Physicae Organum, v. 9, n. 1, p. 76-87, Brasília, 2024.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

PHYSICÆ ORGANUM

Artigo Original

Física geral

Problema de dois corpos. Parte II: Modelo relativístico original de Einstein

Two-body problem. Part II: Einstein's original relativistic model

Fábio M. S. Lima*[1]

[1]Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

Neste artigo, apresentamos a segunda parte de um longo trabalho sobre o problema clássico do movimento de dois corpos interagindo através de uma força que age ao longo da reta que os une, trabalho este que começou, na parte I, com a análise do movimento orbital obtido com a força gravitacional de Newton (1687), contendo a resolução matemática completa, com a solução analítica exata, em pleno acordo com as três leis de Kepler. Aqui nesta segunda parte, apresentamos a tradução inédita para o português do artigo original de Einstein (em alemão), publicado em novembro de 1915, em que ele usa a Teoria da Relatividade Geral (TRG) para obter uma solução aproximada para o problema de dois corpos, obtendo órbitas elípticas com uma taxa de precessão do periélio que está em ótimo acordo com o valor observado para o planeta Mercúrio (43″/século), mas, como ele próprio acaba admitindo, não está em acordo com os valores observados para os demais planetas do sistema solar. Isso nos permitirá, na parte 3 (a ser publicada neste mesmo periódico), comparar o modelo relativístico com a solução exata fornecida pela Mecânica Relacional (1989). Pretendemos, com isso, mostrar que, embora a TRG e a Mecânica Relacional forneçam a mesma taxa de precessão para Mercúrio, as equações de movimento não são idênticas. Também mostraremos que o avanço do periélio previsto pela Mecânica Relacional se dá em relação às estrelas fixas, justamente como ele tem sido observado e medido pelos astrônomos, o que não ocorre nos modelos relativísticos.

Palavras-chave: *Força gravitacional. Problema de dois corpos. Precessão do periélio de Mercúrio. Teoria da Relatividade Geral.*

Abstract

In this article, we present the second part of a long work on the classical problem of the movement of two bodies interacting through a force that acts along the straight line that joins them, a work that began, in part I, with the analysis of orbital motion obtained with Newton's gravitational force (1687), containing the complete mathematical resolution, with the exact analytical solution, in full agreement with Kepler's three laws. Here in this second part, we present the unprecedented translation into Portuguese of Einstein's original article (in German), published in November

*Corresponding author: fabio@fis.unb.br

1915, in which he uses the General Theory of Relativity (TRG) to obtain an approximate solution to the problem of two bodies, obtaining elliptical orbits with a perihelion precession rate that is in excellent agreement with the value observed for the planet Mercury (43″/century), but, as he himself ends up admitting, is not in agreement with the observed values to the other planets in the solar system. This will allow us, in part 3 (to be published in this same journal), to compare the relativistic model with the exact solution provided by Relational Mechanics (1989). We intend, with this, to show that, although the TRG and Relational Mechanics provide the same precession rate for Mercury, the equations of motion are not identical. We will also show that the advancement of perihelion predicted by Relational Mechanics occurs in relation to fixed stars, precisely as it has been observed and measured by astronomers, which does not occur in relativistic models.

Keywords: *Gravitational force. Two-body problem. Precession of Mercury's perihelion. Theory of General Relativity.*

I. Introdução

Nas observações astronômicas acuradas obtidas em meados do séc. XIX, foram detectados pequenos desvios em relação à solução exata do problema de dois corpos newtoniano, obtida de forma completa na parte 1 deste trabalho [1]. Em 1846, o matemático e astrônomo francês Urbain J. J. Le Verrier (1811–1877) previu, com base nas pertubações observadas na órbita de Urano (descoberto em 1781 por Herschel), que deveria haver um planeta mais distante provocando tais distúrbios, o que foi confirmado quatro semanas depois, com a descoberta do planeta Netuno pelos astrônomos Johann Gottfried Galle e Heinrich d'Arrest.[1] Já para a órbita de Mercúrio em torno do Sol, cuja excentridade é a maior dentre os planetas do sistema solar (aproximadamente $0{,}2056$), Le Verrier analisou os dados medidos entre 1697 e 1848, e concluiu, em 1859, que, embora os outros planetas provoquem um movimento secular de precessão do eixo das ápsides, a taxa de precessão observada era 38″/século maior do que a prevista pelo modelo newtoniano completo, que inclui a atração gravitacional dos outros planetas [2].[2] Em 1882, esse valor foi corrigido por Simon Newcomb para $(43 \pm 1)''$/século, com base em observações de 1677 a 1881 [3, 4].[3] Assim, após dois séculos de sucesso, surgiu um fenômeno incompatível com as leis de Newton do movimento e da gravitação. Confiante

