



# Buracos Negros de Schwarzschild e de Kerr: uma abordagem usando Python

Schwarzschild and Kerr black holes: an approach using Python

GILSON WURZ<sup>\*1</sup>, VANESSA CARVALHO ANDRADE<sup>†2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física – Universidade de Brasília

---

## Resumo

*Apresentamos nessa pesquisa os principais apontamentos históricos acerca da importância do estudo dos quatro modelos de buracos negros. Mais adiante poderá entender como funciona a evolução estelar, formação e estrutura dos buracos negros analisando as componentes da métrica de Schwarzschild, a circunferência do horizonte de eventos, a distância própria, o tempo próprio, horizonte de eventos, a esfera de fótons, o disco de acreção, singularidade e singularidade nua, anel de Einstein e cruz de Einstein para esse modelo geométrico. Já para o modelo com simetria axial de Kerr será estudada as componentes da métrica que levam ao tempo próprio, a distância própria, a órbita de partículas, horizonte de eventos, a ergoregião, superfície de redshift infinito, censura cósmica para o caso em que  $r > 2M$ , o limite estático, a sombra de um buraco negro de Kerr. Disponibilizou-se um filtro para análise do perfil de um buraco negro de Schwarzschild e de Kerr da Agência Espacial Européia. As simulações foram criadas em Python por meio de alguns pacotes especiais para a Teoria da Relatividade Geral e estão inseridas na íntegra no apêndice para eventual consulta. Adotou-se ainda as unidades naturais para descrever as métricas de Schwarzschild e de Kerr, sendo ambas munidas de assinatura métrica  $(-, +, +, +)$ .*

**Palavras-chave:** Schwarzschild. Kerr. Buraco Negro.

---

## Abstract

*In the present work, the reader will be able to study the main historical notes about the importance of studying the four models of black holes. Later you will be able to understand how stellar evolution, formation and structure of black holes works by analyzing the components of the Schwarzschild metric, the circumference of the event horizon, the proper distance, the proper time, the event horizon, the photon sphere, the disk accretion, singularity and naked singularity, Einstein ring and Einstein cross for this geometric model. For the Kerr axial symmetry model, the components of the metric that lead to eigentime, eigendistance, particle orbit, event horizon, ergoregion, infinite redshift surface, cosmic censorship will be studied in the case where  $r > 2M$ , the static limit, the shadow of a Kerr black hole. A filter for analyzing the profile of a Schwarzschild*

---

\*gilsonwurz@gmail.com

†vcandrade@unb.br

*and Kerr black hole from the European Space Agency was made available. The simulations were created in Python using some special packages for the General Theory of Relativity and are fully included in the appendix for possible consultation. The natural units were also adopted to describe the Schwarzschild and Kerr metrics, both with the metric signature  $(-, +, +, +)$ .*

**Keywords:** Schwarzschild. Kerr. Black Hole.

---

## I. INTRODUÇÃO

Em 1783, o físico inglês John Michell (1724-1793) propôs que uma estrela possui massa suficientemente grande havendo um limite onde a luz não pode escapar, ou seja, quanto maior o planeta ou estrela, maior será a sua velocidade de escape até alcançar a velocidade da luz. A estrela emanará tanto brilho que será impossível de enxergá-lo. Essa foi a primeira definição de um buraco negro curvando o trajeto da luz.

Michell postulou que a estrela teria massa igual a

$$M_{\text{estrela negra}} = (500)^3 M_{\text{Sol}} = 1,25 \times 10^8 M_{\text{Sol}}. \quad (1)$$

Na equação (1),  $M_{\text{Sol}}$  é igual a  $1,99 \times 10^{30}$  kg.

O tamanho de uma estrela é proporcional ao seu raio e haverá uma distância radial máxima para que a curvatura da luz surja. Michell descobriu a ideia primeva do horizonte de eventos

A hipótese de Michell de uma estrela que deformasse a geometria local foi negligenciada, pois objetos que possuem tanto brilho que nem podem ser vistos foi algo inaceitável para a época.

Sob a orientação de Leonhard Euler, Lagrange desenvolveu as equações que hoje são muito usadas em Mecânica Analítica e chamadas de Equações de Euler-Lagrange e muito utilizadas em Mecânica Relativística por meio do estudo do cálculo da geodésica, que é o caminho mais curto entre dois pontos podendo ser uma linha reta ou ainda uma curva geométrica.

No século XIX percebeu-se que os conceitos de espaço e tempo absolutos da Teoria da Gravitação Universal seriam melhor formulados após a unificação das equações do eletromagnetismo pelo físico britânico James Clerk Maxwell (1831-1879) e isso ocorreu em um momento em que nascia um novo ramo da Matemática que estava sendo formulada pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), a geometria riemanniana como mencionado.

A geometria euclidiana faz uso de uma ferramenta muito importante para calcular a distância entre dois pontos em um espaço tridimensional, mas utilizando a notação diferencial, de modo que a distância entre dois pontos muito próximos é dada pela soma dos quadrados dos deslocamentos infinitésimos projetadas em cada eixo ortogonal.

Albert Einstein formulou sua Teoria da Relatividade Restrita (TRR) para descrever a estrutura espaço-tempo sentindo a necessidade de extrapolar suas ideias colocando a gravidade em sua teoria, formulando em 1915 a TRG, dando conta de explicar como os

corpos massivos deformam a geometria local e como a gravidade pode alterar a noção de tempo para um corpo nas proximidades desse objeto massivo. Einstein levou um certo tempo para adequar a gravidade usando geometria diferencial de Riemann em sua Teoria da Relatividade Geral (TRG), mas obteve êxito tão profundo que suas teorias são provadas a todo momento.

Karl Schwarzschild, que trabalhava nas trincheiras da Primeira Guerra Mundial, usou seu tempo vago para descobrir qual seria a geometria mais simples que desse conta de explicar as equações de campo de Einstein e verificou que a esfera perfeitamente simétrica e estática e sem carga elétrica seria a mais ideal. Os cálculos apresentados por Schwarzschild corroboraram com as ideias primitivas de Michell.

Devido a essa solução simétrica e estática para um corpo perfeitamente esférico, estipulamos que haverá uma região ou um limite geométrico onde nada ou nem mesmo a luz consegue escapar, causando fortes forças de maré e fazendo com que o tempo para quem estivesse nas suas proximidades passasse mais devagar podendo até parar, devido os postulados pela TRG. A essa região limite, chamamos de *horizonte de eventos*. Na região interior ao horizonte de eventos chamamos de singularidade e percebemos que temos dificuldades em provar quais são os fenômenos que ali ocorrem, pois os nossos instrumentos conseguem observar somente até o horizonte de eventos desse corpo simétrico e estático.

