



Problema de dois corpos. Parte I: teoria newtoniana e leis de Kepler

Two-body problem. Part I: Newtonian theory and Kepler's laws

FÁBIO M. S. LIMA^{*1}

¹Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

Neste artigo, que contém a primeira parte de um longo trabalho sobre o problema clássico do movimento de dois corpos atraindo-se mutuamente através de forças que agem ao longo da reta que os une, apresentamos um texto completo e rico em detalhes técnicos sobre o problema de dois corpos atraindo-se com a força gravitacional de Newton (1687), que certamente servirá como material didático de apoio para professores e alunos envolvidos nas disciplinas de Mecânica Clássica. Após obter a solução analítica exata da equação de movimento e todas as trajetórias possíveis, mostramos que as órbitas limitadas periódicas e não-circulares sempre são elípticas sem avanço do periélio, em pleno acordo com as três leis de Kepler. Indicamos, ao final, como ficam os resultados para o análogo eletrodinâmico, ou seja, dois corpúsculos com cargas elétricas opostas atraindo-se através da força de Coulomb. Na parte 2, a ser publicada neste mesmo periódico, apresentaremos a tradução inédita para o português do artigo original de Einstein (1915), em que ele usa a Teoria da Relatividade Geral para gerar uma solução aproximada para o problema gravitacional de dois corpos relativístico, obtendo órbitas elípticas com uma taxa de precessão do periélio que está em ótimo acordo para o planeta Mercúrio, mas não para os demais planetas. Por fim, na parte 3 apresentaremos a solução exata fornecida pela Mecânica Relacional (1989), o que nos permitirá comparar os modelos de Newton, Einstein e Assis, mostrando que, embora os dois últimos forneçam a mesma taxa de precessão (43"/século), as equações de movimento não são idênticas. Mostraremos também que o avanço do periélio previsto pela Mecânica Relacional se dá em relação às estrelas fixas, justamente como tem sido observado e medido pelos astrônomos, o que não ocorre nos modelos relativísticos.

Palavras-chave: Mecânica Clássica. Força gravitacional. Problema de dois corpos. Precessão do periélio.

*Corresponding author: fabio@fis.unb.br

Abstract

In this article, which contains the first part of a long work on the classical problem of the movement of two bodies attracting each other through forces that act along the straight line that joins them, we present a complete text rich in technical details about the problem of two bodies attracting each other with the gravitational force of Newton (1687), which will certainly serve as supporting teaching material for teachers and students involved in Classical Mechanics subjects. After obtaining the exact analytical solution of the equation of motion and all possible trajectories, we show that periodic and non-circular limited orbits are always elliptical without advancing perihelion, in full agreement with Kepler's three laws. At the end, we indicate what the results look like for the electrodynamic analogue, that is, two corpuscles with opposite electrical charges attracting each other through the Coulomb force. In part 2, to be published in this same journal, we will present the unprecedented translation into Portuguese of Einstein's original article (1915), in which he uses the Theory of General Relativity to generate an approximate solution to the gravitational problem of two relativistic bodies, obtaining elliptical orbits with a perihelion precession rate that is in excellent agreement for the planet Mercury, but not for the other planets. Finally, in part 3 we will present the exact solution provided by Relational Mechanics (1989), which will allow us to compare the Newton, Einstein and Assis models, showing that, although the last two provide the same precession rate (43"/century), the equations of motion are not identical. We will also show that the advancement of perihelion predicted by Relational Mechanics occurs in relation to fixed stars, precisely as has been observed and measured by astronomers, which does not occur in relativistic models.

Keywords: *Classical Mechanics. Gravitational force. Two-body problem. Precession of perihelion.*

I. INTRODUÇÃO

Na Mecânica Clássica, o problema de determinar o movimento em um sistema composto por duas partículas que interagem apenas entre si, desprezando-se ações externas ao sistema, é conhecido como *problema de dois corpos*. Esse problema foi vislumbrado primeiramente por J. Kepler em 1609 [1], analisando os dados astronômicos obtidos por T. Brahe para a órbita de Marte em torno do Sol, os quais, por uma pequena diferença de 8' de grau, revelaram-se mais compatíveis com uma trajetória *elíptica* do que com a circular, proposta por Copérnico em 1543. Entretanto, a teoria correta só surgiu com Isaac Newton (1642–1727), no seu monumental *Principia* (1687), onde foi proposta uma força gravitacional proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles [2, 3]. A abordagem geométrica usada por Newton logo abriria espaço para o tratamento algébrico/analítico dos franceses e suíços, baseado em equações, de modo que, em 1710, Johann Bernoulli obteve a solução analítica exata do problema de dois corpos, o que permitiu prever com simplicidade e acurácia a trajetória dos astros no sistema solar, tanto para órbitas fechadas quanto abertas.¹ Os exemplos mais comuns são os sistemas

¹O *problema de três corpos*, entretanto, não possui solução em termos de funções *algébricas* das posições e das velocidades dos corpos, como provado por H. Bruns em 1887 [4]. Este resultado foi generalizado em 1896

Sol-planeta (que ficou conhecido como problema de Kepler), Sol-cometa e Terra-Lua.² Na próxima seção, resolveremos o problema de dois corpos gravitacional detalhadamente, reescrevendo-o na forma equivalente de *dois problemas de um corpo*: um corpo fictício com massa M igual à soma das massas dos corpos, localizado no centro de massa (CM) do sistema, o que é trivial [o CM estará em repouso ou movimento retilíneo uniforme (MRU)], e um outro corpo fictício com massa reduzida μ , movendo-se sob a ação da mesma força que age sobre os corpos originais, porém como se ele fosse atraído rumo a um centro fixo (o chamado *problema de força central*).³ Após analisar as possíveis trajetórias, apresentaremos um atalho que permite obter os pontos de retorno das órbitas elípticas (i.e., o periélio e o afélio), a partir dos quais calculamos os parâmetros geométricos da trajetória (semi-eixo maior e excentricidade), bem como os parâmetros físicos (energia mecânica e momento angular).

II. PROBLEMA CLÁSSICO DE DOIS CORPOS

Seja S um *referencial* em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU) em relação ao *espaço absoluto*, que é o referencial inercial utilizado originalmente por Newton [2], ao qual associaremos um sistema de coordenadas cartesianas representado pelos eixos x , y e z , ortogonais entre si e interceptando-se na origem O , como indicado na Fig. 1. Na mesma figura, \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são os vetores-posição de duas partículas com massas m_1 e m_2 , respectivamente. Lá, indicamos também o vetor *posição relativa*

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1)$$

e o vetor-posição do *centro de massa* (CM)

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad (2)$$

onde $M \equiv m_1 + m_2$ é a massa total do sistema. Os vetores \vec{r} e \vec{R} formam as *coordenadas de Jacobi* do sistema. No Apêndice A, mostramos que dois corpos puntiformes *sempre* estão alinhados com o seu CM. As posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 dos corpos reais podem ser obtidas invertendo-se essa mudança de coordenadas,⁴ o que resulta em

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases} \quad (3)$$

por H. Poincaré, mostrando que não existe uma solução exata na forma de funções elementares das posições, velocidades e razões das massas [5]. Poincaré também percebeu que as trajetórias são extremamente sensíveis às condições iniciais (caos determinístico).

²A solução analítica para dois corpos eletrizados atraindo-se com uma força elétrica dada pela lei de Coulomb é análoga.

³Note que se um dos corpos tiver massa muito maior do que a do outro, ele praticamente não se moverá, caso em que a solução do problema de força central funciona muito bem para o *movimento real* do corpo mais leve.

⁴No Apêndice B, isso é feito com um formalismo matricial elegante.