[1]Da mesma forma, pequenas perturbações nas trajetórias de Urano e Netuno sugeriram que haveria um planeta mais distante ainda, o que só seria confirmado com a descoberta de Plutão em 1930, por Clyde Tombaugh.

[2]A taxa total de precessão do periélio de Mercúrio observada pelos astrônomos atualmente é de $(5600 \pm 0{,}401)''$/século, dos quais aproximadamente 5025″/século são devidos aos movimentos de rotação e translação da Terra (referencial não-inercial) em relação ao ICRF (International Celestial Reference Frame), que atualmente é o referencial-padrão para medidas astronômicas, sendo um referencial **em repouso em relação às galáxias distantes**. Dos $(574{,}10 \pm 0.65)''$/século restantes, 532,30″/século são explicados pela teoria newtoniana, ao incluir-se a atração gravitacional dos outros planetas do sistema solar. O efeito da forma não-esférica do Sol contribui apenas com $0{,}03''$/século.

[3]Trata-se de um desvio angular muito pequeno ($1'' = 1^\circ/3600$), mas foi possível medí-lo, pois a precisão das observações astronômicas já era de 5″/século. As melhores medidas atuais para a taxa residual fornecem $(42.98 \pm 0.1)''$/século [5].

na mecânica newtoniana, Le Verrier propôs que esse desvio estaria sendo causado por um planeta mais próximo do Sol (Volcano), mas ele nunca foi observado.

No início do séc. XX, essa anomalia na taxa de precessão do periélio de Mercúrio se tornaria um dos poucos problemas em aberto na Física Clássica, o que chamou a atenção do jovem Albert Einstein em 1907, no início do desenvolvimento da sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), ocasião em que ele afirmou que a explicação dessa anomalia seria *um importante teste para qualquer nova teoria de gravidade* [4, 6]. Em 1913, Einstein e Michele Besso chegaram a escrever um longo manuscrito,[4] no qual tentam resolver esse problema gravitacional usando a teoria tensorial de Einstein-Grossmann, mas obtiveram apenas 18"/século [6]. Em novembro de 1915, Einstein finalmente chegou a uma versão da TRG que fornece o resultado observado pelos astrônomos, i.e. 43"/século [7].[5] Analisaremos, a seguir, este modelo relativístico *original*, no qual Einstein teve que fazer várias aproximações (as equações diferenciais parciais da TRG são *não-lineares*) a fim de mostrar que, embora ele forneça o valor esperado para a taxa de precessão, tal movimento *não se dá em relação às estrelas fixas (como deveria ser, pois é em relação a elas que ele é observado e medido pelos astrônomos)*, visto que elas não foram incluídas no modelo.

Veremos, na próxima seção, como é o modelo relativístico proposto originalmente por Einstein em 1915, logo após ele obter as equações covariantes do campo gravitacional [9]. Trata-se de uma tradução inédita para o português do artigo original (em alemão), publicado em 18 de novembro de 1915 [7], no qual Einstein usou coordenadas retangulares para gerar uma aproximação para o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa.[6] Note que o modelo relativístico mais simples, baseado na métrica de Schwartzchild, mais adequada para um universo com simetria esférica, em que só existe uma esfera de massa M, centrada na origem, gera uma solução relativística *exata*, como pode ser visto em diversos livros-texto (ver, e.g., o Cap. 9 da Ref. [10] ou a Ref. [11]), porém o modelo de Schwartzchild só seria publicado em 1916 [12].[7]

[4]O documento original foi vendido diversas vezes, ressurgindo em 2021, em um leilão em Paris.

[5]Entretanto, o seu artigo mais conhecido é o que foi publicado em 1916, no prestigiado periódico alemão *Annalen der Physik* (ver Ref. [8]), no qual Einstein exibe apenas o resultado final do cálculo aproximado do avanço do periélio.

