



Espalhamento caótico por potenciais atrativos clássicos

Chaotic scattering by classical potential attractants

LUCAS DE LIMA VIEIRA CAMPOS¹, ADRIANE BEATRIZ SCHELIN²

¹Instituto de Física - Universidade de Brasília.

²Instituto de Física - Universidade de Brasília.

Resumo

O espalhamento caótico ocorre em diversos sistemas, e o caos presente é transiente. O caos ocorre apenas em uma região restrita, que chamamos de região de espalhamento. O objetivo é estudar as diferentes configurações e as implicações de elas serem caóticas. Estruturas fractais estão presentes, gerando hipersensibilidade às condições iniciais. Estudamos a interação de potenciais atrativos que interagem classicamente com as partículas de luz espalhadas. Na primeira parte, estudamos o espalhamento de uma partícula livre em um potencial com perfil gaussiano. Em seguida, estudamos o espalhamento por um potencial newtoniano.

Palavras-chave: Espalhamento. Caos. Potencial. Bacia de escape.

Abstract

Chaotic scattering occurs in many systems, and the present chaos is transient. Chaos only occurs in a restricted region, which we call the scattering region. The aim is to study the different configurations and the implications of their being chaotic. Fractal structures are present, generating hypersensitivity to initial conditions. We study the classical interaction of attractive potentials with scattered light particles. In the first part, we studied the scattering of a free particle in a potential with a Gaussian profile. Next, we studied the scattering by a Newtonian potential.

Keywords: Scattering. Chaos. Potential. Basin Scape.

I. INTRODUÇÃO

Um sistema de espalhamento é descrito pelo movimento de uma partícula sujeita a uma força limitada a uma região no espaço. A dinâmica geralmente é linear e simples. Ao interagir com o potencial, há trajetórias que ficam presas no potencial e depois escapam.

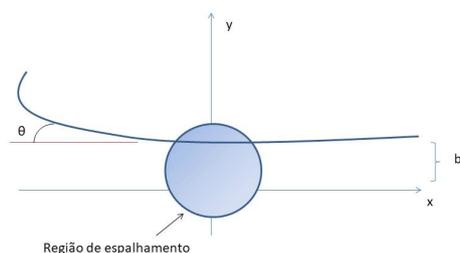


Figure 1: *Características de um processo de espalhamento. Fonte: Elaboração do autor.*

Vários estudos mostram que o comportamento de um sistema desse tipo é caótico. Vamos exemplificar melhor como isso ocorre durante todo o texto.

Uma forma inicial de caracterizar um processo de espalhamento é a distância, b , na qual a partícula passaria pelo centro da região de espalhamento (a origem) se não houvesse nenhuma interação presente (ver fig. 1). (TÉL; GRUIZ, 2006)

Esse parâmetro b é chamado de parâmetro de impacto. Um possível parâmetro de saída é o ângulo entre as linhas retas dos segmentos incidentes e de saída da órbita, o ângulo de deflexão, θ . Assim, uma característica importante do processo de espalhamento é a relação funcional entre o ângulo de deflexão e o parâmetro de impacto, expressa pela função de espalhamento $\theta(b)$.

Quando um sistema é caótico, dizemos que o caos é transitório, pois o movimento complicado é restrito à região do potencial. A dinâmica é altamente sensível às condições iniciais, e estruturas fractais aparecem no espaço de fases.

No espaço de fases, devem haver infinitas órbitas, que podem ser periódicas ou aperiódicas. As órbitas permanecem presas na região de espalhamento por um longo tempo. O conjunto de órbitas que ficam presas na região de espalhamento é chamado de sela caótica, e sua medida é nula. Podemos definir termos como variedades, em que elas podem ser caracterizadas por estáveis e instáveis. A variedade estável da sela caótica é formada por trajetórias que permanecem presas na região de espalhamento para $t \rightarrow \infty$.

Em geral, o processo de espalhamento é a dinâmica de um sistema conservativo que começa e termina em um movimento simples. O espalhamento caótico é a manifestação do caos transitório em sistemas conservativos.

Vamos considerar apenas a abordagem contínua para descrever o sistema de espalhamento, para isso vamos analisar o espalhamento caótico em sistemas sob o efeito de potenciais independentes do tempo a partir do formalismo Hamiltoniano.