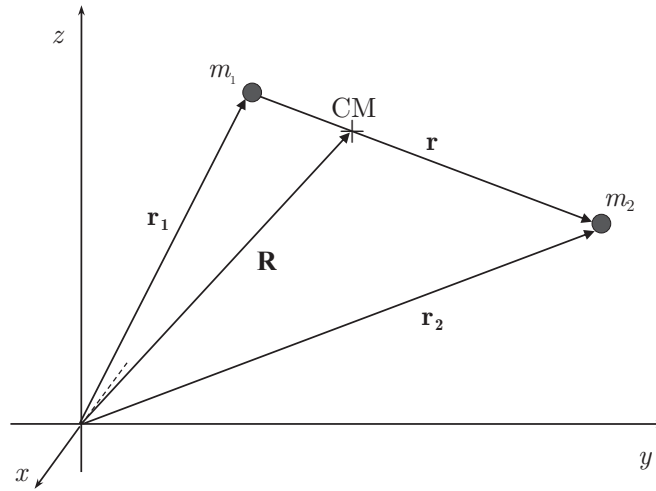


Figura 1: Vetores-posição para dois corpos e para o centro de massa. Note que $\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é o vetor posição-relativa.

Para o sistema de dois corpos isolado de agentes externos, a 2ª lei de Newton fornece

$$\vec{F}_{12} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \quad (4)$$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1. \quad (5)$$

Como é usual na literatura, estamos usando \vec{F}_{12} para denotar a força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2. De acordo com a 3ª lei de Newton, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, ou seja $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -m_2 \ddot{\vec{r}}_2$, o que pode ser escrito como $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$. Isto equivale a

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \vec{0}. \quad (6)$$

Portanto, $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \equiv \vec{P}_{tot} = cte$. Este momento linear pode ser escrito como

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \vec{P}_{CM} = \vec{P}_{tot} = cte. \quad (7)$$

Fica, assim, estabelecida a *conservação da quantidade de movimento total* do sistema de dois corpos, de acordo com a qual o CM do sistema não pode ser acelerado na ausência de forças externas (ou quando a resultante delas for nula). Note que, nesta seção, todos os movimentos e grandezas cinemáticas são relativos ao *espaço absoluto*, como identificado por Newton no início do Livro I do *Principia* (no Escólio, logo após as Definições) [2], que é um referencial invisível, sem relação com nada material (ou seja, o *vácuo*, entendido aqui como o espaço físico desprovido de matéria), cuja existência é “detectada” no famoso *experimento do balde*.⁵ Este referencial encontra-se sempre em *repouso absoluto* e, uma vez aceita a sua existência, qualquer outro referencial em repouso ou MRU em relação a ele será

⁵Newton se convence da existência desse referencial após analisar todas as possibilidades de explicação para a formação da superfície côncava da água, na situação em que ela gira juntamente com o balde [2].

um *referencial inercial* (no qual valem as leis de Newton originais, sem forças fictícias). Da Eq. (1), segue que

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1}, \quad (8)$$

o que implica em

$$m_1 \vec{F}_{12} - m_2 \vec{F}_{21} = m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}, \quad (9)$$

e, da 3ª lei de Newton, conclui-se que

$$\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{12} = \ddot{\vec{r}}, \quad (10)$$

a qual prontamente reduz-se a

$$\vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}}, \quad (11)$$

onde μ é a *massa reduzida* do sistema, dada implicitamente por $1/\mu \equiv 1/m_1 + 1/m_2 = M/(m_1 m_2)$. Esta é a equação diferencial que rege o movimento relativo, que se dá como se uma partícula de massa μ estivesse se movendo sob a ação da força \vec{F}_{12} , a uma distância r de um centro de força *fixo*, o chamado *problema de força central*. Com isso, o problema de dois corpos é reduzido a dois problemas de um corpo: um com massa M localizado no CM, em repouso ou MRU, como previsto na Eq. (7), e outro com massa μ em $\vec{r}(t)$, regido pela Eq. (11).

II.1. Conservação do momento angular e equação diferencial de Binet

Por definição, $\vec{L}_j \equiv \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ é o momento angular da j -ésima partícula. Com isso,

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \\ &= \left(\vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times m_1 \vec{v}_1 + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times m_2 \vec{v}_2 \\ &= \left(m_1 \vec{R} \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{R} \times \vec{v}_2 \right) + \frac{m_1}{M} \vec{r} \times m_2 \vec{v}_2 - \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_1 \\ &= \vec{R} \times (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) + \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ &= \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \vec{R} \times \vec{P}_{CM} + \vec{r} \times \vec{p} \\ &= \vec{L}_{CM} + \vec{L}, \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\vec{p} \equiv \mu \dot{\vec{r}}$ é a quantidade de movimento do corpo fictício de massa μ , $\vec{L}_{CM} \equiv \vec{R} \times \vec{P}_{CM}$ é o momento angular do corpo fictício de massa M e $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular do corpo fictício de massa μ em relação ao centro de força. Da Eq. (7), segue que $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ e, sendo $\vec{L}_{CM} \equiv M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$, então

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = M \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + M \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = \vec{0}, \quad (13)$$

o que mostra que \vec{L}_{CM} é uma constante de movimento. Para o outro momento angular, podemos fazer

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{0} + \vec{r} \times (\mu \ddot{\vec{r}}) \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_{12}. \end{aligned} \quad (14)$$

Estes dois resultados são válidos qualquer que seja a força de interação entre os corpos 1 e 2. Para uma força agindo *ao longo da reta que une os corpos*, caso ao qual iremos nos restringir daqui em diante, necessariamente $\vec{F}_{12} = \alpha \vec{r}$ para algum $\alpha \neq 0$, de modo que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{12} = \vec{r} \times \alpha \vec{r} = \alpha (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0}, \quad (15)$$

mostrando que, para este tipo de força, \vec{L} também é uma constante de movimento. Surgem, então, duas possibilidades:

- (i) $|\vec{L}| = 0$: significa que os vetores \vec{r} e \vec{p} são sempre paralelos, o que só ocorrerá se o movimento relativo for *retilíneo*, com a reta-suporte da trajetória sendo coincidente com a reta que une os corpos (a trajetória retilínea poderá ser observada em qualquer referencial inercial).
- (ii) $|\vec{L}| > 0$: neste caso, existe um eixo perpendicular ao plano fixo no qual a trajetória será descrita, que é o plano definido pelos vetores \vec{r} e \vec{p} . Sem perda de generalidade, escolheremos o plano cartesiano xOy como sendo o plano da trajetória, de modo que o referido eixo será o eixo z .