[6]Título original (em alemão): Erklärung der perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie [7].

[7]De fato, Einstein tomou conhecimento dessa solução exata ainda em 22 de dezembro de 1915, através de uma carta enviada por Schwartzchild diretamente do *front* russo, durante a 1^a Guerra Mundial [13].

II. Tradução do artigo original [7]

Explicação do movimento do periélio de Mercúrio a partir da teoria da relatividade geral

por A. Einstein

Em um trabalho publicado recentemente nestes anais, eu obtive as equações do campo gravitacional que são covariantes com respeito a transformações arbitrárias com determinante 1. Em um suplemento, eu mostrei que estas equações são geralmente covariantes se a contração do tensor de energia da "matéria" for desprezível, e eu demonstrei que não há objeções significantes à introdução desta hipótese, através da qual o tempo e o espaço são privados do último vestígio de realidade objetiva.[1]

No presente trabalho, eu encontro uma importante confirmação dessa teoria mais fundamental da relatividade, mostrando que ela explica qualitativa e quantitativamente a rotação secular da órbita de Mercúrio (no mesmo sentido do movimento orbital), o qual foi descoberto por Leverrier e cujo valor é 45 segundos de arco por século. Além disso, eu também mostro que a teoria tem como consequência que a curvatura dos raios de luz devido a campos gravitacionais é duas vezes maior do que foi indicado na minha investigação anterior.[2]

§1. **O campo gravitacional**.

Das minhas duas últimas comunicações, segue que o campo gravitacional no vácuo tem que satisfazer, ao escolhermos adequadamente o sistema de referência, as equações

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\, \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0\,, \tag{1}$$

onde os $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são definidos pelas equações

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv -\left\{ \begin{array}{c} \mu\,\nu \\ \alpha \end{array} \right\} = -\sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left[\begin{array}{c} \mu\,\nu \\ \beta \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} \right). \tag{2}$$

Vamos assumir, além disso, a hipótese adotada na minha última comunicação, de que a contração do tensor de energia da "matéria" sempre torna-se desprezível, de modo que, adicionalmente, a seguinte condição sobre o determinante é imposta

$$|g_{\mu\nu}| = -1\,. \tag{3}$$

[1] Em uma próxima comunicação, será mostrado que esta hipótese é desnecessária. Isto porque pode-se escolher o referencial de forma que o determinante $|g_{\mu\nu}|$ valha -1. A investigação que segue, então, é independente desta escolha.

[2] E. Freundlich escreveu recentemente um notável artigo sobre a impossibilidade de explicar satisfatoriamente as anomalias do movimento de Mercúrio com base na teoria de Newton (*Astronomische Nachrichten* vol. 201, 49, junho de 1915).

Considere que uma massa puntiforme (o Sol) esteja localizado na origem do sistema de coordenadas. O campo gravitacional que esta massa puntiforme produz pode ser calculado a partir destas equações por meio de *aproximações sucessivas*.

Seria melhor, entretanto, considerar que os $g_{\mu\nu}$, dada a massa do Sol, ainda não estão completamente determinados matematicamente pelas equações (1) e (3), pois estas equações são covariantes com respeito a transformações arbitrárias com determinante 1. No entanto, pode-se considerar que todas essas soluções podem ser reduzidas umas às outras por tais transformações, ou seja, que (dadas as condições de contorno) elas diferem umas das outras apenas formalmente, mas não fisicamente. Seguindo essa convicção, contento-me por enquanto em obter uma solução, sem entrar na questão de saber se ela é única.

Procedendo dessa maneira, os $g_{\mu\nu}$ são dados na aproximação de ordem zero pelo seguinte esquema, que corresponde à teoria da relatividade original

$$\left.\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right\}, \tag{4}$$

ou, mais sucintamente,[3]

$$\left.\begin{array}{l} g_{\rho\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \\ g_{44} = 1 \end{array}\right\}. \tag{4a}$$

Aqui, ρ e σ significam os índices 1,2,3; $\delta_{\rho\sigma}$ é igual a 1 se $\rho = \sigma$ ou 0 se $\rho \neq \sigma$.