Objetos mais próximos ao horizonte de eventos terão uma velocidade de escape próxima a da velocidade da luz ou igual a da luz, enquanto que objetos muito mais afastados, velocidades muito mais baixas. A essa região geométrica, limite para uma velocidade de escape igual a da velocidade da luz, que também chamamos de horizonte de eventos chamaremos de *raio de Schwarzschild*, que pode ser extraído de um dos coeficientes da métrica que Schwarzschild derivou das equações de campo de Einstein, cuja equação é dada por

$$r_{\text{Sch}} = 2M, \quad (2)$$

onde na equação (2)  $M$  é a massa do buraco negro.

O raio de Schwarzschild para  $M_{\text{Sol}} = 1,9891 \times 10^{30}$  kg é de 2,9542 km, para 2 massas solares igual a 5,9084 km e assim por diante.

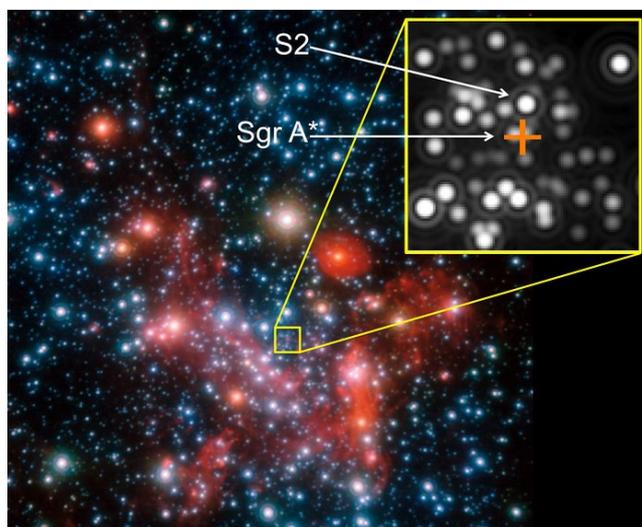
Em 1916, os físicos Hans Jacob Reissner e Gunnar Nordström encontraram de forma totalmente independente uma outra solução para as equações de campo de Einstein, mas para o caso de um buraco negro perfeitamente esférico, simétrico, e com carga elétrica.

Três anos mais tarde, em 29 de maio de 1919 duas equipes estavam prontas para testar a TRG formando duas expedições, uma em Sobral, executadas por Andrew Claude de la Cherois Crommelin e Charles Rundle Davidson e outra na Ilha de Príncipe, liderada por sir Arthur Eddington com a ajuda de Edwin Turner Cottingham e a expedição que teve seus equipamentos instalados em Sobral conseguiu registrar suas fotos com os equipamentos levados a campo.

As equipes perceberam que as estrelas da constelação das Híades estavam deslocadas de 1,75 segundos de arco. Esse ângulo de deflexão dos raios provenientes das Híades eram os mesmos previamente calculados meses antes da caravana se instalar nas cidades onde o eclipse foi visto.

Uma outra solução para buracos negros com momento angular foi solucionada por Roy

**Figura 1:** As regiões centrais da nossa Galáxia sendo observadas pelo instrumento NACO montado no Very Large Telescope do ESO. O objeto central possui massa de 4 milhões de vezes a massa do Sol e está sinalizada com uma cruz na cor laranja.



Fonte: Créditos: ESO/MPE/S. Gillessen et al.

Patrick Kerr em 1963. Sua geometria recai no espaço-tempo de Schwarzschild, apresentando simetria esférica e um horizonte próximo do horizonte de eventos para um raio de Schwarzschild. Porém, quando o buraco negro de Kerr mantém seu momento angular, apresenta um anel girante que faz com que o próprio espaço-tempo se deforme tão severamente que nessa região qualquer objeto que entre nele observa a criação da formação do próprio buraco negro antes mesmo do colapsado.

Em seu processo evolutivo, os buracos negros estelares se formam a partir de estrelas supermassivas que entram em colapso e isso é um forte indicador de que buracos negros também podem ter rotação, pois todas as estrelas apresentam certa quantidade de momento angular. Os buracos negros supermassivos podem ser encontrados no interior de diversas galáxias e especialmente nas Galáxias de Núcleo Ativo (GNA).

No interior da nossa galáxia, a Via Láctea, existe uma fonte de rádio compacta chamada de Sgr A\* que está associada a um buraco negro supermassivo. A observação de estrelas próximas dessa região indica fortemente um buraco negro de Kerr que está vem submetendo-as a um campo gravitacional gerado por um objeto compacto de milhões de massas solares.

As observação de Sgr A\*, com a ajuda do telescópio Chandra de raios X, nos ajudou a entender o seu comportamento. A figura (1), em infravermelho, possui cerca de 2 anos-luz em cada lado. A região central foi ampliada para visulizar mais claramente a estrela Sgr A\* e percebemos que houve uma mudança repentina no brilho dos raios X que provavelmente veio da energia liberada por um pedaço de algum material do tamanho de um cometa que havia sido dilacerado por forças de maré antes de desaparecer da frente do buraco negro.

Em 1960, enquanto as observações acerca de Sgr A\* ocorrem, uma candidata a buraco

**Figura 2:** A esquerda a estrela Cygnus X-1 registrada pelo telescópio Chandra na faixa do óptico e ao lado uma representação artística de Cygnus X-1. A estrela azul perde sua massa, que se dirige para o plano do disco de acreção e apresenta sua coloração em tons de laranja e vermelho em torno do horizonte de eventos, região limite, onde a massa canibalizada é sugada.



Fonte: Créditos: NASA.

negro, a estrela Cygnus X-1, é descoberta pelo satélite de raios-X Uhuru, sendo composta de um conjunto binário de estrelas, uma com 19 massas solares e outra com 15 massas solares.

Assim, como apresentado na figura 2, Cygnus X-1 é uma estrela binária cuja interação com sua companheira, variável gigante, apresenta um disco de acreção muito destacado. Seu plano de ejeção de material nuclear é dado perpendicularmente ao plano do disco.

A figura acima e a esquerda mostra a região do óptico obtida pelo telescópio espacial CHANDRA e a direita podemos visualizar uma representação artística da estrela, na qual é possível identificar o disco de acreção gerado pelo buraco negro.