II. ESPALHAMENTO POR POTENCIAS ATRATIVOS CLÁSSICOS

Vamos utilizar diferentes abordagens para simular o espalhamento em potenciais atrativos clássicos. Inicialmente, vamos tratar o caso do espalhamento de uma partícula livre

interagindo com um potencial com perfil gaussiano. Em seguida, estudaremos o espalhamento por meio de um potencial gravitacional newtoniano.

II.1. Potencial gaussiano

A partícula deve interagir com o potencial em uma certa região, que denominamos de região de espalhamento. A partícula livre deve interagir com um potencial com perfil gaussiano e, para os nossos interesses, vamos estudar tanto o caso estático quanto o caso em que os potenciais estão em órbita. O potencial está descrito na equação abaixo:

$$U(x,y) = -e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}. \quad (1)$$

O potencial está representado na figura 2.

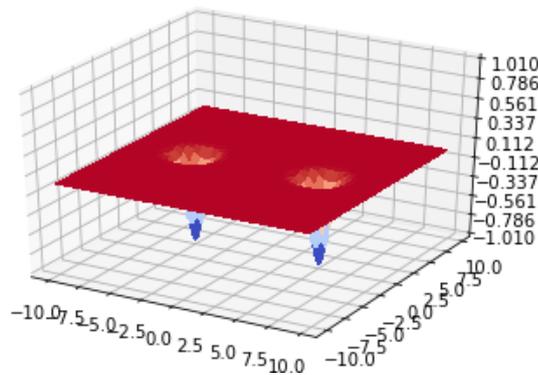


Figure 2: Contorno de potencial. Fonte: Elaboração do autor.

O potencial mencionado acima, que é a soma de dois potenciais, é composto por dois vales de altura controlável, os quais estão a uma distância suficientemente grande para que não interajam entre si.

Temos a Hamiltoniana para o caso de uma partícula livre com potencial gaussiano no caso estático, em que os potenciais permanecem fixos. A Hamiltoniana é explicitamente escrita da seguinte maneira (TAYLOR, 2013):

$$H = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} - e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-du)^2)}, \quad (2)$$

Observa-se que essa Hamiltoniana é independente do tempo, portanto a energia do sistema é constante e o problema é conservativo. Utilizando a Hamiltoniana da equação 2 obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\dot{x} = P_x, \quad (3)$$

$$\dot{y} = P_y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_x = & -2(x + dx)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(x - y)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_y = & -2(y + dy)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(y - dy)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Temos um sistema aberto, ou seja, as trajetórias típicas se aproximam do potencial, interagem com ele e, em seguida, escapam. Podemos definir a velocidade de entrada da partícula na região de espalhamento como v e a energia total do sistema como E , sendo a energia potencial representada por U . Assim, podemos escrever:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}, \quad (7)$$

A partícula, ao ser defletida pelo potencial, pode ser caracterizada pelo parâmetro de impacto b , que define as condições iniciais do problema e pela função de deflexão v , que define as condições de saída. A função de deflexão, neste caso, é a velocidade de saída da região de espalhamento. Algumas órbitas periódicas permanecem presas no potencial para $t \rightarrow \infty$. Existe um número infinito delas, composto por diferentes combinações das trajetórias. Esse conjunto infinito de órbitas presas é responsável pelo comportamento caótico do espalhamento. O conjunto dessas órbitas instáveis é denominado conjunto de sela caótica.

Podemos analisar duas configurações: quando os potenciais estão parados e quando estão em órbita. Em cada caso, é possível observar diversos fatores importantes que indicam a dinâmica do sistema.

Para obter cada resultado presente, utilizamos a linguagem de programação Python para efetuar os cálculos numéricos. Para todas as simulações, utilizamos o pacote de integração ODEINT. Neste pacote, existem integradores mais antigos implementados em Fortran (principalmente ODEPACK) (LYNCH, 2018). Ele resolve o problema de valor inicial para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Todas as outras simulações foram realizadas com a mesma linguagem e o mesmo pacote de integração.