A seguir, assumiremos que os $g_{\mu\nu}$ diferem dos valores dados em (4a) apenas por quantidades que são pequenas em comparação com a unidade. Trataremos esse desvio como uma pequena quantidade de primeira ordem, e as funções de grau n desses desvios como quantidades de ordem n. As equações (1) e (3) nos permitem, a partir de (4a), calcular o campo gravitacional com precisão até quantidades de ordem n por aproximações sucessivas. Nesse sentido, falamos da n-ésima aproximação; as equações (4a) formam a aproximação de ordem zero.

A solução dada abaixo tem as seguintes propriedades que definem o sistema de coordenadas:

1. Todas as componentes são independentes de x_4.

2. A solução é espacialmente simétrica em torno da origem do sistema de coordenadas, no sentido de que encontramos a mesma solução novamente se a submetemos a uma transformação linear espacial ortogonal.

3. As equações $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ têm validade exata para $\rho = 1,2,3$.

4. Os $g_{\mu\nu}$ possuem os valores dados na equação (4a) no infinito.

---

[3] Nota do tradutor: Parece ter ocorrido um erro tipográfico na primeira equação, pois o certo é $g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma}$.

PRIMEIRA APROXIMAÇÃO.

É fácil verificar que as equações (1) e (3), bem como as quatro condições mencionadas acima, são satisfeitas para quantidades de primeira ordem pela solução

$$\left.\begin{array}{l} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} + \alpha\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_\rho \partial x_\sigma} - \frac{\delta_{\rho\sigma}}{r}\right) = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\,\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \\ g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r} \end{array}\right\}. \tag{4b}$$

Os $g_{4\rho}$ e $g_{\rho 4}$ são determinados pela condição 3, r significa a distância $+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, e α é uma constante determinada pela massa solar.

Vê-se imediatamente que a equação (3) é satisfeita por termos de primeira ordem. Para ver de forma simples que as equações de campo (1) também se cumprem em uma primeira aproximação, basta ter em mente que, se quantidades de segunda ordem e superiores forem desprezadas, o lado esquerdo da equação (1) pode ser permutado sucessivamente através de

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix},$$

com α indo somente de 1 até 3.

Como pode ser visto na equação (4b), minha teoria implica que no caso de uma massa em repouso, as componentes g_{11} a g_{33} já são diferentes de zero na primeira ordem. Mais adiante provaremos que não há contradição com a lei de Newton (na primeira aproximação), mas isso resulta em uma influência um pouco diferente do campo gravitacional em um feixe de luz do que em meu trabalho anterior, porque a velocidade da luz é determinada pela equação

$$\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0\,, \tag{5}$$

precisamente. Usando o princípio de Huygens, encontra-se com as equações (5) e (4b), por um cálculo simples, que um raio de luz que passa pelo sol a uma distância Δ sofre uma deflexão angular de magnitude $2\alpha/\Delta$, enquanto os cálculos anteriores, que não foram baseados na hipótese $\sum T^\mu_\mu = 0$, resultaram no valor α/Δ. Assim, um raio de luz que passa bem próximo da superfície do sol sofre uma deflexão de 1,7″ (em vez de 0,85″). Por outro lado, o resultado do deslocamento das linhas espectrais pelo potencial gravitacional, confirmado pelo Sr. Freundlich em ordem de grandeza para as estrelas fixas, permanece inalterado, pois este depende apenas de g_{44}.

Uma vez obtidos os $g_{\mu\nu}$ em primeira aproximação, nós também podemos calcular uma aproximação de primeira ordem para as componentes $T^\alpha_{\mu\nu}$ do campo gravitacional. De (2) e (4b) segue que

$$\Gamma^\tau_{\rho\sigma} = -\alpha\left(\delta_{\rho\sigma}\frac{x_\tau}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{x_\rho x_\sigma x_\tau}{r^5}\right), \tag{6a}$$

onde ρ, σ, τ significam qualquer um dos índices 1, 2, 3, e

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = \Gamma^{4}_{4\sigma} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{x_\sigma}{r^3}\,, \tag{6b}$$

onde σ significa os índices 1, 2 ou 3. Aquelas componentes nas quais o índice 4 aparece uma vez ou três vezes desaparecem.