Podemos afirmar que a década de 1960 foi considerada a década de ouro para as pesquisas acerca dos buracos negros, até então, considerados apenas curiosidade geométrica.

No ano de 1970, uma equipe de astrônomos conseguiu registrar o quasar Q0957+561 e perceberam que o espaço-tempo não era plano em sua volta, mas arqueado, sendo o primeiro sinal de uma curvatura causada por uma lente gravitacional.

Na mesma década, Stephen Hawking desenvolveu seus estudos sobre o que é conhecido hoje por *temperatura de Hawking*, cuja equação é dada por:

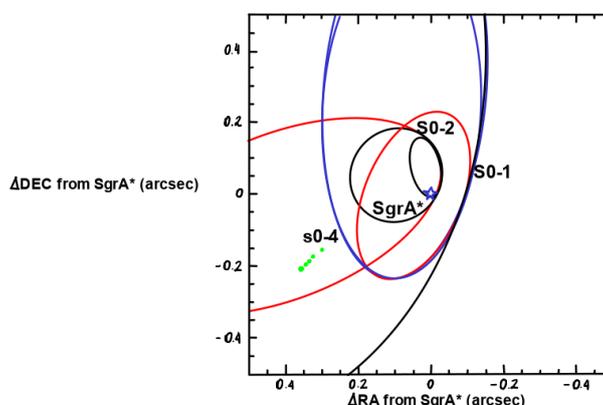
$$T = \frac{\hbar}{4kM'} \quad (3)$$

como

- $k$  é a constante de Boltzmann;
- $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ;
- $M$  é a massa do corpo que emite a temperatura  $T$

Hawking explicou a relação da entropia com a temperatura de um buraco negro. Jacob David Benkentein, tido como o *patriarca da termodinâmica de buracos negros*, postulou que bu-

**Figura 3:** Soluções orbitais para as estrelas S0-1, S0-2 e S0-4 em torno da região dinâmica da Via Láctea, Sgr A.



Fonte: Créditos: ESO/MPE/S. Gillessen et al.

racos negros deveriam possuir entropia e, portanto, temperatura, porém Benkenstein jamais forneceu uma explicação fundamentada nas bases da Física para melhor entendimento da teoria dos buracos negros.

Nas proximidades do horizonte de eventos ocorre a aniquilação de partículas reais por partículas virtuais provenientes do interior do buraco negro formando o que chamamos de *aniquilação por flutuações quânticas*. Nessa região o campo gravitacional é tão intenso que ocorrem perturbações no vácuo em escalas subatômicas formando a criação de pares de partículas-antipartículas.

Na figura (3) mostramos a solução orbital das estrelas S0-1, S0-2 e S0-4 em torno de Sgr A\*. Por meio da dinâmica apresentada por essas três estrelas conseguimos determinar a massa do buraco negro usando a terceira lei de Kepler.

Enquanto Hawking publicava seus estudos sobre os processos termodinâmicos relacionados aos buracos negros, em 1988 foi detectada a primeira observação de um anel de Einstein pela fonte de rádio MG1131+0456 e após isso, mais de vinte desses anéis de Einstein também foram detectados pelo Telescópio Espacial Hubble em conjunto com radiotelescópio Merlin <sup>1</sup>.

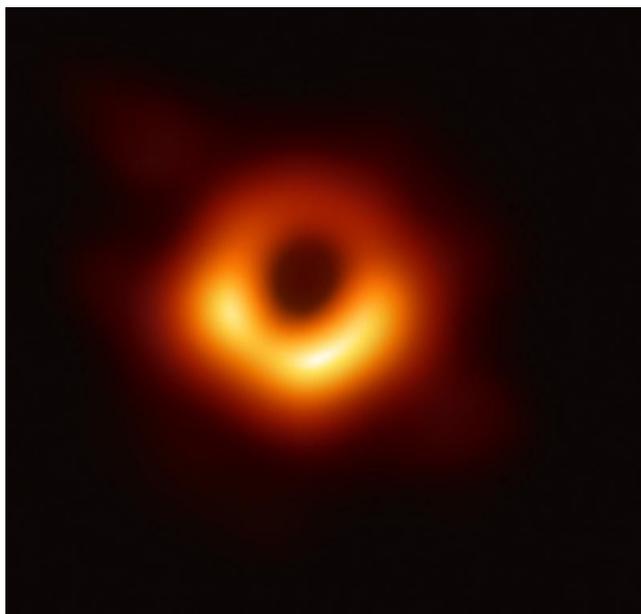
O anel de Einstein é gerado por uma lente gravitacional perfeitamente esférica na qual uma galáxia de fundo está perfeitamente alinhada com o sistema observador-fonte-galáxia. Como o alinhamento é quase perfeito forma-se um objeto na forma de anel e muito brilhante, sendo possível de observar apenas com telescópios de grande abertura, tal como o Hubble.

As ondas gravitacionais são ondulações geradas no espaço-tempo devido a colisão de duas fontes supermassivas e podem ser detectados em superfície terrestre usando interferometria a laser.

Fazendo uso desse aparato científico, no ano de 2015, o experimento LIGO <sup>2</sup>, em consonância com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein registrou as primeiras ondas

<sup>1</sup>Multi-Element Radio Linked Interferometer Network, do inglês.

<sup>2</sup>Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

**Figura 4:** *Buraco negro da galáxia M87.*

*Fonte: Créditos: Event Horizon Telescope (EHT).*

gravitacionais geradas por dois buracos negros de massas distintas. Um com 36 massas solares e outro com 29 massas solares.

A figura (4) mostra o resultado obtido pela equipe do EHT. Nela verificamos a existência de um buraco negro com carga polarizada.

A equipe de cientistas do Evento Horizonte Telescopo, EHT, levantou uma série de dados do buraco negro existente na constelação M87 e obteve a sombra do corpo massivo, mostrando que esse objeto colapsado possui cerca de seis bilhões de massas solares, a aproximadamente 33 milhões de anos-luz do Sistema Solar.