II.1.1 Potencial gaussiano estático

Para os potenciais gaussianos estáticos, as trajetórias típicas ficam presas na região de espalhamento por um tempo e, em seguida, escapam. A figura 3 (esquerda) mostra a relação entre o parâmetro de impacto e a velocidade de saída. Observa-se uma estrutura fractal que indica a natureza caótica do sistema. Um zoom dessa região está na figura 3 (direita). Uma das trajetórias é mostrada na figura 4. Para estudar as diferentes condições de escape observadas na figura 3, vamos calcular as bacias de escape, que separam diferentes direções de saída da região de espalhamento. Para o presente potencial, há duas opções de saída para a partícula que interage com ele, cada saída denotada por uma cor. A bacia de escape é mostrada na figura 5.

Cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, representando duas regiões de escape. Há fronteiras nas bacias, de modo que no presente caso percebemos que ela não é suave, ou seja, é complexa, formando uma geometria fractal.

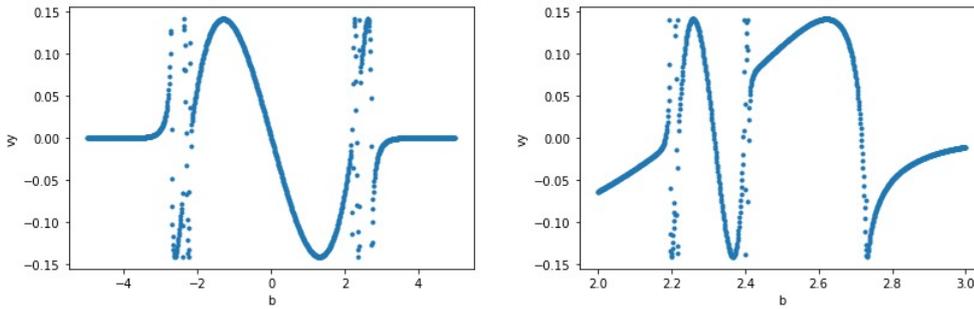


Figure 3: *Figura da esquerda: Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Figura da direita: Zoom para mostrar a figura fractal. Fonte: Elaboração do autor.*

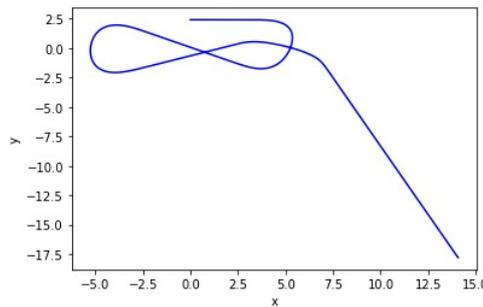


Figure 4: *Trajétória no plano x e y . Fonte: Elaboração do autor.*

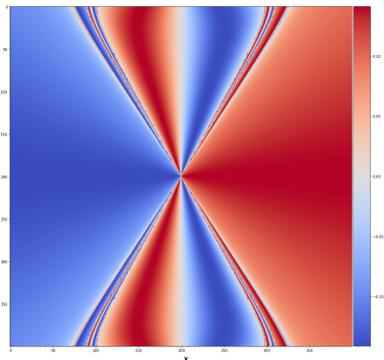


Figure 5: *Bacia de escape para a partícula. Fonte: Elaboração do autor.*

Agora devemos analisar o caso em que os potenciais estão em órbita.

II.1.2 Potenciais gaussianos em órbita

Para o caso em que os potenciais estão em órbita, temos o gráfico do parâmetro de impacto pela velocidade de saída na figura 6 da direita. Algumas trajetórias com algumas condições iniciais próximas às estruturas fractais são dadas pelas figuras 7. A trajetória de um potencial, que está em vermelho, é dada pela figura 6 da esquerda.

Temos que as trajetórias nas figuras 7 começam similares, mas se separam e cada uma escapa em uma direção diferente. Assim como no caso dos potenciais parados, para estudar as diferentes regiões de escape, calculamos a bacia de escape, que está na figura 8.