Para o caso $|\vec{L}| > 0$, em que estamos mais interessados, a equação diferencial que rege o movimento no plano xOy pode ser obtida a partir da 2ª lei de Newton para o movimento relativo, nossa Eq. (11):

$$\vec{F}_{12} = \frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = f m_1 m_2 \hat{r}, \quad (16)$$

onde $f = f(r, \dot{r}, \ddot{r})$. Ou seja,⁶

$$\ddot{\vec{r}} = M f \hat{r}. \quad (17)$$

Assim, a dinâmica do sistema fica determinada pela massa M e pelas condições iniciais $\vec{r}(0)$ e $\vec{v}(0)$. Isto reduz o problema ao de um corpo fictício de massa μ atraído por um outro corpo fictício de massa M fixo na origem $\vec{r} = \vec{0}$, distando r dele. Para resolver a Eq. (17), é

⁶Note que a Eq. (17) só é válida se as *massas inerciais* dos corpos 1 e 2 forem iguais às respectivas *massas gravitacionais*. Na mecânica newtoniana, a igualdade dessas massas é uma *coincidência*, conforme vemos na Proposição 6 do Livro III do *Principia*, onde Newton relata que os experimentos que ele realizou com pêndulos revelaram que uma possível diferença relativa teria que ser menor que $1/1000$ [3]. Experimentos mais precisos foram realizados por Bessel (1832), que reduziu esta possível diferença para 2×10^{-5} , e por Eötvos (1909), que, usando uma balança de torção, reduziu-a para 10^{-8} . De acordo com o experimento mais recente (2017), a diferença é menor do que 10^{-15} [6].

conveniente usarmos *coordenadas polares*, nas quais a aceleração $\ddot{\vec{r}} \equiv d\dot{\vec{r}}/dt$ do corpo fictício de massa μ é dada por (ver dedução no Apêndice C)

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta}. \quad (18)$$

Substituindo isto na Eq. (17), obtemos

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = M f(r, \dot{r}, \ddot{r}) \quad (\text{radial}) \quad (19)$$

e

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (\text{azimutal}). \quad (20)$$

A equação diferencial *azimutal* pode ser reescrita na forma $r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$, a qual reduz-se a $d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$. Isto implica que $r^2\dot{\theta} = \text{cte.} \equiv h$, onde $h = L/\mu = r_0 v_0$ é o momento angular por unidade de massa reduzida.⁷ Como veremos mais adiante, a conservação de h é equivalente à 2ª lei de Kepler (lei das áreas). Usando esta constante de movimento na equação diferencial *radial*, prontamente obtemos

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = M f. \quad (21)$$

Embora o procedimento matemático usual seja resolver esta equação de movimento a fim de determinar $r(t)$ e depois usar a equação azimutal para obter $\theta(t)$, o cálculo da trajetória fica mais simples usando θ como a única variável independente, visando obter $r = r(\theta)$. Para isto, vamos usar o fato de que

$$\begin{aligned} \dot{r} &\equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} \\ &= -h \frac{d(1/r)}{d\theta} \end{aligned} \quad (22)$$

e, com isso,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &\equiv \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{h}{r^2} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d(1/r)}{d\theta} \right] \\ &= -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Estas derivadas sugerem que devemos usar a *substituição de Binet*, qual seja $u = 1/r$, na Eq. (21). Assim,

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = M f, \quad (24)$$

ou seja,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{M}{h^2} \frac{f}{u^2}, \quad (25)$$

que é a *equação diferencial de Binet* (1818).

⁷Note que $\dot{\theta} = L/(\mu r^2)$ pode, a princípio, ser integrada, fornecendo $\theta(t) - \theta_0 = \frac{L}{\mu} \int_0^t \frac{dt'}{[r(t')]^2}$. Para uma órbita *circular*, $r = \text{cte.}$ e a integral é imediata, resultando em $\theta(t) = \theta_0 + L/(\mu r^2) t$, que é a dependência linear em t de um movimento circular uniforme (MCU), no qual $\omega \equiv d\theta/dt = L/(\mu r^2) = \text{cte.}$

II.2. Lei Universal da Gravitação

Vamos determinar a solução $r = r(\theta)$ da E.D.O. de Binet, Eq. (25), no caso da força gravitacional de Newton (1687) [3]:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (26)$$

onde G é a constante universal da gravitação.⁸ Substituindo $f = -G/r^2$ na Eq. (25), obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{M}{h^2} \frac{(-G/r^2)}{u^2} = \frac{GM}{h^2} \frac{1}{u^2 r^2} = \frac{GM}{h^2} = cte., \quad (27)$$

ou, simplesmente,

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2} = cte. \quad (28)$$

Esta é uma E.D.O. linear de 2ª ordem com *coeficientes constantes*, de modo que sua solução necessariamente tem que ser a soma da solução da E.D.O. homogênea associada, ou seja $u'' + u = 0$ (E.D.O. do oscilador harmônico), com uma solução particular. Portanto,

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{h^2}. \quad (29)$$

Para uma trajetória *circular*, teremos $u = 1/r = 1/A = GM/h^2$, de modo que o raio da trajetória será $r = A = h^2/(GM) = cte$. Para outras trajetórias, daqui em diante vamos fixar a origem O no ponto em que se encontra o CM (ou seja, no foco) e o eixo polar passando no periélio, tomado aqui como a posição inicial, i.e. $\vec{r}(0) = r_0 \hat{r} = r_P \hat{r}$, de modo que $\theta_0 = 0$. Com isto, a solução acima reduz-se a $u(\theta) = C \cos \theta + GM/h^2$, o que equivale a

$$r(\theta) = \frac{A}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad \forall \theta \geq 0, \quad (30)$$

que é a equação de uma *curva cônica* em coordenadas polares, onde $A = h^2/(GM)$ é o *semi latus rectum* e $\epsilon = CA = Ch^2/(GM)$ é a excentricidade, como explicado no Apêndice D.⁹

Surgem, então, *três possibilidades*:

- (i) $\epsilon > 1$: neste caso, $C > GM/h^2$ e a trajetória será um *ramo de hipérbole* (trajetória aberta). Note que há dois valores $\theta = \pm \theta_1$ tais que $\cos \theta_1 = -GM/(Ch^2)$, ou seja $\theta_1 = \theta_0 + \arccos(-1/\epsilon)$, obtido com $r \rightarrow \infty$. Em outras palavras, $\theta = \pm \theta_1$ é a equação das *assíntotas*. Obviamente, este caso só ocorrerá se $v_0 > v_{esc}$, onde $v_{esc} = \sqrt{2GM/r_0}$ é a *velocidade de escape*.¹⁰

⁸Esta fórmula não aparece no *Principia*, embora ela possa ser deduzida de alguns trechos do Livro I (Proposições 72 a 76, incluindo os Corolários 1 a 4) e do Livro III (Proposições 5, 7 e 8), bem como no Escólio Geral, no fim do livro [2, 3].

⁹Mais adiante, na Eq. (E.5), mostraremos que $A = a(1 - \epsilon^2)$.

¹⁰A velocidade de escape é obtida aplicando-se a lei de conservação da energia, Eq. (51), para o corpo fictício de massa μ partindo da posição inicial $\vec{r}(0) = r_0 \hat{r}$ com velocidade escalar relativa v_0 , e assumindo que ele atingirá um ponto infinitamente distante com velocidade final nula, de modo que $\mu v_{esc}^2/2 - G m_1 m_2/r_0 = 0$.

- (ii) $\epsilon = 1$: neste caso, $C = GM/h^2$ e a trajetória será uma *parábola*, pois $r \rightarrow \infty$ quando $\theta \rightarrow \pi$ rad (trajetória aberta). Dessa forma,

$$r_0 = \frac{h^2/(GM)}{1 + \cos 0} = \frac{h^2}{2GM}, \quad (31)$$

onde $h = r_0 v_0$. Portanto, $v_0 = \sqrt{2GM/r_0} = v_{esc}$.

- (iii) $0 \leq \epsilon < 1$: isto equivale a $\sqrt{GM/r_0} \leq v_0 < v_{esc}$ e, neste caso, $C < GM/h^2$ e $r(\theta)$ permanece finito e não-nulo para todo $\theta > 0$, o que gera uma trajetória fechada *elíptica*, com foco sobre a origem e *sem precessão do periélio* (em relação ao espaço absoluto).¹¹

As trajetórias correspondentes a cada um destes casos são apresentadas na Fig. 2. Note que, para $v_0 < \sqrt{GM/r_0}$, o corpo fictício de massa μ não poderá manter uma órbita periódica, pois os corpos reais (com tamanho finito) irão se chocar durante sua 'queda' rumo ao CM. Entretanto, aqui neste trabalho vamos nos restringir a *trajetórias sem colisão*.