SEGUNDA APROXIMAÇÃO.

Veremos mais adiante que precisamos determinar apenas as três componentes Γ^{σ}_{44} em magnitudes de segunda ordem para sermos capazes de determinar as órbitas dos planetas com o grau de precisão desejado. A última equação de campo junto com as condições gerais que impusemos à nossa solução são suficientes para isso. A última equação de campo

$$\sum_{\sigma}\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{44}}{\partial x_\sigma} + \sum_{\sigma,\tau}\Gamma^{\sigma}_{4\tau}\,\Gamma^{\tau}_{4\sigma} = 0,$$

torna-se, levando em conta a equação (6b) e ignorando quantidades de terceira ordem e superior,[4]

$$\sum_{\sigma}\frac{\partial\Gamma^{\sigma}_{44}}{\partial x_\sigma} = -\frac{\alpha^2}{2\,r^4}.$$

A partir disso, nós concluímos, levando em conta novamente a equação (6b) e as propriedades de simetria de nossa solução, que

$$\Gamma^{\sigma}_{44} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{x_\sigma}{r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \tag{6c}$$

§2. **O movimento dos planetas**.

As equações de movimento de um ponto material no campo gravitacional fornecidas pela teoria da relatividade geral são:

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma,\tau}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau}\,\frac{dx_\sigma}{ds}\,\frac{dx_\tau}{ds}. \tag{7}$$

A partir desta equação, vamos primeiro mostrar que elas contêm as equações de movimento de Newton como uma primeira aproximação. Obviamente, se o movimento do planeta ocorre a uma velocidade [muito] menor que a velocidade da luz, então dx_1, dx_2, dx_3 são pequenos em comparação com dx_4. Consequentemente, obtemos uma primeira aproximação considerando apenas o termo com $\sigma = \tau = 4$ no lado direito. Levando em conta a equação (6b), obtemos então

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_\nu}{ds^2} = \Gamma^{\nu}_{44} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{x_\nu}{r^3} \qquad (\nu = 1,2,3)\\ &\frac{d^2x_4}{ds^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7a}$$

[4] Nota do tradutor: No texto original, Einstein esqueceu do sinal negativo no lado direito dessa equação.

Estas equações mostram que, para uma primeira aproximação, pode-se por $s = x_4$. Então, as três primeiras equações são exatamente as equações [de movimento] newtonianas. Se introduzirmos as coordenadas polares r, ϕ no plano orbital, então, como é bem conhecido, a lei da conservação da energia e a lei das áreas [i.e., a 2^a lei de Kepler] fornecem as equações

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, u^2 + \Phi &= A \\ r^2 \, \frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned}\right\} , \tag{8}$$

onde A e B são as constantes da lei da energia, e onde

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\alpha}{2r} \\ u^2 &= \frac{dr^2 + r^2\, d\phi^2}{ds^2} \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

estão bem definidos.

Agora nós temos que avaliar as equações até a próxima ordem de aproximação. A última das equações (7) fornece, então, juntamente com a equação (6b),

$$\frac{d^2 x_4}{ds^2} = 2 \sum_\sigma \Gamma^4_{\sigma 4} \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_4}{ds} = -\frac{dg_{44}}{ds} \frac{dx_4}{ds} ,$$

ou, o que é correto até a primeira ordem,

$$\frac{dx_4}{ds} = 1 + \frac{\alpha}{r} . \tag{9}$$

Agora, vamos voltar para a primeira das equações (7). O lado direito dela fornece:

a) para a combinação de índices $\sigma = \tau = 4$, teremos

$$\Gamma^\nu_{44} \left(\frac{dx_4}{ds} \right)^2$$

ou, considerando as equações (6c) e (9) corretas até a segunda ordem,

$$-\frac{\alpha}{2} \frac{x_\nu}{r^3} \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right) ;$$

b) para as combinações de índices com $\sigma \neq 4$, $\tau \neq 4$ (as quais ainda precisam ser consideradas), levando em conta o produto $(dx_\sigma/ds)\,(dx_\nu/ds)$ e usando a equação (8) em primeira ordem,[5] correta até a segunda ordem,

$$-\frac{\alpha\, x_\nu}{r^3} \sum_{\sigma,\tau} \left(\delta_{\sigma\tau} - \frac{3}{2} \frac{x_\sigma\, x_\tau}{r^2} \right) \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\tau}{ds} .$$

[5]Nesta circunstância, podemos nos contentar com as componentes do campo $\Gamma^\nu_{\sigma\tau}$ com a primeira aproximação dada na equação (6a).