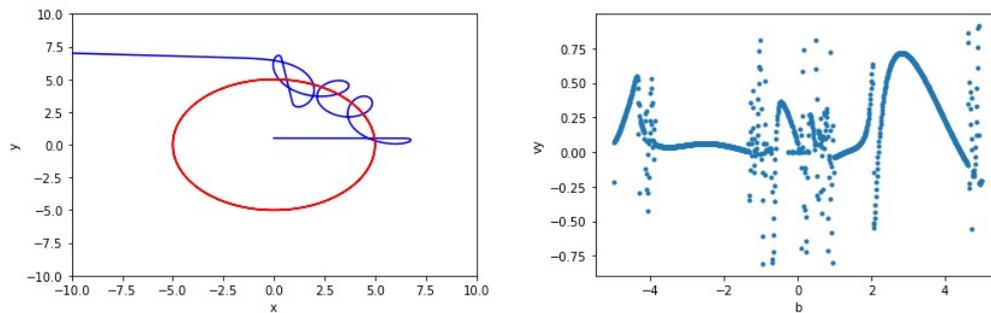


Figure 6: Figura da Esquerda: Trajetórias no plano x e y . Figura da Direita: Parâmetro de impacto pela velocidade de saída Fonte: Elaboração do autor.

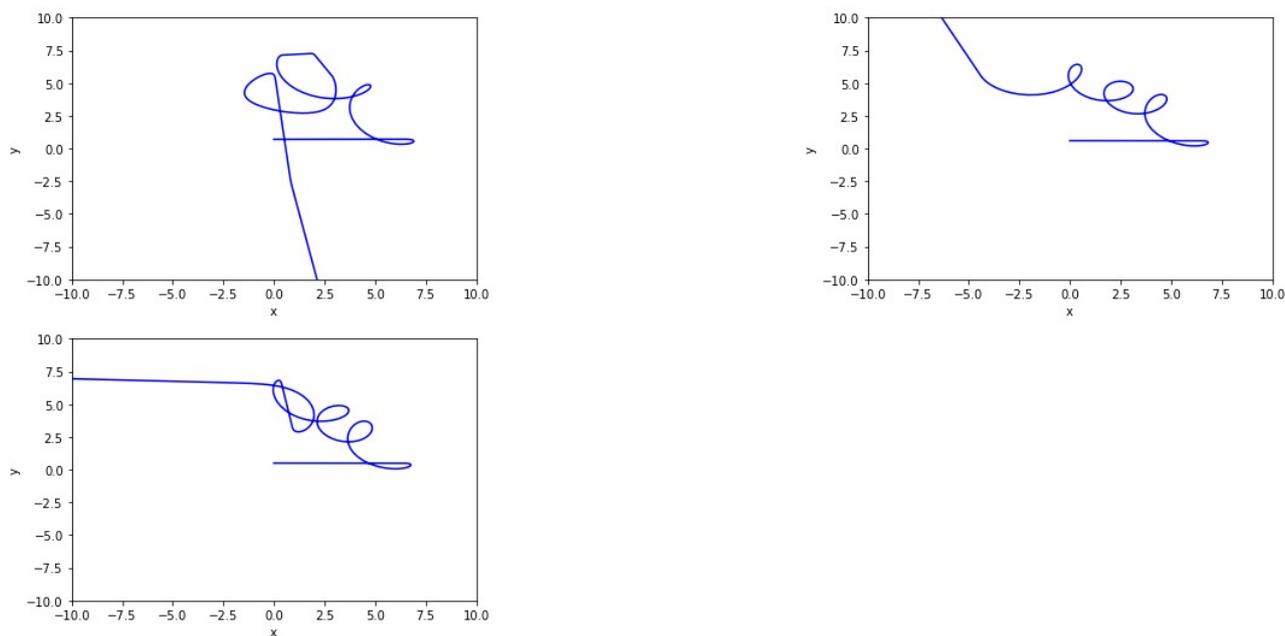


Figure 7: Trajetórias no plano x e y . Fonte: Elaboração do autor.

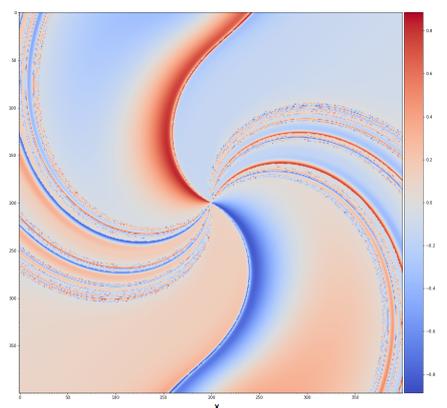


Figure 8: Bacia de escape para a partícula. Fonte: Elaboração do autor.