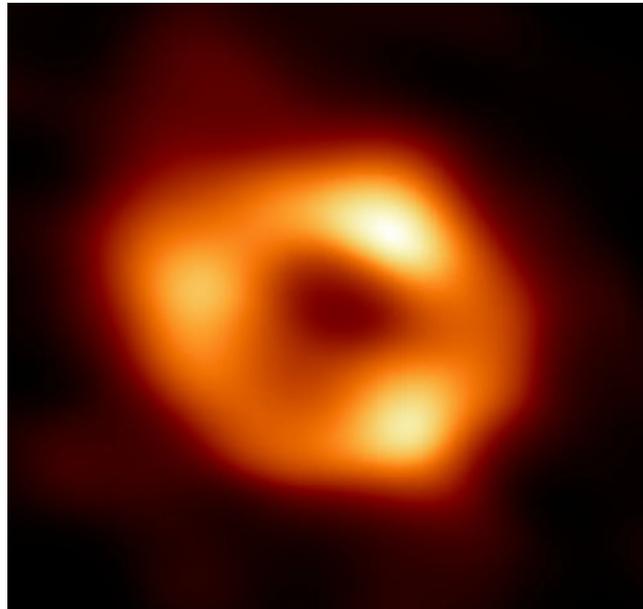
A figura (4) obtida pela equipe do EHT possibilita um estudo mais ampliado sobre o campo elétrico do buraco e foi desenvolvido por cerca de 300 colaboradores que fazem parte dos cientistas por trás da obtenção da primeira imagem de M87.

Assim, a luz que vemos próxima do horizonte de eventos ocorre devido as cargas polarizadas e chegam aos nossos olhos diferentemente daquelas que orbitam um buraco negro de Schwarzschild, sem carga e rotação.

A imagem (5) é a segunda fotografia de um buraco negro supermassivo e a primeira imagem de SgrA\*. É a última fotografia mais atual acerca das pesquisas relacionadas a buracos negros pelo EHT. A fotografia, em si, revelou uma baixa atividade em torno do buraco negro em SgrA\* com respeito a fotografia de M87, confirmando os cálculos da TRG de Einstein, onde o corpo deve possuir simetria mais próxima a de uma esfera, caso sua rotação seja mais lenta que em buracos negros com grande momento angular. Percebemos também que o buraco negro apresenta-se um pouco inclinado em relação ao ângulo de visada dos observatórios astronômicos usados para a coleta de dados, o que também é descrito pela TRG.

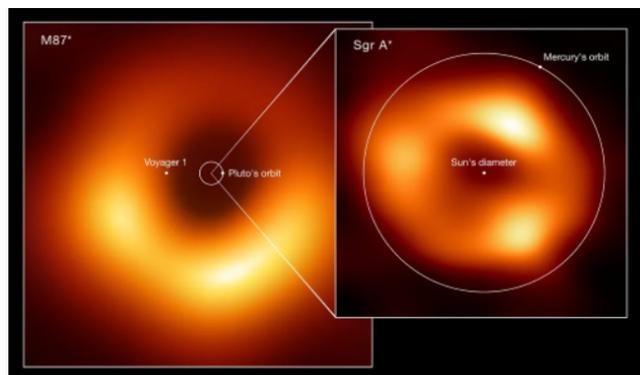
A imagem (6) mostra o tamanho das sombras dos buracos negros M87 e SgrA\*. M87

**Figura 5:** Primeira fotografia de um buraco negro referente a SgrA\* e segunda de um buraco negro supermassivo.



Fonte: Créditos: ESO.

**Figura 6:** Comparação entre os tamanhos das sombras dos buracos negros M87 e SgrA\*.



Fonte: Créditos: ESO.

possui seu horizonte de eventos próximo da distância da sonda Voyager com relação ao Sol, enquanto que o horizonte de eventos de SgrA\* é inferior a órbita de Mercúrio.

Abordaremos, a seguir, os diferentes tipos de buracos negros, apresentando a estrutura que os diferenciam, os fenômenos físicos envolvidos para a sua formação e quais são suas respectivas métricas usando a assinatura métrica  $(-, +, +, +)$ .

## II. BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

O buraco negro de Schwarzschild possui simetria esférica e estática. Não apresenta carga nem momento angular e foi descrito pela primeira vez por Karl Schwarzschild. Em sua estrutura encontramos um horizonte de eventos, singularidade, disco de acreção e esfera de fótons. É o tipo de buraco negro mais simples para o estudo das equações de campo de Einstein, porém é o caso mais irrealista de um buraco negro, pois grande parte das estrelas antes do colapso gravitacional apresenta algum tipo de rotação.

## III. BURACO NEGRO DE REISSNER-NÖRDSTROM

O buraco negro de Reissner-Nördstrom possui simetria esférica e também é estática, porém apresenta carga em sua estrutura. Sua descoberta ocorreu de forma simultânea por Hans Reissner e Gunnar Nördstrom. Apresenta um horizonte de eventos, uma singularidade, um disco de acreção e esfera de fótons. Sendo uma extensão de um buraco negro de Schwarzschild, também não apresenta muita significação para estudo de estrelas após o seu colapso devido a rotação que é preservada.

## IV. BURACO NEGRO DE KERR

O buraco negro de Kerr possui simetria axial e não é estático. Em sua morfologia não é possível encontrar quaisquer tipos de cargas elétricas, mas apresenta momento angular característico. Foi descrito pela primeira vez pelo astrofísico Roy Kerr. Apresenta dois horizontes (um horizonte de Cauchy e um horizonte de eventos), singularidade, ergoregião, disco de acreção e duas esferas de fótons. É o modelo mais real de buraco negro para estudos em astrofísica, uma vez que após o colapso das estrelas é conservada sua rotação, mas não conservam grande parte da sua carga elétrica.

## V. BURACO NEGRO DE KERR-NEWMAN

O buraco negro de Kerr-Newman é uma extensão do buraco negro de Kerr, pois apresenta em sua constituição carga elétrica. Possui em sua estrutura simetria axial, momento angular e carga elétrica. Foi descrito por Roy Patrick Kerr em conjunto com Ezra Newman. Apresenta dois tipos de horizonte de eventos, singularidade, ergoregião, disco de acreção e duas esferas de fótons. Buracos negros desse tipo não possuem grande relevância para estudos em astrofísica, uma vez que estes objetos não apresentam grandes quantidades significativas de carga elétrica.