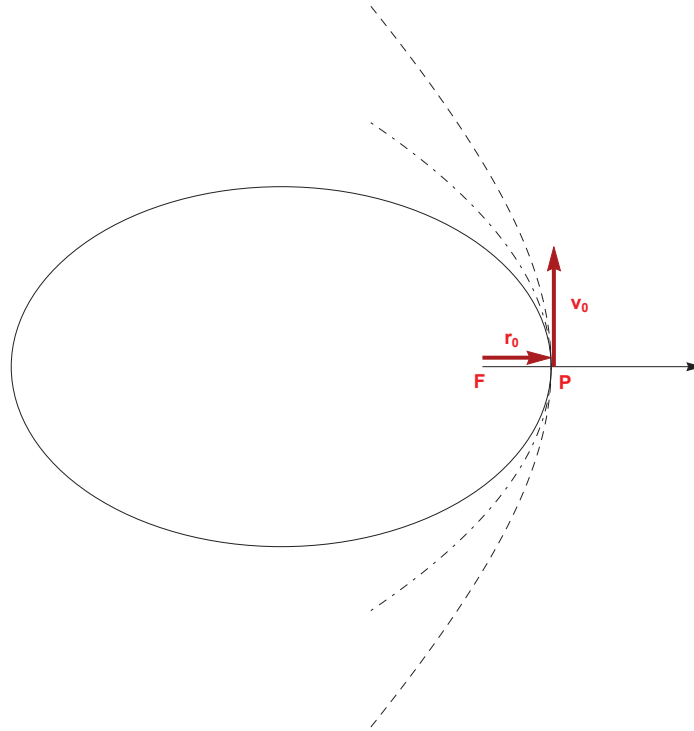


Figura 2: Possíveis trajetórias correspondentes a $r(\theta) = A/(1 + \epsilon \cos \theta)$, produzidas com o software *Mathematica*. Note que \vec{v}_0 é perpendicular a \vec{r}_0 , no periélio. A linha tracejada representa um ramo de hipérbole ($\epsilon > 1$ e $v_0 > v_{esc}$, onde $v_{esc} = \sqrt{2GM/r_0}$). A linha traço-ponto representa uma parábola ($\epsilon = 1$ e $v_0 = v_{esc}$). A linha contínua representa uma elipse ($0 < \epsilon < 1$ e $\sqrt{GM/r_0} < v_0 < v_{esc}$).

Para o corpo fictício de massa μ , tendo em vista que adotamos a posição inicial no periélio — i.e., $\vec{r}(0) = r_0 \hat{i} = r_P \hat{i} = (a - f) \hat{i}$ —, onde $\theta_0 = 0$, vamos escolher a velocidade inicial como

¹¹Em particular, para $\epsilon = 0$, que equivale a $C = 0$, teremos $r(\theta) = A = h^2/(GM) = cte.$, e a trajetória será *circular*. Devido à conservação do momento angular, $v = v_0 = \sqrt{GM/r_0} = cte.$, logo o movimento será um MCU.

$\vec{v}(0) = v_0 \hat{j} = r_p \dot{\theta}_0 \hat{j}$, garantindo assim que ela seja perpendicular a $\vec{r}(0)$ (i.e., ao eixo das ápsides), como é comum no lançamento de satélites. Vejamos, então, como os parâmetros da curva cônica correspondente à trajetória irão depender de r_p e v_0 . Claramente, o estado inicial é tal que $h = L/\mu = r_p v_0 \sin(\pi/2) = r_p v_0 = r_p^2 \dot{\theta}_0$. O parâmetro C é facilmente obtido colocando-se $\theta(0) = 0$ na Eq. (30), o que resulta $r(0) = r_p = A/(1 + \epsilon)$,¹² de modo que

$$C = \frac{1}{r_p} - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_p} - \frac{GM}{r_p^2 v_0^2}. \quad (32)$$

Os parâmetros A e ϵ também são prontamente obtidos em termos das condições iniciais:

$$A = \frac{h^2}{GM} = \frac{r_p^2 v_0^2}{GM} \quad (33)$$

e

$$\epsilon = CA = \left(\frac{1}{r_p} - \frac{GM}{r_p^2 v_0^2} \right) \frac{r_p^2 v_0^2}{GM} = \frac{r_p v_0^2}{GM} - 1. \quad (34)$$

II.3. Leis de Kepler

Agora, vamos mostrar que a solução $r(\theta)$ obtida no caso (iii), acima, é compatível com as três leis empíricas de Kepler, dentro de uma ótima aproximação, desde que $M \gg \mu$.

- 1ª lei de Kepler: esta lei afirma que as órbitas planetárias são elípticas, com o Sol (imóvel) ocupando um dos focos. Como vimos, para $0 \leq \epsilon < 1$ a trajetória será uma *ellipse*, o que ocorrerá sempre que $\sqrt{GM/r_p} \leq v_0 < v_{esc}$. Sendo a massa do Sol muito maior do que a dos planetas, então ele praticamente não se movimenta e o seu centro praticamente coincide com o CM do sistema solar. Assim, como ótima aproximação, podemos afirmar que o Sol está 'fixo' em um dos focos.¹³
- 2ª lei de Kepler: esta lei afirma que a velocidade areolar dos planetas é constante. Para mostrar isto a partir dos resultados obtidos acima, basta utilizar o elemento de área em coordenadas polares, i.e. $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, como ilustrado na Fig. 3, abaixo. Assim, a taxa com que \vec{r} varre a área dS é

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta} = \frac{h}{2} = cte. \quad (35)$$

Portanto, $\Delta S = cte. \times \Delta t$, o que significa que o vetor $\vec{r} = \overrightarrow{FP}$ varrerá áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

- 3ª lei de Kepler: esta lei afirma que $T^2 \propto \bar{r}^3$, onde

$$\bar{r} \equiv (1/\ell) \int_0^\ell r ds = (1/\ell) \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = a$$

¹² Para o *afélio*, substituindo $\theta = \pi$ rad na Eq. (30), obtém-se $r_A = A/(1 - \epsilon)$.

¹³ Para Júpiter, o planeta de maior massa do sistema solar, o CM já não fica tão próximo do centro do Sol.

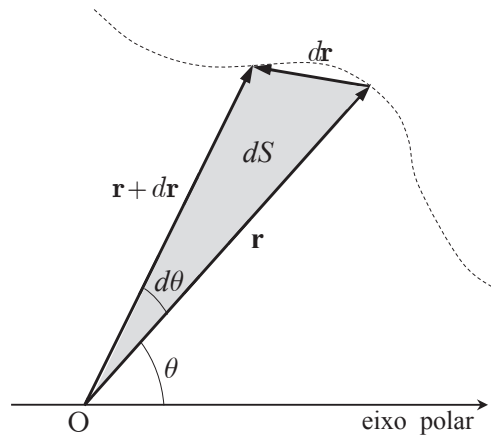


Figura 3: O elemento de área $dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, em coordenadas polares, demarcado pelos vetores-posição \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$, com um ângulo $d\theta$ entre eles.

é a *média espacial* de r [7, Book V, Chap. III, Prop. VIII]. Aqui,

$$\ell = \int ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2} d\theta = 4a E(\epsilon)$$

é o comprimento da elipse, $E(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$ sendo a *integral elíptica completa* do segundo tipo. Essas integrais definidas são resolvidas passo-a-passo na Seç. 3 da Ref. [8] (ver também a Ref. [9]), entretanto no final da pág. 4 seu autor mostra que o mesmo resultado pode ser obtido usando-se uma propriedade geométrica da elipse, *sem resolver nenhuma integral*, como Kepler fez. A seguir, vamos mostrar que esta lei pode ser obtida a partir do resultado acima para $dS/dt = cte.$, em conjunto com a solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (30).

