 - (R^2 + C^2) \frac{1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Com os resultados obtidos acima para as integrais I_1 e I_2 , a primeira integral da Eq. (5), correspondente ao vetor \vec{C} , reduz-se a

$$\begin{aligned} I_1 \vec{C} - I_2 \hat{k} &= (I_1 C - I_2) \hat{k} \\ &= \left[\frac{4\pi}{R(R^2 - C^2)} C - \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)} \right] \hat{k} \\ &= 0 \hat{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Com isso, a força exercida pela casca reduz-se a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot (\vec{C} - \vec{R})}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{C}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Na primeira integral acima, note que $\vec{a} \cdot \vec{C} = -aC \cos\alpha$, portanto:

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{C}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= -aC \cos\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Ao expandirmos esta integral em uma soma de integrais (uma para cada coordenada), as integrais com x e y se anulam pelo mesmo motivo apontado nas Eqs. (9) e (10), restando somente

$$\begin{aligned} I_3 &= -aC \cos\alpha \hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z \frac{\sin\theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\ &= -aC \cos\alpha I_2 \hat{k} \\ &= -aC \cos\alpha \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \\ &= -\frac{4\pi a C^2 \cos\alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Por fim, a segunda integral da Eq. (14) pode ser resolvida expandindo-a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{a} \cdot \vec{R} \frac{\sin\theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Escrevendo a aceleração na forma $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a_x x + a_y y + a_z z) \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{R} \, d\varphi \, d\theta \\
 &= a_x \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} y \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_z \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &= a_x \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_y \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} y^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_z \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta. \tag{18}
 \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre porque as integrais duplas com termos cruzados — i.e., xy , yz e xz — são todas *nulas*, pois esses produtos levam às integrais azimutais $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0$ e $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) \, d\varphi = 0$. Em coordenadas esféricas, as integrais com os termos x^2 , y^2 e z^2 do final da Eq. (18) ficam:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= R^2 \left[a_x \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta + a_y \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta + 2\pi a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \right] \\
 &= \pi R^2 a_x \hat{i} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + \pi R^2 a_y \hat{j} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + 2\pi R^2 a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + 2\pi R^2 a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) I_5 + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6, \tag{19}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 I_5 &\equiv \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos^2 \theta}{r^3} \sin \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \frac{I_1}{2\pi} - \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \frac{2}{R(R^2 - C^2)} - I_6 \tag{20}
 \end{aligned}$$

e

$$I_6 \equiv \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta. \tag{21}$$

Esta última integral pode ser resolvida usando-se a mesma substituição simples anterior:

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_{R-C}^{R+C} \left(\frac{R^2 + C^2 - u^2}{2RC} \right)^2 \frac{1}{u^3} \frac{u}{RC} du \\
 &= \frac{1}{4R^3 C^3} \int_{R-C}^{R+C} \frac{(R^2 + C^2 - u^2)^2}{u^2} du \\
 &= \frac{1}{4R^3 C^3} \left[(R^2 + C^2)^2 \int_{R-C}^{R+C} \frac{1}{u^2} du \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R-C}^{R+C} u^2 du - 2(R^2 + C^2) \int_{R-C}^{R+C} du \right] \\
 &= \frac{1}{2R^3 C^2} \left[\frac{(R^2 + C^2)^2}{R^2 - C^2} - R^2 - \frac{5}{3} C^2 \right] \\
 &= \frac{2(R^2 + 2C^2)}{3R^3(R^2 - C^2)}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

De posse desses resultados exatos para I_5 e I_6 , finalizamos o cálculo da força exercida pela casca fazendo as devidas substituições na Eq. (14):

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} (I_3 - I_4) \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} + I_4 \right] \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &\quad \left. + \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) I_5 + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6 \right] \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &\quad \left. + \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(\frac{2}{R(R^2 - C^2)} - I_6 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6 \right]. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Com a expressão de I_6 da Eq. (22), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &+ 2\pi (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(\frac{R}{R^2 - C^2} - \frac{R^2 + 2C^2}{3R(R^2 - C^2)} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{4\pi}{3} a_z \hat{k} \frac{R^2 + 2C^2}{R(R^2 - C^2)} \right] \\
 &= -\frac{12\pi Gm\sigma R}{c^2 (R^2 - C^2)} \left[2aC^2 \cos \alpha \hat{k} \right. \\
 &+ (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(R^2 - \frac{R^2 + 2C^2}{3} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} a_z \hat{k} (R^2 + 2C^2) \right]. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser simplificada fazendo-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2 (R^2 - C^2)} \left[3aC^2 \cos \alpha \hat{k} \right. \\
 &+ (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) (R^2 - C^2) + a_z \hat{k} (R^2 + 2C^2) \left. \right] \\
 &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2} \left[a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + \left(\frac{3C^2 a \cos \alpha}{R^2 - C^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{a_z (R^2 + 2C^2)}{R^2 - C^2} \right) \hat{k} \right]. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Como $\vec{a} \cdot \vec{C} = -aC \cos \alpha = a_z C$, então $a \cos \alpha = -a_z$. Com isso, a expressão acima reduz-se a:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2} (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \\
 &= -\frac{8\pi G\sigma R}{c^2} m \vec{a} \\
 &= -\gamma m \vec{a}. \tag{26}
 \end{aligned}$$