**Tabela 1:** Coeficientes da métrica de Schwarzschild.

$g_{\mu\nu}$	Expressão	$g_{\mu\nu}$	Expressão
$g_{tt}$	$-\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$	$g_{rr}$	$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}$
$g_{\theta\theta}$	$r^2$	$g_{\varphi\varphi}$	$r^2 \sin^2 \theta$

## VI. BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Adotamos a assinatura métrica  $(-, +, +, +)$ , onde a coordenada temporal possui sinal negativo, enquanto que as demais coordenadas espaciais, positivo. Assim, a métrica de Minkowski será dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + d\varphi^2. \quad (4)$$

No caso do espaço-tempo simetricamente esférico, o mesmo deve ser invariante sob rotações ou mudança de coordenadas. Na solução de vácuo de Schwarzschild devemos observar a condição que o tensor de energia momento deve ser nulo, ou seja,  $T_{\mu\nu} \equiv 0$ , o mesmo deve ser válido para a constante cosmológica e essas condições implicam que o tensor de Ricci,  $R_{\mu\nu}$  seja nulo, bem como seu escalar,  $R$ .

Escreveremos o raio de Schwarzschild como

$$r_S = 2M \quad (5)$$

e a métrica escreveremos como sendo

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (6)$$

Os coeficientes da métrica de Schwarzschild são apresentados na tabela 1

## VII. A DISTÂNCIA PRÓPRIA PARA O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Agora, para determinar a distância própria adotaremos  $dt = d\theta = d\varphi = 0$ , e substituiremos na métrica de Schwarzschild do seguinte modo

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}(0)^2 + g_{rr} dr^2 + r^2(0)^2 + r^2 \sin^2 \theta(0)^2 \\ \Delta s &= \sqrt{r^2 - r_{Sch} r} + r_{Sch} \ln \left| \frac{\sqrt{r - r_{Sch}} + \sqrt{r}}{\sqrt{r_{Sch}}} \right|, \end{aligned}$$

que explica a deformação da geometria proveniente do colapso gravitacional de uma estrela em seu estágio final.

### VIII. O TEMPO PRÓPRIO PARA O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Determinaremos o tempo próprio  $\Delta\tau$  considerando  $dr = d\theta = d\varphi = 0$  e calcularemos do seguinte modo

$$\Delta\tau = \int d\tau$$

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \Delta t.$$

Percebemos que o tempo passa mais devagar perto do horizonte de eventos.

Consideremos agora as coordenadas 3km e 4km. A primeira referente ao raio de Schwarzschild de uma estrela qualquer e uma segunda coordenada afastada apenas 1 km desse horizonte de eventos. Para entendermos como o tempo se passa nas proximidades do horizonte de eventos realizamos o seguinte cálculo.

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_{\text{Sch}}}{r}} \Delta t$$

$$\Delta\tau = 0,5h.$$

Ou seja, nas proximidades do horizonte de eventos se passaram apenas 30 minutos enquanto que outro relógio mais afastado já marcou em seus ponteiros 1 hora.

Se o relógio for afastado do horizonte de eventos e for colocado na coordenada  $r = 12$  km, o tempo será mais próximo de uma hora e para ser mais exato, será de 0,86 horas, ou um pouco mais de 51 minutos.

Se o relógio for afastado mais ainda, chegará um ponto em que  $\Delta\tau \rightarrow \Delta t$  e isso ocorrerá quando  $r \rightarrow +\infty$ .

### IX. HORIZONTE DE EVENTOS DE SCHWARZSCHILD

Na proximidade de um buraco negro de Schwarzschild, o forte campo gravitacional distorce o espaço-tempo de modo que a distância até o seu centro tende ao infinito.

O horizonte de eventos é uma região geométrica imaginária que separa o Universo observável da parte interna de sua estrutura. A essa região imaginária chamaremos de horizonte de eventos, local ao qual toda a informação do Universo é perdida, em princípio.

Nas proximidades do horizonte de eventos muitos fenômenos físicos ocorrem. O forte campo gravitacional se dilata tão acentuadamente que o tempo nessa região tende a zero. Assim, se estamos infinitamente distante desse local, o tempo passará de forma que estamos habituados em nosso dia a dia. No entanto, se estamos próximo do horizonte de eventos, o nosso relógio apresentará seus tic tacs um pouco mais espaçados para quem nos observa de um local muito longe dali e conforme o tempo vai tendendo a zero, o nosso corpo vai se tornando cada vez mais delgado, espaguetificando-se devido as enormes forças de maré geradas pelo forte campo gravitacional gerado pelo buraco negro. Um fio cilindro de

**Figura 7:** Buraco negro de Schwarzschild mostrando seu disco de acreção, horizonte de eventos e singularidade.



Adaptado de ESO, ESA/Hubble, M. Kornmesse

Fonte: Créditos: ESO, ESA/Hubble, M. Kornmesse.

diâmetro igual a sua longitude, poderá se tornar um fio bastante delgado se a região inferior do cilindro estiver voltada para o centro do buraco negro. Essa deformação será maior a medida que o mesmo avança na direção do centro quando passa pelo horizonte de eventos.

Considerando a simetria radial existente em um buraco negro, admitimos que a velocidade de escape nas redondezas do horizonte de eventos será igual a velocidade da luz e quando um fóton se aproxima do horizonte e atinge a velocidade da luz, seu tempo próprio deverá passar muito mais lentamente do que para um corpo mais afastado daquela região.

### IX.1. Horizonte de eventos para o buraco negro de Schwarzschild

O horizonte de eventos é igual ao raio de Schwarzschild para buraco negros estáticos e sem carga elétrica.

O raio de Schwarzschild é definido pela equação

$$r_{Sch} = 2M, \quad (7)$$

que possui dependência da massa do objeto colapsado.

#### Símbolos e seus significados

- $r_{Sch}$  : raio de Schwarzschild;
- $M$  : massa do buraco negro.

Acima, apresentamos uma figura que mostra um buraco negro de Schwarzschild com o horizonte de eventos, o disco de acreção e singularidade. Essas duas últimas características físicas abordaremos em seguida.

## X. DISCO DE ACREÇÃO

Daremos o nome de disco de acreção à estrutura que é formada pela matéria em movimento orbital em torno do buraco negro.

## XI. SINGULARIDADE

Nessa região, devido o campo gravitacional intenso, toda a matéria do buraco negro é concentrada em uma região geométrica tão pequena que a densidade tende ao infinito devido o raio ser tão pequeno dessa esfera gravitante.

O espaço-tempo onde a singularidade está representada é tão deformado que cria um poço tão profundo que qualquer corpo que cruza o horizonte de eventos tragará para dentro dessa singularidade. Na singularidade, muitas propriedades geométricas tendem ao infinito.

Dizemos que a singularidade é a parte principal do buraco negro devido toda sua massa se encontrar nessa região.