Por definição, o período T da órbita elíptica é o menor intervalo de tempo necessário para que $\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t + T) = \vec{v}(t)$, para todo $t > 0$. Como $dS/dt = h/2 = cte.$, então $\Delta S/\Delta t = h/2 = cte.$ e, para uma volta completa, teremos $S/T = h/2$. Portanto

$$T = 2 \frac{S}{h}, \quad (36)$$

onde S é a área da elipse, que é prontamente determinada fazendo-se

$$\frac{S}{2} = \int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{\pi ab}{2}, \quad (37)$$

onde $y = f(x)$ é a equação da metade superior de uma elipse centrada na origem do plano cartesiano, com eixo maior sobre o eixo x , e, b é o comprimento do semi-eixo menor. Portanto, $T = 2\pi ab/h$. Note que isto relaciona o período T com o momento angular L , pois $h = L/\mu$. Assim, $L = 2\mu \frac{h}{2} = 2\mu dS/dt = cte.$, conforme a 2ª lei de Kepler. Isto nos leva a $L = 2\mu \pi ab/T$. Para completar, usamos a relação fundamental da elipse, i.e. $a^2 = b^2 + f^2$,

onde f é a distância focal, conforme indicado na Fig. 4, para obter $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$ e, com isso, $T = 2\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} / h$. Finalmente, substituindo-se $h = L/\mu$, obtemos

$$L = 2\pi \mu a^2 \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{T}. \quad (38)$$

No Apêndice E mostraremos que $a = A / (1 - \epsilon^2)$ e $b = A / \sqrt{1 - \epsilon^2}$, de modo que a e b só dependem de A e ϵ . Com isso, $b^2 = Aa$, e então

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2} = \frac{4\pi^2 a^2 Aa}{GMA} = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \\ &= \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3. \end{aligned} \quad (39)$$

Esta é a expressão exata da 3ª lei de Kepler. Usando-se $a = A / (1 - \epsilon^2)$ e $A = h^2 / (GM)$, é fácil obter

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} = 2\pi \frac{h^3}{G^2 M^2} \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (40)$$

o que mostra que, para um dado momento angular, a trajetória circular é a de menor período. A última igualdade acima imediatamente nos leva a

$$h \equiv \frac{L}{\mu} = \sqrt{GMa(1 - \epsilon^2)}. \quad (41)$$

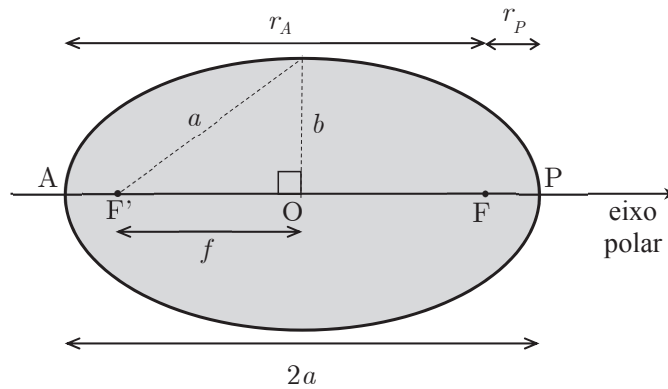


Figura 4: Parâmetros geométricos da elipse. Note que os semi-eixos maior a e menor b formam, juntamente com a distância focal f , um triângulo retângulo. O ponto A indica o afélio e o ponto P o periélio.

II.4. Atalho para a determinação dos parâmetros de órbitas elípticas

Na análise de trajetórias elípticas, outras relações entre os parâmetros podem ser úteis. Por exemplo, partindo da solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (30) e da expressão de r_A exibida na nota de rodapé 12 obtemos

$$\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_A} = \frac{2}{A} = 2 \frac{GM}{h^2} \quad (42)$$

e

$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} = \frac{2}{A} \epsilon = \frac{2GM}{h^2} \epsilon. \quad (43)$$

Um outro exemplo é a expressão do momento angular L em termos de a e ϵ :

$$\frac{L}{\mu} = h = \frac{2\pi ab}{T} = 2\pi \frac{a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}} = a \sqrt{1-\epsilon^2} \sqrt{\frac{GM}{a}}, \quad (44)$$

mostrando, assim, que¹⁴

$$L = \mu \sqrt{GMa(1-\epsilon^2)}, \quad (45)$$

em pleno acordo com a Eq. (41).

Outro ponto interessante é que podemos obter a famosa *equação de Kepler* para $\theta(t)$ a partir da 2ª lei de Kepler, pois $dS/dt = cte. = S/T = \pi ab/T$ nos leva a

$$S(t) = \frac{\pi ab}{T} \int_0^t dt = \frac{\pi ab}{T} t. \quad (46)$$

Por outro lado, em coordenadas polares, $dS = \frac{r^2}{2} d\theta$ implica que $S = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\tilde{\theta}$. Portanto,

$$\frac{\pi ab}{T} t = \frac{A^2}{2} \int_0^\theta \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + \epsilon \cos \tilde{\theta})^2}, \quad (47)$$

onde $A = a(1-\epsilon^2)$, $b = A/\sqrt{1-\epsilon^2}$ e $T = 2\pi \sqrt{a^3/(GM)}$. Esta integral possui solução elementar, a qual pode ser obtida com o *software Mathematica (release 12)*:

$$\frac{2\pi ab}{A^2 T} t = -\frac{\epsilon \sin \theta}{(1-\epsilon^2)(1+\epsilon \cos \theta)} + 2 \frac{\arctan\left[\frac{(1-\epsilon) \tan(\theta/2)}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right]}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (48)$$

Multiplicando-se ambos os membros por $(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}$, esta equação simplifica-se para

$$\frac{\pi}{T} t = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\epsilon^2} \tan(\theta/2)}{1+\epsilon}\right) - \frac{\epsilon \sqrt{1-\epsilon^2} \sin \theta}{2(1+\epsilon \cos \theta)}. \quad (49)$$

A obtenção desta solução $t = t(\theta)$ e, principalmente, a *inversão* desta função para $\theta = \theta(t)$, foi tentada exaustivamente por Kepler, pois os astrônomos medem os pontos da função $\theta(t)$, mas a dificuldade matemática o levou a propor um método aproximativo [10].¹⁵

¹⁴Note que este resultado também pode ser obtido diretamente a partir de $A = h^2/(GM) = a(1-\epsilon^2)$.

¹⁵Na Ref. [11], é provado que é impossível inverter-se funções do tipo da $t(\theta)$ dada na Eq. (49) e, com isso, obter uma função $\theta(t)$ que seja uma combinação finita de funções elementares.