Conforme discutido no caso dos potenciais estáticos, cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de

espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, além de algumas cores intermediárias que derivam do azul e do vermelho, representando assim duas regiões de escape. O caráter caótico é evidenciado pela existência de estruturas fractais nas regiões de escape (TÉL; GRUIZ, 2006) e (MONTEIRO, 2006).

A rotação dos potenciais traz um novo cenário complexo e rico, com um novo conjunto de órbitas periódicas e aperiódicas, motivo pelo qual queremos verificar o que ocorre com o sistema de espalhamento quando os potenciais estão em órbita. O parâmetro escolhido ω , que define a rotação do potencial, foi de 0,01. É importante notar que esse valor é bem maior do que o usual, logo os potenciais apresentam maior rotação em comparação com um caso mais natural.

Na próxima seção, abordaremos o espalhamento de uma partícula interagindo com dois corpos por meio do potencial gravitacional newtoniano. Esse é um caso mais realista do que os apresentados até agora para o espalhamento no caso contínuo.

II.2. Potencial gravitacional newtoniano

Agora vamos considerar o problema de uma partícula teste interagindo com dois corpos. A figura 9 apresenta as principais informações necessárias para a solução do problema.

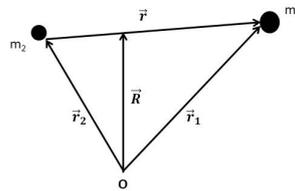


Figure 9: Problema de dois corpos e o centro de massa. Fonte: Elaboração do autor.

O potencial utilizado é o newtoniano, dado pela equação 8.

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (8)$$

onde G é a constante universal gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ a distância entre os dois corpos.

Esse potencial assume que, quando r tende ao infinito, o potencial é nulo. Ou seja, a partícula só interage com o potencial na região de espalhamento, fora dela não há interação.

A discussão feita acima para o potencial com perfil gaussiano é válida também para o potencial newtoniano, apresentando algumas diferenças. O potencial newtoniano não tem dois vales de altura ajustável, já que a intensidade da interação depende da massa dos corpos presentes na equação.

As equações de movimento para o problema de dois corpos com interação gravitacional são:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (10)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} \quad (11)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (12)$$

As trajetórias dos dois corpos no espaço de fase evoluindo no tempo são mostradas na figura 10 da direita, enquanto a trajetória do centro de massa é mostrada na figura 10 da esquerda.

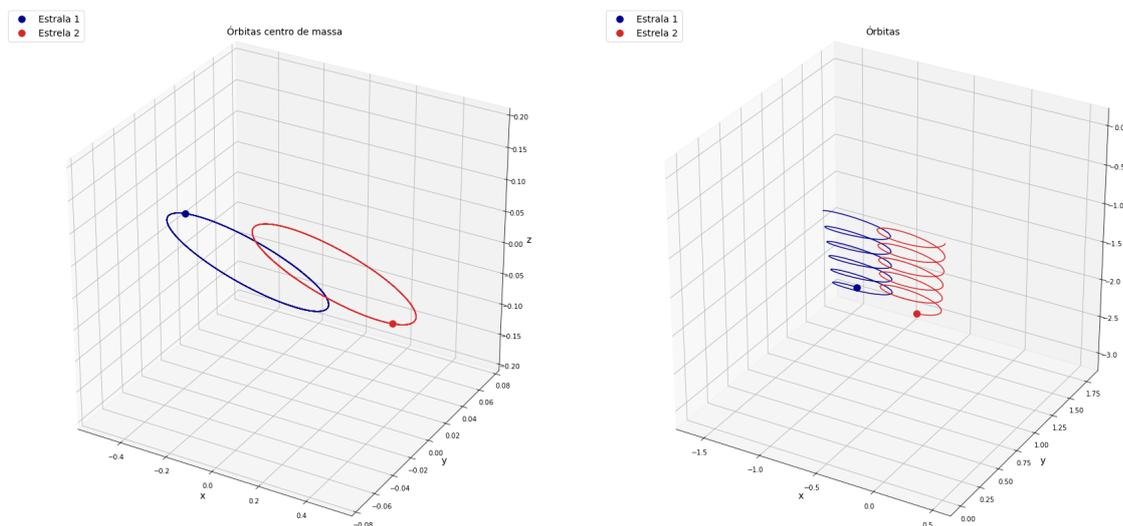


Figure 10: Figura da esquerda: Trajetória do centro de massa no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