## XII. SINGULARIDADE NUA

Todo buraco negro deve conter um horizonte de eventos que permita indicar o ponto de não retorno para o mundo real, porém existe o conceito de um buraco negro que colapsou e não deu conta de formar esse perímetro limite para que a luz entenda até onde possa ir. Assim, existe a possibilidade da luz se aproximar da singularidade de uma estrela colapsada e ainda conseguir retornar para o mundo real devido a ausência do horizonte de eventos. A esse fenômeno damos o nome de singularidade nua, pois o horizonte de eventos não está escondendo a singularidade existente, mas tornando-a visível para qualquer observador distante.

## XIII. ESFERA DE FÓTONS PARA O ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

Uma esfera de fótons é uma região geométrica onde a gravidade é tão fortíssima que os fótons são obrigados a viajar em órbitas. O raio da esfera do fóton, que também é o limite inferior de qualquer órbita estável, é, para um buraco negro de Schwarzschild:

$$R_{\text{Esf.}} = 3M = \frac{3}{2}R_{\text{Sch.}} \quad (8)$$

A equação (8) é também chamada de *Equação da órbita do último fóton*, pois depois disso não há mais meios físicos que façam com que esse último fóton consiga retornar.

Entretanto, como percebemos, há uma região geométrica entre a órbita do último fóton com o raio de Schwarzschild que é dada pela média aritmética entre as duas regiões.

Em uma órbita específica a luz descreverá uma órbita circular. Se o fóton se aproximar mais um pouco do horizonte de eventos surgirá uma órbita espiralada. Enquanto que se o mesmo se afastar do horizonte de eventos um pouco mais poderá ter uma órbita hiperbólica na qual será lançado novamente para o espaço.

#### XIV. ANEL DE EINSTEIN

O anel de Einstein, também chamado de anel de Einstein-Chwolson ou anel de Chwolson, é formado quando a luz de uma galáxia passa por uma região de campo gravitacional intenso devido a um objeto massivo a caminho da Terra. Devido ao efeito de lenteamento gravitacional, a luz deverá ser defletida, fazendo com que seus raios pareçam vir de lugares distintos. Se o conjunto fonte/lente/observador estiverem todos alinhados, a luz formará um anel.

Na década de 1912, Einstein previu a curvatura da luz por um objetivo massivo, porém o físico russo Orest Chwolson foi o primeiro cientista a mencionar o efeito de anel em 1924 e por esse motivo, os anéis de Einstein são também chamados de anéis de Einstein-Chwolson.

Entretanto, devido o alinhamento fonte/lente/observador nunca ser perfeito, os anéis de Einstein-Chwolson apresentam anéis incompletos. São raros os anéis completos devido o alinhamento não ser perfeito.

O tamanho do anel é calculado por meio do raio de Einstein, cuja equação é dada, em radianos, por

$$\theta = \sqrt{\frac{4MD_{LF}}{D_L D_F}}. \quad (9)$$

onde

- $M$  é a massa da lente;
- $D_L$  é a distância do diâmetro angular da lente;
- $D_F$  é a distância do diâmetro angular à fonte e
- $D_{LF}$  é a distância angular do diâmetro entre a lente e a fonte.

Devido a curvatura da geometria espaço-temporal  $D_{LF} \neq D_F - D_L$

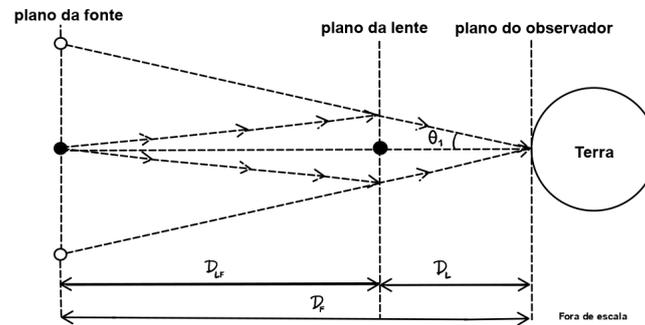
O fenômeno do lenteamento gravitacional prova que a TRG está correta e nos fornece imagens espetaculares e que dizem respeito a quantidade de massa existente para a formação desse conjunto.

Um dos muitos anéis de Einstein foi estudado pela Wide Field and Planetary Camera 2 (WFPC2) e Wide Field Camera 3 (WFC3) para um levantamento de dados sobre as lentes gravitacionais.

#### XV. CRUZ DE EINSTEIN

A cruz de Einstein também é formada pela efeito do lenteamento gravitacional, porém o efeito forma quatro pontas bem distintas, indicando que a lente seja formada por mais corpos massivos colapsados.

**Figura 8:** Esquema mostrando alinhamento entre fonte/lente/observador para a formação do anel de Einstein.



Fonte:

## XVI. BURACO NEGRO DE KERR

Considerando uma esfera simétrica de baixa rotação com tensor energia-momento independente do tempo dentro do objeto teremos um buraco negro estacionário. Nesta circunstância consideraremos perturbações na métrica devido a sua simplicidade, assumindo que o objeto rotaciona rigidamente com velocidade angular  $\vec{\Omega}$  e apontando na direção do eixo z positivo e ainda considerando seu momento de inércia  $I$  e após algumas simplificações chegaremos na métrica de Kerr para campo fraco:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{R}\right)(dR^2 + R^2d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2) \quad (10)$$

$$- \frac{4Ma}{R} \sin^2\theta d\varphi dt, \quad (11)$$

onde

$$a \equiv \frac{S}{M} = \frac{I|\vec{\omega}|}{M} \quad (12)$$

é o momento angular por unidade de massa.

Para campos mais fortes a métrica será apresentada em termos das coordenadas de Boyer-Lindquist. Assim,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_{\text{Sch}}r}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}dtd\varphi + \Sigma d\theta^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma}\sin^2\theta d\varphi^2,$$

onde  $\Sigma, \Delta$  e  $\mathcal{A}$  são funções das coordenadas  $(r, \theta)$ . Trocamos os termos por suas abreviações correspondentes, sendo:

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (13)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad (14)$$

$$\mathcal{A} \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta, \quad (15)$$

e

$$r_{\text{Sch}} = 2M \quad (16)$$

representa o raio de Schwarzschild.