II.5. Parâmetros da órbita elíptica em termos do momento angular e da energia

Para um sistema de dois corpos isolado de agentes externos, já demonstramos que vale a lei de conservação do momento angular total $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = cte.$, onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Para a condição inicial padrão, teremos $L = \mu r v_0 = \mu r^2 \dot{\theta} = cte.$, com a trajetória sendo descrita necessariamente sobre um plano perpendicular a \vec{L} . Adicionalmente, de acordo com a lei de conservação da energia, se os dois corpos interagem através de uma força conservativa (definida como uma força cujo trabalho realizado não depende da trajetória, mas apenas dos pontos inicial e final), então a energia mecânica total $E_{tot} \equiv T_1 + T_2 + V_{12}$ será uma constante de movimento. Assim, para uma tal força,

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= \frac{m_1}{2} \dot{r}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{r}_2^2 + V_{12} \\
 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + V_{12} \\
 &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 - 2 \frac{m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 + 2 \frac{m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) + V_{12} \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \left(\frac{m_1}{2} \frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{M^2} \right) \dot{\vec{r}}^2 - \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2 m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + V_{12} \\
 &= \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} + V_{12} \\
 &= \frac{\vec{P}_{CM}^2}{2M} + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V_{12} = cte.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Sendo \vec{P}_{CM} constante, como vimos na Eq. (7), então a energia cinética $P_{CM}^2/(2M)$ também será uma constante, reduzindo o resultado acima a

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V_{12} = E_{tot} - \frac{P_{CM}^2}{2M} = cte., \tag{51}$$

onde E é a energia mecânica do corpo fictício de massa μ movendo-se em relação ao centro fixo. Esta E.D.O. de 1ª ordem reduz o problema de dois corpos a um problema de um corpo fictício com massa μ localizado em $\vec{r}(t)$, atraído por um centro de força fixo, com os corpos 1 e 2 (bem como o corpo fictício de massa μ) sempre alinhados com o CM. Escolhendo $V_{12} = 0$ em $r \rightarrow \infty$ como referência, obtém-se¹⁶

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\mu}{2} v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \\
 &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - G \frac{m_1 m_2}{r} = cte.
 \end{aligned} \tag{52}$$

¹⁶A energia potencial gravitacional $V_{12}(r) = -G m_1 m_2 / r$ é encontrada com a integral de caminho $V_{12}(\infty) - V_{12}(r) = 0 - V_{12}(r) = -V_{12}(r) = -\int_C \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}$, onde C é qualquer caminho que vai de r até o ponto de referência.

Substituindo $\dot{\theta} = L / (\mu r^2)$ no termo cinético, encontramos

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{L^2}{\mu^2 r^4} \right) - G \frac{m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - G \frac{m_1 m_2}{r} = cte. \end{aligned} \quad (53)$$

Como já sabemos que a trajetória será uma *elipse* se $\sqrt{GM/r_p} < v_0 < v_{esc}$, podemos determinar os valores mínimo e máximo de $r(t)$ ao longo de toda a trajetória (respectivamente r_p e r_A). Isolando a derivada temporal, obtemos¹⁷

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2G \frac{m_1 m_2}{\mu r} \\ &= 2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}. \end{aligned} \quad (54)$$

Aplicando o lema de Fermat, que garante que a derivada é nula nos extremos de uma função diferenciável, teremos, nos pontos de retorno,

$$2 \frac{E}{\mu} r^2 - \frac{L^2}{\mu^2} + 2GM r = 0. \quad (55)$$

Como as massas m_1 e m_2 encontram-se em um estado ligado — i.e., $E < 0$, já que $v_0 < v_{esc} = \sqrt{2GM/r_p}$ —, a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{|E|}{\mu} r^2 - GM r + \frac{L^2}{2\mu^2} = 0, \quad (56)$$

ou seja,

$$r^2 - G \frac{M\mu}{|E|} r + \frac{L^2}{2\mu|E|} = 0. \quad (57)$$

¹⁷Note que a Eq. (54) é equivalente a

$$dt = |dr| / \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}},$$

que é uma E.D.O. *separável*. Para a condição inicial $r(0) = r_0 = r_p$ e $v(0) = v_0$, com $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$, a integração direta fornece

$$t = \pm \int_{r_p}^r 1 / \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 \tilde{r}^2} + 2 \frac{GM}{\tilde{r}}} d\tilde{r}.$$

Aqui, o sinal '+' ('-') deve ser usado nos trechos em que \tilde{r} aumenta (diminui). Isto fornece $t = t(r)$, uma função cuja *inversa* é a função $r = r(t)$, solução da E.D.O. Para os leitores mais interessados, a resolução dessa integral foi incluída no Apêndice F. No texto principal vamos obter r_p e r_A e determinar a órbita elíptica sem resolver integrais.

Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos duas soluções:

$$\begin{aligned} r_{\min}^{\max} &= G \frac{m_1 m_2}{2|E|} \pm \frac{1}{2} \sqrt{G^2 \frac{m_1^2 m_2^2}{E^2} - 2 \frac{L^2}{\mu |E|}} \\ &= G \frac{m_1 m_2}{2|E|} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{|E|}{\mu} \left(\frac{L}{G m_1 m_2} \right)^2} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Para obter a energia E , basta fazer $r_{\max} + r_{\min} = r_A + r_P = 2a$, o que fornece

$$G \frac{m_1 m_2}{2|E|} (1 + \sqrt{\beta}) + G \frac{m_1 m_2}{2|E|} (1 - \sqrt{\beta}) = 2a, \quad (59)$$

onde $\beta \equiv 1 - 2 \frac{|E|}{\mu} \frac{L^2}{(G m_1 m_2)^2}$. Isto prontamente simplifica-se para

$$G \frac{m_1 m_2}{|E|} = 2a, \quad (60)$$

e, por fim,

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{2a}. \quad (61)$$

Além disso, sendo $r_P = a - f$ e $r_A = a + f$, então $r_A - r_P = 2f$, de modo que $(r_A - r_P) / (2a) = 2f / (2a) = f/a = \epsilon$. Portanto, podemos determinar a *excentricidade* da órbita em função de L e E :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2a} = \frac{\frac{G m_1 m_2}{2|E|} \cdot [1 + \sqrt{\beta} - (1 - \sqrt{\beta})]}{2a} = \sqrt{\beta} \\ &= \sqrt{1 + 2 \frac{E}{\mu} \frac{L^2}{(G m_1 m_2)^2}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Note que a energia E pode ser positiva, negativa ou nula.¹⁸ Isto fornece três tipos de trajetória (todas do tipo curva cônica):

(i) $E > 0$: neste caso, $\epsilon > 1$ e teremos uma trajetória *hiperbólica*;

(ii) $E = 0$: neste caso, $\epsilon = 1$ e teremos uma trajetória *parabólica*; ou

(iii) $E_{\min} = -\frac{\mu}{2} \left(\frac{G m_1 m_2}{L} \right)^2 \leq E < 0$: neste caso, $0 \leq \epsilon < 1$ e teremos uma trajetória elíptica estacionária, i.e. *sem precessão do periélio* em relação ao espaço absoluto.¹⁹

Por fim, ressaltamos que o problema de dois corpos eletrizados com cargas q_1 e q_2 de sinais opostos, atraindo-se de acordo com a lei de Coulomb, i.e. $\vec{F}_{21} = k q_1 q_2 / r^2 \hat{r} = -\tilde{k} / r^2$, onde $k = 1 / (4\pi\epsilon_0)$ é a constante de Coulomb e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo,

¹⁸Usando $2|E| = G m_1 m_2 / a$, prontamente obtemos $L = \mu \sqrt{G M a (1 - \epsilon^2)}$, confirmando a Eq. (45).

¹⁹Note que E_{\min} corresponde a uma órbita *circular*, pois $\epsilon = 0$. Para energias menores do que esta, os corpos 1 e 2 não poderão manter órbitas periódicas e irão colapsar no seu CM.

com $\tilde{k} \equiv k |q_1 q_2| > 0$, é *análogo* ao problema de dois corpos gravitacional que acabamos de resolver. Assim, todos os resultados obtidos até aqui valerão para o análogo coulombiano, bastando substituir GM por \tilde{k}/μ .