Todas as integrações foram realizadas por meio da normalização das equações diferenciais. Utilizamos a massa do Sol como referência, além da distância entre as estrelas em questão e o período da órbita para normalizar as equações. O processo de integração foi caracterizado pelo uso do pacote ODEINT do Python (LYNCH, 2018).

No caso de dois corpos, não há a existência de caos. Mas e se adicionarmos um terceiro corpo? Analisaremos esse caso na próxima seção.

III. ESPALHAMENTO CAÓTICO PARA O PROBLEMA DE TRÊS CORPOS

Quando acrescentamos uma nova partícula para o problema as equações de movimento mudam, ficando na forma:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (14)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (16)$$

$$m_3 \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} = \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (17)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{v}_3 \quad (18)$$

Nas figuras que foram apresentadas, todas as massas dos corpos com massa não nula chamaremos de buracos negros, uma vez que é uma representação clássica de um buraco negro. A partícula de massa nula será chamada de fóton, como uma representação clássica da luz. Todas as representações presentes são clássicas, utilizando apenas a mecânica newtoniana.

Para uma partícula de massa nula, temos a função de deflexão (velocidade final em z pelo parâmetro de impacto) para alguns parâmetros específicos na figura 11 da esquerda. No presente caso, a massa dos outros dois corpos é igual. Também podemos ver o tempo de escape pelo parâmetro de impacto na figura 11 da direita. As trajetórias para algumas condições iniciais, no espaço tridimensional, estão na figura 12. A partícula de massa nula é a que escapa da região de espalhamento.

Quando analisamos a figura 11 da esquerda, percebemos que existem estruturas fractais presentes na função de deflexão, tornando-a bem irregular em certas regiões. Conforme já discutido, a existência dessas estruturas fractais implica na existência de caos.

Também podemos analisar a figura 11 da direita, que mostra o tempo em que uma partícula permanece na região de espalhamento. Novamente, estudamos em relação ao parâmetro de impacto. Assim como na função de deflexão, existem singularidades no tempo de escape que se intercalam com algumas regiões suaves. Quando o tempo de escape é pequeno, a partícula escapa da região de espalhamento. As regiões de irregularidades estão relacionadas às divergências no tempo de escape.

As duas figuras, a função de deflexão e o tempo de escape, têm algo em comum: as regiões irregulares. Essas regiões apresentam as condições iniciais nas quais as órbitas periódicas ficam presas na região de espalhamento.

As trajetórias para algumas condições iniciais no espaço tridimensional estão na figura 12 da esquerda. As trajetórias do centro de massa do problema estão na figura 12 da direita. Para outras condições iniciais, encontramos a trajetória no espaço na figura 13 da esquerda e a trajetória do centro de massa na figura 13 da direita. É possível obter diversas outras trajetórias, e por meio delas percebemos a sensibilidade às condições iniciais do problema

de três corpos. Mudando as condições iniciais, não podemos prever com precisão a evolução do sistema.

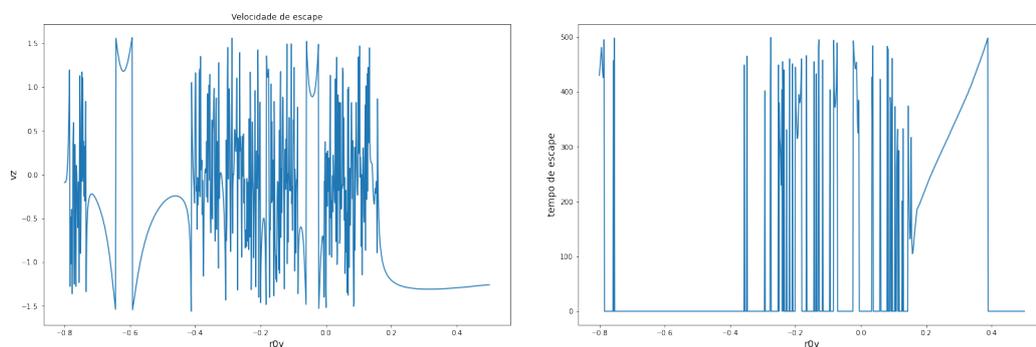


Figure 11: Figura da esquerda: Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Figura da direita: Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: Elaboração do autor.