Faremos algumas considerações:

- Se o momento angular for idênticamente igual a zero, a solução reduz-se a geometria espaço-temporal de Schwarzschild;
- $M$  represente a massa do buraco negro, tal como representada na geometria de Schwarzschild.
- O parâmetro  $a$  corresponde momento angular por unidade de massa do buraco negro.
- No caso em que  $r \gg a$  a métrica de Schwarzschild com as coordenadas de Boyer-Lindquist recaem no limite de campo fraco.

Os buracos negros de Kerr não possuem carga elétrica, mas rotacionam em torno do seu eixo, ou seja, possuem momento angular e simetria axial.

## XVII. IMPORTÂNCIA DA SOLUÇÃO DE KERR

A solução de Kerr representa um importante avanço para a astrofísica, pois muitos corpos, não compactos antes de colapsarem formando um buraco, apresentam rotações. Desde um asteroide até o buraco negro mais massivo existente no interior da galáxia M87 ou ainda no caso mais recente, o buraco negro SgrA\*.

Devido a sua simplicidade, a métrica de Schwarzschild descreve apenas uma curiosidade geométrica para o estudos em astrofísica, pois todos os corpos celestes apresentam rotações em torno de seus eixos imaginários.

A solução de Kerr é uma solução exata de vácuo para as equações de Einstein e representa uma solução mais próxima do real para objetos compactos ou massivos, tais como os buracos negros estelar ou supermassivos existentes no interior das galáxias.

Enquanto a solução de Schwarzschild descreve a geometria espaço-temporal para um objeto esfericamente simétrico, a solução de Kerr descreve a geometria espaço-temporal de um objeto axialmente simétrico.

## XVIII. HORIZONTE DE EVENTOS PARA O BURACO NEGRO DE KERR

Como  $r$  diminui dentro da região de superfície infinita, a coordenada temporal do tensor métrico será positiva (MOORE, 2013).

A superfície dada por  $(g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi} = 0$  corresponde ao horizonte de eventos em um buraco negro de Kerr e reescreveremos para  $(r^2 + a^2 - 2Mr) \sin^2 \theta = 0$  ou ainda, percebemos que a coordenada radial é dada por  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{(M)^2 - a^2}$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2 - 2Mr) \sin^2 \theta &= 0 \\ (r^2 + a^2 - 2Mr) \sin^2 \theta &= 0 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Ajustando os termos obteremos

$$r^2 - 2M \cdot r + a^2 = 0.$$

Os coeficientes para essa equação quadrática são  $a_r = 1, b_r = -2M$  e  $c_r = a^2$ .

Substituindo-os na fórmula de Bháskara encontraremos:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}.$$

Há duas soluções para o horizontes, uma interior a outra. Considerando que uma é interna a outra, então o horizonte de eventos mais interno será inacessível a um observador. Perceberemos, que se  $a \rightarrow 0, r = 2M$  em  $r_+$ .

Variamos o momento angular para identificar como o horizonte de eventos varia e esses resultados são apresentados na tabela 2.

Percebemos que  $a \rightarrow 0, r_- \rightarrow 0M$ , enquanto que para  $a \rightarrow M, r_- \rightarrow 1M$ . Assim, para momentos angulares mais proeminentes observamos que o horizonte de eventos de Cauchy,  $r_-$ , será maior.

Para esse caso,  $a \rightarrow 0, r_+ \rightarrow 2M$ , enquanto que  $a \rightarrow M, r_+ \rightarrow M$ .

## XIX. SOMBRA DE UM BURACO NEGRO DE KERR

### XIX.1. Observadores locais na geometria de Kerr

A sombra (veja a figura 9) do buraco negro perde seu achatamento conforme reduz seu momento angular. No caso limite, com  $a \rightarrow 0$ , obtemos um buraco negro de Schwarzschild.

Investigando a sombra de um objeto colapsado, admitiremos que a fonte que emana os raios de luz está infinitamente longe do observador e que seus raios são distribuídos de maneira uniforme. As coordenadas celestes  $(\alpha, \beta)$  do observador são distâncias angulares aparentes da imagem de uma esfera medida da direção da linha de visada.  $\alpha$  e  $\beta$  são medidos na direção perpendicular e paralela ao eixo de rotação da esfera celeste, respectivamente.

$a$	$M - \sqrt{M^2 - a^2}$	$a$	$M + \sqrt{M^2 - a^2}$
$a = 0,0M$	$0,000M$	$a = 0,00M$	$2,000M$
$a = 0,05M$	$0,001M$	$a = 0,05M$	$1,999M$
$a = 0,10M$	$0,005M$	$a = 0,05M$	$1,995M$
$a = 0,15M$	$0,011M$	$a = 0,15M$	$1,989M$
$a = 0,20M$	$0,020M$	$a = 0,20M$	$1,980M$
$a = 0,25M$	$0,032M$	$a = 0,25M$	$1,968M$
$a = 0,30M$	$0,046M$	$a = 0,30M$	$1,954M$
$a = 0,30M$	$0,063M$	$a = 0,30M$	$1,937M$
$a = 0,40M$	$0,083M$	$a = 0,40M$	$1,917M$
$a = 0,45M$	$0,107M$	$a = 0,45M$	$1,893M$
$a = 0,50M$	$0,134M$	$a = 0,50M$	$1,866M$
$a = 0,55M$	$0,165M$	$a = 0,55M$	$1,835M$
$a = 0,60M$	$0,200M$	$a = 0,60M$	$1,800M$
$a = 0,65M$	$0,240M$	$a = 0,65M$	$1,760M$
$a = 0,70M$	$0,286M$	$a = 0,70M$	$1,714M$
$a = 0,75M$	$0,339M$	$a = 0,75M$	$1,661M$
$a = 0,80M$	$0,400M$	$a = 0,80M$	$1,600M$
$a = 0,85M$	$0,473M$	$a = 0,85M$	$1,527M$
$a = 0,90M$	$0,564M$	$a = 0,90M$	$1,436M$
$a = 0,95M$	$0,688M$	$a = 0,95M$	$1,312M$
$a = 1,00M$	$1,000M$	$a = 1,00M$	$1,000M$

**Tabela 2:** Tabela mostrando os cálculos para  $r_-$  e  $r_+$ .

As coordenadas estão relacionadas a dois parâmetros  $\xi$  e  $\eta$  (e ângulo de inclinação  $i$ ). No espaço-tempo de Kerr, existem duas regiões assintoticamente planas;  $r \rightarrow +\infty$  e  $r \rightarrow -\infty$ .