APÊNDICES

A. ALINHAMENTO DE DOIS CORPOS COM SEU CM

É fácil ver que dois corpos puntiformes *sempre* estão alinhados com o seu CM, bastando mostrar que $\vec{r} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \vec{0}$, $i = 1, 2$. Por exemplo, para \vec{r}_1 (o cálculo para \vec{r}_2 é análogo), basta fazer

$$\begin{aligned} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_1 - \vec{R}) &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{R} - \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{R} \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times (c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2) - \vec{0} + \vec{r}_1 \times (c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2) \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - c_1 \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - c_2 \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 + c_1 \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \\ &= \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + (c_1 + c_2) \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $c_i \equiv m_i/M$, $i = 1, 2$. Como $c_1 + c_2 = (m_1 + m_2)/M = 1$, então

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_1 - \vec{R}) = \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 = \vec{0}, \quad (\text{A.2})$$

como queríamos demonstrar.

B. INVERSÃO DAS COORDENADAS DE JACOBI

Para obter \vec{r}_1 e \vec{r}_2 em termos de \vec{r} e \vec{R} , basta multiplicar (à esquerda) ambos os membros de

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ m_1/M & m_2/M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

pela sua *matriz inversa*, o que resulta em

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ m_1/M & m_2/M \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

onde \mathbf{I}_2 é a *matriz identidade* (de ordem 2). Assim,

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2/M & 1 \\ +m_1/M & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

que é equivalente ao sistema de equações exibido na Eq. (3).

C. VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM COORDENADAS POLARES

Obtemos, aqui, a velocidade e aceleração de um corpo em *coordenadas polares*. Neste sistema de coordenadas, temos $\vec{r} = r \hat{r}$, de modo que a velocidade \vec{v} em coordenadas polares será dada por

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= (r \hat{r})' = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

O último termo decorre do fato de que

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix},\tag{C.2}$$

onde

$$R_\theta \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\tag{C.3}$$

é uma matriz de rotação no plano xOy , a qual produz um giro de θ radianos na direção *anti-horária* quando $\theta > 0$ (e na direção horária quando $\theta < 0$).²⁰ A velocidade e a aceleração são prontamente obtidas notando-se que $\vec{v}^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$ e que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{\hat{r}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{pmatrix} &= \frac{dR_\theta}{dt} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & \cos \theta \dot{\theta} \\ -\cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{C.4}$$

ou seja

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta} (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{r} \end{cases}\tag{C.5}$$

Por fim, a aceleração \vec{a} em coordenadas polares fica:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &\equiv \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta})}{dt} \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\hat{r}} + \dot{r} (\dot{\theta} \hat{\theta}) + r (\dot{\theta} \dot{\hat{\theta}})' \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r (\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}}) \\ &= \ddot{r} \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta} - r \dot{\theta}^2 \hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta}.\end{aligned}\tag{C.6}$$

²⁰Isso vem do fato de que

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}.$$

Como os vetores unitários devem formar uma base, devemos escolher $\hat{\theta}$ de modo que $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$, o que nos deixa com duas opções: $\hat{\theta} = \mp \sin \theta \hat{i} \pm \cos \theta \hat{j}$. Para obter uma base *destrógi*ra, escolhemos $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$.

D. ÓRBITA ELÍPTICA ESTACIONÁRIA EM COORDENADAS POLARES

Em coordenadas *cartesianas*, a equação da elipse centrada em um ponto qualquer (x_c, y_c) e com o semi-eixo maior apoiado sobre o eixo x é ²¹

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1. \quad (D.1)$$

Entretanto, para as trajetórias elípticas que surgem no problema de Kepler, com o Sol (ou, mais precisamente, o centro de massa do sistema Sol-planeta) sobre um dos focos, é vantajoso usar coordenadas *polares*, escolhendo a origem sobre aquele foco, pois isto torna a equação da curva bem mais simples, conforme mostraremos a seguir.

Seja F um ponto fixo qualquer, chamado *foco*, e u uma reta qualquer pertencente ao plano da curva cônica (mas que não passa sobre F), chamada *diretriz*. Por definição, a *excentricidade* ϵ é a razão $\overline{PF}/\overline{PQ}$, onde P é um ponto qualquer da curva cônica e Q é o ponto que marca a menor distância de P até a diretriz, como ilustrado na Fig. 5. Vamos mostrar que a curva cônica será uma *elipse* se $0 \leq \epsilon < 1$.²² Tomando F sobre a origem $(0,0)$ e escolhendo o eixo polar $\theta = 0$ na direção perpendicular à diretriz u , como na Fig. 5, um ponto qualquer $P = (x, y) = (r, \theta)$ pertencente à curva cônica deve ser tal que $\overline{PF} = r$ e $\overline{PQ} = d - r \cos \theta$.

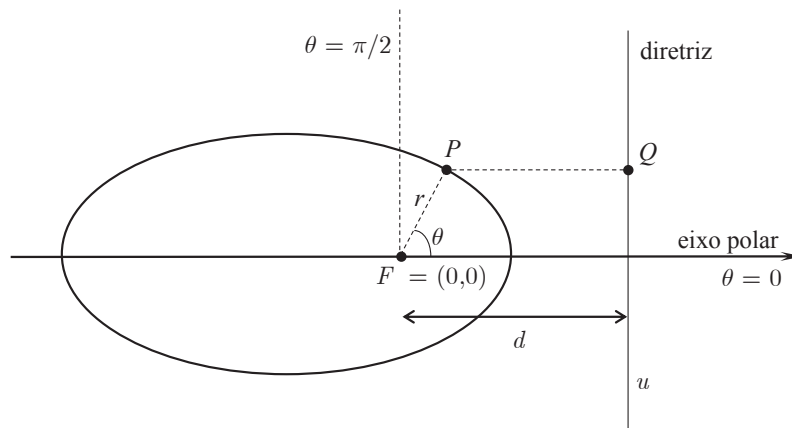


Figura 5: Foco e diretriz de uma elipse. Observe que d é a distância do foco F até a diretriz.

Como $\epsilon = \overline{PF}/\overline{PQ}$, segue que

$$r = \epsilon (d - r \cos \theta). \quad (D.2)$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, teremos

$$r^2 = x^2 + y^2 = \epsilon^2 (d - x)^2 = \epsilon^2 (d^2 + x^2 - 2dx), \quad (D.3)$$

²¹Em coordenadas cartesianas, é fácil provar que a equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ representa uma elipse centrada na origem. Para isto, basta usar a propriedade de que a elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma das distâncias até dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante positiva, ou seja $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, que equivale a $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$.

²²Se $\epsilon = 1$, teremos, por definição, uma *parábola*. Se $\epsilon > 1$, teremos uma *hipérbole*.

ou seja,

$$(1 - \epsilon^2) x^2 + 2\epsilon^2 dx + y^2 = \epsilon^2 d^2. \quad (\text{D.4})$$

Dividindo ambos os membros por $1 - \epsilon^2$, obtemos

$$x^2 + 2 \frac{\epsilon^2 d}{1 - \epsilon^2} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{\epsilon^2 d^2}{1 - \epsilon^2}. \quad (\text{D.5})$$

Completando o quadrado, obtemos

$$\left(x + \frac{\epsilon^2 d}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{\epsilon^2 d^2}{(1 - \epsilon^2)^2}. \quad (\text{D.6})$$

Esta equação é do tipo $(x - x_c)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, a qual representa uma *elipse* centrada em $(x_c, 0)$. Por fim, retornando na Eq. (D.2), note que ela é equivalente a

$$r = \epsilon d - \epsilon r \cos \theta, \quad (\text{D.7})$$

ou seja,

$$r(1 + \epsilon \cos \theta) = \epsilon d. \quad (\text{D.8})$$

Isolando r , obtemos

$$r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (\text{D.9})$$

provando, assim, que a Eq. (30) realmente representa uma elipse.