A soma final fica

$$-\frac{\alpha\, x_\nu}{r^3}\left[u^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right].$$

Usando este valor, nós obtemos para a equação de movimento a forma, correta até a segunda ordem,

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{x_\nu}{r^3}\left[1 + \frac{\alpha}{r} + 2\,u^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right], \tag{7b}$$

que junto com a equação (9) determina o movimento da massa puntiforme. Aliás, deve-se notar que as equações (7b) e (9) não produzem nenhum desvio em relação às três leis de Kepler para o caso de movimentos circulares.

Da equação (7b) segue-se a validade exata da equação

$$r^2\,\frac{d\phi}{ds} = B, \tag{10}$$

onde B é uma constante. A lei das áreas é válida até a segunda ordem se usarmos o "tempo próprio" do planeta para medir o tempo. Para determinar a rotação secular da elipse orbital a partir da equação (7b), substitui-se os termos de primeira ordem entre colchetes vantajosamente usando a equação (10) e a primeira das equações (8), processo pelo qual os termos de segunda ordem no lado direito não são alterados. Com isso, o fator entre colchetes assume a forma

$$\left(1 - 2A + \frac{3\,B^2}{r^2}\right).$$

Por fim, se escolhermos $s\,\sqrt{1-2A}$ como a variável tempo, e se a rebatizarmos de s, nós teremos, com um significado ligeiramente diferente da constante B:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_\nu}{ds^2} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu} \\ \Phi &= -\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{B^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{7c}$$

Para determinar a equação da órbita, nós agora vamos proceder exatamente como no caso newtoniano. Partindo da equação (7c), nós primeiro obtemos

$$\frac{dr^2 + r^2\,d\phi^2}{ds^2} = 2A - 2\Phi.$$

Eliminando ds desta equação com a ajuda da equação (10), nós obtemos

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 = \frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}\,x - x^2 + \alpha\,x^3, \tag{11}$$

onde estamos denotando por x a quantidade $1/r$. Esta equação difere da correspondente na teoria newtoniana somente pelo último termo do lado direito.

O ângulo descrito pelo raio-vetor entre o periélio e o afélio é, portanto, dado pela integral elíptica

$$\phi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}\, x - x^2 + \alpha\, x^3}},$$

onde α_1 e α_2 são as raízes da equação

$$\frac{2A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}\, x - x^2 + \alpha\, x^3 = 0$$

que correspondem às raízes vizinhas da equação que resulta desta quando omitimos o último termo.

Assim, pode-se estabelecer, com a precisão que exigimos, que[6]

$$\phi = \left[1 + \alpha\, \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right] \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)\,(1 - \alpha\, x)}},$$

ou, usando a expansão binomial de primeira ordem para aproximar $(1 - \alpha\, x)^{-1/2}$,

$$\phi = \left[1 + \alpha\, \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}\right] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\, x\right)\, dx}{\sqrt{-\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2)}}.$$

A integração fornece

$$\phi = \pi \left[1 + \frac{3}{4}\, \alpha\, (\alpha_1 + \alpha_2)\right],$$

ou, considerando que α_1 e α_2 são os recíprocos das distâncias máxima e mínima até o Sol, respectivamente,

$$\phi = \pi \left(1 + \frac{3}{2}\, \frac{\alpha}{a\,(1 - e^2)}\right). \tag{12}$$

Portanto, após uma órbita completa, o periélio se desloca

$$\epsilon = 3\,\pi\, \frac{\alpha}{a\,(1 - e^2)} \tag{13}$$

no mesmo sentido do movimento orbital, onde a denota o semi-eixo maior e e denota a excentricidade da elipse. Se chamarmos o período orbital de T (em segundos), obtém-se, se c é a velocidade da luz em cm/s:

$$\epsilon = 24\,\pi^3\, \frac{a^2}{T^2\, c^2\, (1 - e^2)}. \tag{14}$$

Para o planeta Mercúrio, o cálculo dá um avanço do periélio de 43″ por século, enquanto os astrônomos obtiveram 45″ ±5″ por século como sendo a diferença não explicada entre as observações e a teoria de Newton. Isso significa total concordância da teoria relativística com as observações.[7]

[6] Nota do tradutor: No texto original, falta dividir a soma $\alpha_1 + \alpha_2$ por 2. Este mesmo fator $1/2$ também foi acrescentado na equação seguinte.