onde $\gamma \equiv 2GM/(Rc^2)$ é uma constante positiva, de modo que a força exercida pela casca sempre aponta na direção oposta à aceleração \vec{a} do corpúsculo em relação à casca. Este é exatamente o mesmo resultado obtido na Ref. [10] para o caso específico em que o corpúsculo ocupa o centro da casca. Este resultado é a base de toda a Mecânica Relacional, sendo essencial para a implementação do princípio de Mach [7, 9].

III. CONCLUSÃO

Nesta nota, mostramos matematicamente que a Mecânica Relacional prevê uma força gravitacional *não-nula* para a interação de uma casca esférica homogênea com um corpúsculo acelerado em seu interior, ainda que o corpúsculo esteja inicialmente parado em um ponto fora do centro da casca. Mostramos, assim, que o teorema XXX do Livro I do *Principia* não é válido quando se considera uma força gravitacional do tipo Weber e há uma aceleração relativa entre o corpo e a casca.³ Este é um dos pontos cruciais em que a Mecânica Relacional se diferencia da mecânica newtoniana e da TRG de Einstein. De fato, justamente por fornecer uma força sempre oposta à aceleração do corpo (como na *vis inertiae*, de Newton) é que a Mecânica Relacional interpreta a inércia como uma consequência da interação gravitacional entre a “casca-universo” (ou seja, a esfera celeste) e um corpo acelerado em relação a ela. Isso não é possível nas teorias de Newton e Einstein, pois elas sempre fornecem um resultado nulo para a interação da casca (em repouso) com corpos movendo-se em seu interior, mesmo que eles estejam acelerados. Isto impede que essas teorias associem a origem da inércia à interação gravitacional de um corpo com o resto do universo, impedindo-as assim de contemplar o princípio de Mach.⁴

AGRADECIMENTOS

LMC agradece o apoio financeiro recebido durante a realização deste trabalho, na forma de uma bolsa PIBIC do ProIC/DGP/UnB (CNPq, com contrapartida da FUB).

REFERÊNCIAS

- [1] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I: O Movimento dos Corpos*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990.
- [2] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) e Livro III: O Sistema do Mundo (tratado matematicamente)*. São Paulo: Edusp, 2008.
- [3] A. Einstein, *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 2), 778 (1915). Ver adendo na pág. 801.
- [4] A. Einstein, *Annalen der Physik***49**, 769 (1916).
- [5] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 33 (1918).

³Note que esta semelhança com a força usada na eletrodinâmica de Weber faz com que o mesmo resultado não-nulo seja esperado no caso de uma carga puntiforme q sendo acelerada dentro de uma casca esférica uniformemente carregada com carga Q . De fato, isto foi previsto por Assis em 1993 [11] e observado por Mikhailov em três ocasiões [12, 13, 14].

⁴De fato, o jovem Einstein foi muito influenciado pelo livro “A ciência da mecânica”, de Mach [15]. Assim, a sua TRG foi, essencialmente, uma tentativa de implementar quantitativamente o princípio de Mach. Porém, ele acabou optando por uma teoria que não é *completamente relacional*, qual seja a TRG, na qual *um corpo tem inércia mesmo em um Universo vazio* (de Sitter), o que *contraria frontalmente o princípio de Mach* [16, 17].

- [6] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **22**, 29 (1921).
- [7] A. K. T. Assis, *Found. Phys. Lett.* **2**, 301 (1989).
- [8] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber*. Campinas, São Paulo: Ed. Unicamp, 1995.
- [9] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e implementação do princípio de Mach com a força de Weber Gravitacional*. Montreal, Canada: Apeiron, 2013.
- [10] F. A. Palacios, R. B. Passaglia, and F. M. S. Lima, *Physicae Organum* **2**(2), 1 (2016).
- [11] A. K. T. Assis, *J. Phys. Soc. Japan* **62**, 1418 (1993).
- [12] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **24**, 161 (1999).
- [13] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **26**, 33 (2001).
- [14] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **28**, 231 (2003).
- [15] E. Mach. *The science of mechanics*, 6th Ed. La Salle: Open Court, 1960.
- [16] M. Reinhardt, *Zeit. Naturforschung A* **28**, 529 (1973).
- [17] D. J. Raine, *Rep. Progress Phys.* **44**, 1151 (1981).