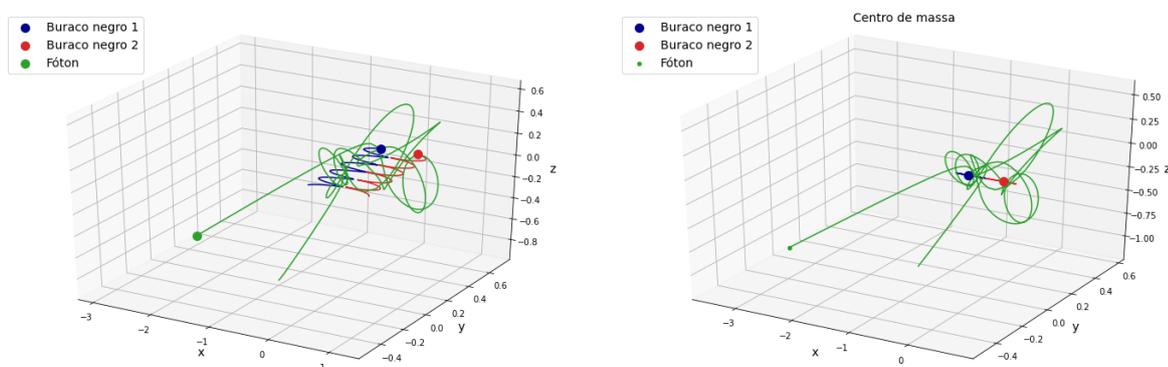


Figure 12: Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

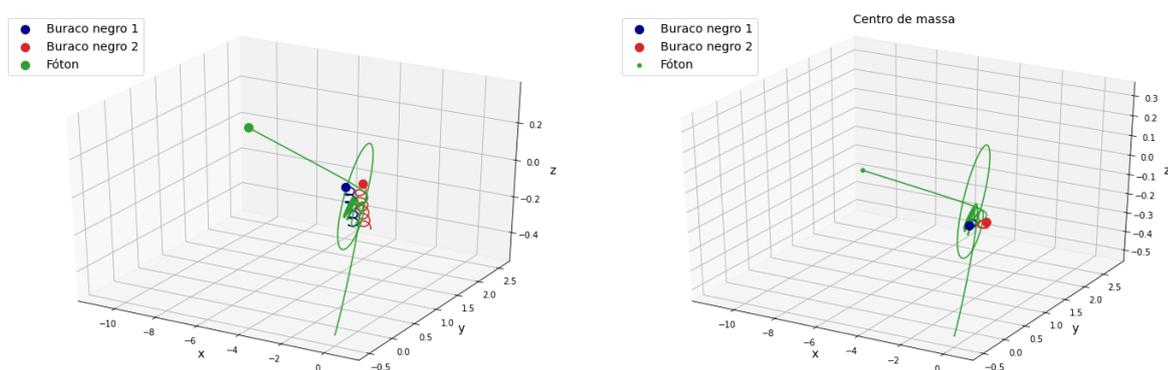


Figure 13: Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.

Quando fazemos a massa dos outros dois corpos serem diferentes, mas mantendo a terceira partícula com massa nula, encontramos a função de deflexão e o tempo de escape

da partícula nas figuras 14 da esquerda e 14 da direita. Além disso, temos uma trajetória no espaço tridimensional e a trajetória do centro de massa nas figuras 15 da esquerda e 15 da direita. Neste caso percebemos as mesmas relações discutidas anteriormente.