E. RELAÇÕES ÚTEIS PARA OS PARÂMETROS DA ELIPSE

Vamos demonstrar as relações utilizadas para os parâmetros a e b da elipse. Começemos com as relações geométricas básicas para o periélio e afélio, i.e.

$$\begin{cases} r_P = a - f = a(1 - \epsilon) \\ r_A = a + f = a(1 + \epsilon) \end{cases}. \quad (\text{E.1})$$

Usando a solução $r(\theta) = A/(1 + \epsilon \cos \theta)$, e aplicando-a aos casos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, obtemos

$$r_P = \frac{A}{1 + \epsilon} \quad (\text{E.2})$$

e

$$r_A = \frac{A}{1 - \epsilon}, \quad (\text{E.3})$$

respectivamente. Como $r_P + r_A = 2a$, o que significa que a é a *média aritmética* de r_P e r_A , então

$$\frac{A}{1 + \epsilon} + \frac{A}{1 - \epsilon} = 2a, \quad (\text{E.4})$$

portanto

$$a = \frac{A}{1 - \epsilon^2}. \quad (\text{E.5})$$

Para determinar b , basta fazer

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - a^2 \epsilon^2 = a^2 (1 - \epsilon^2) \\ &= a^2 \frac{A}{a} = a A, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

o que fornece

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{a A} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{1 - \epsilon^2}} \\ &= \frac{A}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Isso mostra que b é a *média geométrica* de r_p e r_A .

F. SOLUÇÃO $r(\theta)$ A PARTIR DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Como resultado da conservação da energia, nós obtivemos:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}}. \quad (\text{F.1})$$

Para obter a equação da trajetória em *coordenadas polares*, basta fazer

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2}. \quad (\text{F.2})$$

Com isso,

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{h}{r^2} = \pm \sqrt{-2 \frac{|E|}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}}, \quad (\text{F.3})$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \pm r^2 \frac{\mu}{L} \sqrt{-2 \frac{|E|}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 2 \frac{GM}{r}} \\ &= \pm r^2 \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - \frac{1}{r^2} + 2 \frac{GM}{r} \frac{\mu^2}{L^2}}. \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Aplicando a *substituição de Binet*, i.e. $u = 1/r$, com $\frac{dr}{d\theta} = \frac{d(1/u)}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$, obtemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{du}{d\theta} = \pm r^2 \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - \frac{1}{r^2} + 2 \frac{GM}{r} \frac{\mu^2}{L^2}}, \quad (\text{F.5})$$

o que fornece

$$\frac{du}{d\theta} = -u^2 \frac{dr}{d\theta} = \mp \sqrt{-2 \frac{\mu |E|}{L^2} - u^2 + 2GM \frac{\mu^2}{L^2} u}. \quad (\text{F.6})$$

Portanto:

$$d\theta = \mp \frac{du}{\sqrt{-u^2 + 2GM \frac{\mu^2}{L^2} u - 2 \frac{\mu}{L^2} |E|}}. \quad (\text{F.7})$$

Essa separação de variáveis nos leva à seguinte solução integral:

$$\theta - \theta_0 = \mp \int \frac{du}{\sqrt{-u^2 + Bu - C}}, \quad (\text{F.8})$$

onde $B \equiv 2GM\mu^2/L^2$ e $C \equiv 2\mu|E|/L^2$. Fatorando o denominador, é fácil ver que, sendo $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + Bx - C}} = -\arccos\left(\frac{2x-B}{\sqrt{\Delta}}\right) + cte., \quad (\text{F.9})$$

onde $\Delta \equiv B^2 - 4C$. Esta primitiva vale sempre que $B^2 > 4C$ e $|2x - B| < \sqrt{\Delta}$. Note que $F(x) = \arcsen\left(\frac{2x-B}{\sqrt{\Delta}}\right) + cte.$ também é uma primitiva. Usando, por exemplo, a primitiva do tipo $\arccos(x)$ na integral da trajetória, prontamente obtemos

$$\theta - \theta_0 = \pm \arccos\left(\frac{2u - B}{\sqrt{\Delta}}\right), \quad (\text{F.10})$$

o que nos leva a

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos\left[\pm \arccos\left(\frac{2u - B}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] = \frac{2u - B}{\sqrt{\Delta}}. \quad (\text{F.11})$$

Escrevendo em termos de r e dos parâmetros físicos, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= G \frac{M\mu^2}{L^2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - C} \cos(\theta - \theta_0) \\ &= G \frac{M\mu^2}{L^2} + \sqrt{G^2 \frac{M^2\mu^4}{L^4} - 2\mu \frac{|E|}{L^2}} \cos(\theta - \theta_0) \\ &= G \frac{M\mu^2}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 - 2\mu \frac{|E|L^4}{L^2 G^2 M^2 \mu^4}} \cos(\theta - \theta_0) \right] \\ &= G \frac{M\mu^2}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 - 2 \frac{|E|L^2}{G^2 M^2 \mu^3}} \cos(\theta - \theta_0) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Por fim, esta solução pode ser escrita na forma

$$r(\theta) = \frac{A}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (\text{F.13})$$

onde

$$A = \frac{h^2}{GM} = \frac{L^2}{GM\mu^2} \quad (\text{F.14})$$

e

$$\epsilon = \sqrt{1 - 2 \frac{|E| L^2}{G^2 M^2 \mu^3}}. \quad (\text{F.15})$$

Como $A > 0$ e $0 \leq \epsilon < 1$, a equação acima descreverá uma **elipse com um dos focos sobre a origem**, em pleno acordo com a 1ª lei de Kepler. Note que a solução $r(\theta)$ obtida na Eq. (F.13), acima, reduz-se à solução obtida na Eq. (30) quando escolhermos $\theta_0 = 0$.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o auxílio na composição das figuras, prestado gentilmente pela Sra. Márcia Ribeiro de Souza Lima.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Kepler, *New Astronomy* [*Astronomia Nova*, 1609]. Translated by W. H. Donahue, Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 54
- [2] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I: O Movimento dos Corpos*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990. [Tradução da 3ª edição [1726] por T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia] 54, 55, 56, 60
- [3] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) e Livro III: O Sistema do Mundo (tratado matematicamente)*. São Paulo: Edusp, 2008. [Tradução da 3ª edição (1726) por A. K. T. Assis] 54, 58, 60
- [4] J. Barrow-Green, *The Three-Body Problem*. In T. Gowers, J. Barrow-Green, and I. Leader (eds.), *The Princeton Companion to Mathematics*. New York: Princeton University Press (2008), pp. 726–728. 54
- [5] J. Bernoulli, “Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman”, datée de Basle le 7, Octobre 1710. *Memoires de l’Ac. Royale des Sciences Boudot Paris*, 1710 (1712). 55
- [6] MicroSCOPE Satellite Mission (CNES/ESA), 2017. Disponível em: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/m/microscope> 58
- [7] J. Kepler. *Harmonices Mundi* (1619), p. 189–190. 63
- [8] M. F. Ferreira da Silva, “Quantidades médias no movimento de um corpo em trajetória elíptica”, *Rev. Bras. Ens. Fís.* **33**(3), 3315 (2011). 63
- [9] D. M. Williams, “Average distance between a star and planet in an eccentric orbit”, *Am. J. Phys.* **71**(11), 1198–1200 (2003). 63
- [10] N. M. Swerdlow, “Kepler’s iterative solution to Kepler’s equation”, *Journal for the History of Astronomy* **31**(4), 339–341 (2000). 65
- [11] J. F. Ritt, “Elementary functions and their inverses,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **27**, 68 (1925). 65