[7] Nota do tradutor: Uma análise relativística mais precisa prediz 42.980″/século. Atualmente, as melhores medidas da taxa de precessão do periélio de Mercúrio fornecem $(42.98 \pm 0.1)''$/século [5].

Para a Terra e Marte, os astrônomos mediram um avanço do periélio de 11″ e 9″ por século, respectivamente, enquanto nossa fórmula dá apenas 4″ e 1″ por século, respectivamente. No entanto, devido à baixa excentricidade das órbitas desses planetas, esses dados parecem ter um valor pouco confiável. Mais decisivo para a determinação segura do movimento do periélio é o seu produto com a excentricidade $(e\, d\pi/dt)$. Considerando os valores dados por Newcomb para este produto

$$\begin{array}{lc} & e\,\frac{d\pi}{dt} \\ \text{Mercúrio} & 8.48'' \pm 0.43 \\ \text{Vênus} & -0.05 \pm 0.25 \\ \text{Terra} & 0.10 \pm 0.13 \\ \text{Marte} & 0.75 \pm 0.35 \end{array} ,$$

pelos quais eu agradeço ao Dr. Freundlich, então fica-se com a impressão de que um avanço do periélio só foi realmente comprovado para Mercúrio. Contudo, eu gostaria de deixar o julgamento final sobre essa questão para os astrônomos especialistas.

Agradecimentos

O autor agradece o auxílio na revisão do texto final prestado pelo Sr. Paulo Speri de Souza Lima.

Referências

[1] F. M. S. Lima, "Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler", *Physicae Organum* **10**(1), xxx (2024). 77

[2] U. J. J. Le Verrier, "Theorie du Mouvement de Mercure", *Annales de l'Observatoir Impirial de Paris* **V**, 1–196 (1859). 77

[3] S. Newcomb, "Discussion and results of observations on transits of Mercury from 1677 to 1881", Astr. Pap. am. Ephem. naut. Alm., **1**, 367–487 (U.S. Govt. Printing Office, Washington D.C., 1882). 77

[4] J.-P. Provost and C. Bracco, "Lorentz's 1895 transformations, Einstein's equivalence principle and the perihelion shift of Mercury", *Eur. J. Phys.* **39**, 065602 (2018). 77, 78

[5] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, and E. Bertschinger. *Exploring Black Holes*, 2nd Ed., Chap. 10. Freely available online at: `https://www.eftaylor.com/exploringblackholes/Ch10AdvanceOfMercurysPerihelion200331v1.pdf` 77, 85

[6] H. Gutfreund, *The Einstein-Besso Manuscript, a Landmark on Einstein's Road to the General Theory of Relativity*. Disponível em: `https://blog.frontiersin.org/2022/05/04/children-in-science-the-einstein-besso-manuscript` 78

[7] A. Einstein, "Erklärung der perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie" [Explanation of the perihelion motion of Mercury from the General Theorie of Relativity], *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 3), Vol. **11**, 831–839 (1915). 78, 79

[8] A. Einstein, "Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" [The foundation of the General Theory of Relativity], *Annalen der Physik* **49**, 769–822 (1916). 78

[9] A. Einstein, "Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie" [Fundamental Ideas of the General Theory of Relativity and the Application of this Theory in Astronomy], *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 1), 315 (1915). 78

[10] J. V. Narlikar. *An Introduction to Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2010. 78

[11] Ana Luiza B. B. G. da Silva, *Desvio do periélio de Mercúrio na relatividade geral*. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC, Bacharelado em Física), Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. 78

[12] K. Schwarzschild, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie", Reimer, Berlin, S. 189 (1916). [Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1916] 78

[13] Letter from K. Schwarzschild to A. Einstein, dated 22 December 1915. In "The Collected Papers of Albert Einstein", vol. 8a, doc.#169. 78