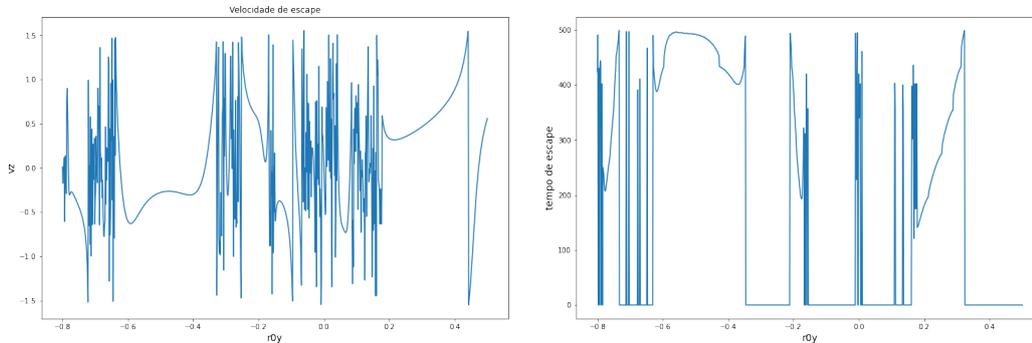


Figure 14: *Figura da esquerda: Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Figura da direita: Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: Autoral.*

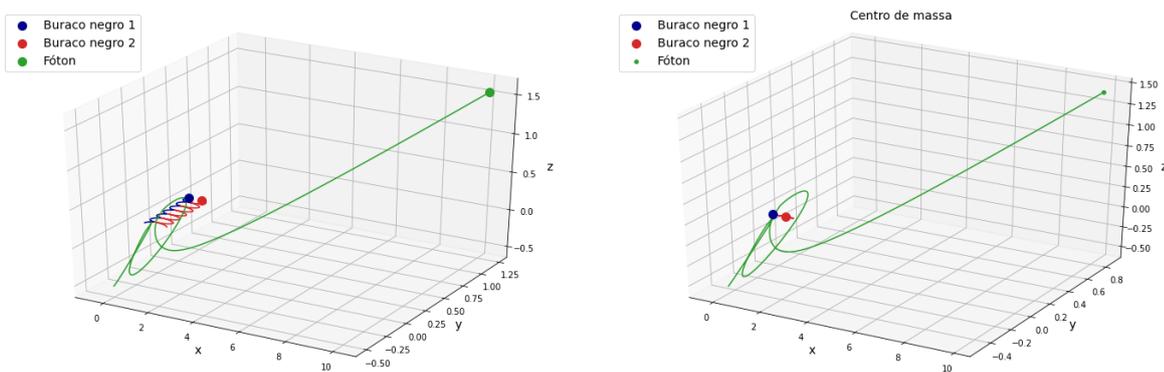


Figure 15: *Figura da esquerda: Trajetórias no espaço x , y e z . Figura da direita: Trajetórias do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: Elaboração do autor.*

IV. CONCLUSÃO

É perceptível o caráter caótico no sistema de uma partícula interagindo com dois potenciais gaussianos e também no caso de uma partícula de massa nula interagindo com outros dois corpos. A descrição do espalhamento caótico em potenciais clássicos conduziu à compreensão que a natureza caótica de um sistema aparece por meio de estruturas fractais presentes no espaço de fases. Para os potenciais gaussianos, essas estruturas apareceram e foram obtidas bacias de escape, que representam as regiões de escape da partícula. Para o potencial newtoniano, analisamos a existência de caos por meio da função de deflexão e o tempo de escape. As estruturas fractais estão presentes em diferentes situações testadas.

A percepção de estruturas fractais e a grande sensibilidade às condições iniciais estão atreladas. Conforme percebemos, as condições iniciais encontradas por meio das estruturas fractais presentes na bacia de escape conduziram a um novo estudo, deixando de lado o

caso artificial proposto no problema de uma partícula livre e iniciando os estudos para o caso da interação de corpos por meio do potencial newtoniano. Para esse caso, notamos de forma clara que, quando três corpos interagem, a sensibilidade às condições iniciais é a principal razão para a existência de caos no sistema.

REFERENCES

- LYNCH, S. *Dynamical Systems with Applications using Python*. [S.l.]: Birkhäuser, Cham, Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. 44, 48
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos, 2nd edition*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006. 47
- TAYLOR, J. R. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: Bookman, 2013. 43
- TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics*. [S.l.]: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2006. 42, 47