Assim, uma vez que os raios de luz cruzam para a região de  $r < 0$  e vão para o outro infinito ( $r = -\infty$ ), eles nunca voltarão a Terra ( $r > 0$ ).

Como resultado, encontramos uma pequena mancha escura, na direção em que os fótons escapam para  $r = -\infty$ .

Encontraremos uma curva muito estreita, que corresponde à órbita esférica instável externa. Há outra região escura no caso de uma singularidade nua. Alguns raios de luz que atingem uma singularidade, nunca alcançarão o observador. Na esfera celeste veremos um ponto escuro na direção em que os fótons atingem a singularidade.

Para encontrar a forma aparente, primeiro analisaremos as órbitas dos fótons em um espaço-tempo de Kerr. Existem duas classes importantes de órbitas de fótons para órbitas-sombra que discutiremos.

Se a órbita está no plano equatorial, há uma órbita circular. A órbita é dada pela equação

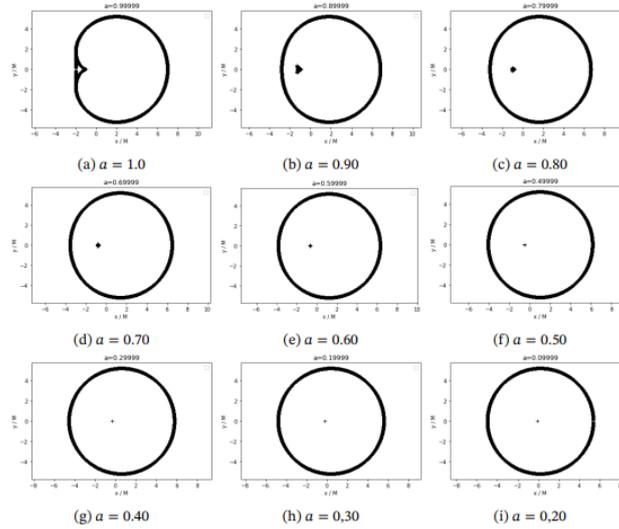
$$\theta = \pi/2, \tag{17}$$

$$\mathcal{R}(r) = 0, \frac{d\mathcal{R}}{dr} = 0. \tag{18}$$

Para um buraco negro, a equação (18) dá o raio da órbita como

$$r = r_{\text{Circ}}^{\pm} := 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \cos^{-1} \left( \mp \frac{a}{M} \right) \right] \right\}, \tag{19}$$

**Figura 9:** A sombra de um buraco negro de Kerr. As coordenadas celestes são medidas em unidades de massa ( $M$ ) de um buraco negro de Kerr. Para estes subgráficos variamos o momento angular  $a$ .



Fonte:

$$\tilde{\zeta}_{\text{Circ}}(r_{\text{Circ}}, a, M) = \frac{(r_{\text{Circ}}^{\pm})^2 + a^2}{a} - \frac{2r_{\text{Circ}}^{\pm} \Delta(r_{\text{Circ}}^{\pm}, a, M)}{a(r_{\text{Circ}}^{\pm} - M)}. \quad (20)$$

onde o sinal superior se aplica a órbitas progressivas e o sinal inferior a órbitas retrógradas. Neste caso, o outro parâmetro conservado  $\eta$  desaparece.

As equações (19) obedecem a seguinte equação cúbica (JUNIOR, 2020)

$$r^3 - 6Mr^2 + M^2r - 4a^2M = 0. \quad (21)$$

Apresentamos um gráfico com subgráficos para identificar a variação da órbita esférica de fótons para  $a \rightarrow 0$  e para  $M \rightarrow 0$ .

Se for uma singularidade nua, obtemos uma órbita circular, que é uma órbita retrógrada com raio :

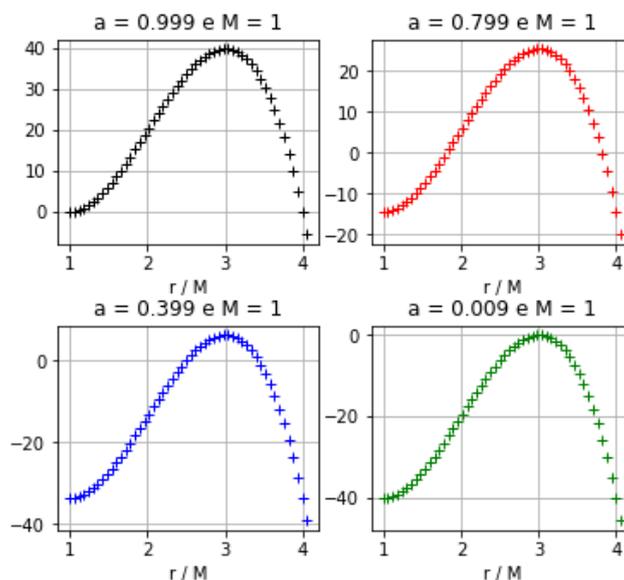
$$r = \tilde{r}_{\text{Circ}}^{(-)} := 2M \left\{ 1 + \cosh \left[ \frac{2}{3} \cosh^{-1} \left( \frac{a}{M} \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Com este parâmetro  $\tilde{\zeta}_{\text{Circ}}$ , o fóton pode realizar uma infinita quantidade de voltas no círculo com raio  $r_{\text{Circ}}$ .

Se  $|\tilde{\zeta}|$  é ligeiramente maior que  $|\tilde{\zeta}_{\text{Circ}}^{\pm}|$ , o fóton do infinito se aproxima dessa órbita circular, mas volta ao infinito. Por outro lado, se  $|\tilde{\zeta}|$  é ligeiramente menor que  $\tilde{\zeta}_{\text{Circ}}^{\pm}$ , então o fóton do infinito entra no horizonte (ou atinge um anel de singularidade). Nunca voltará ao infinito ( $r = +\infty$ ). Portanto,  $\tilde{\zeta}_{\text{Circ}}$  fornece uma parte do limite da sombra no plano equatorial.

Para órbitas de fótons mais genéricas, a constante de Carter  $\mathcal{Q}$  não desaparece. Tais

**Figura 10:** Parâmetro  $\eta$  em termos do raio das órbitas esféricas de fótons ao redor do buraco negro de Kerr. Nesta figura adotamos em a)  $a = 0,999$  e  $M = 1$ , b)  $a = 0,799$  e  $M = 1$ , c)  $a = 0,399$  e  $M = 1$  e d)  $a = 0,009$  e  $M = 1$



Fonte: Simulação em Python. Disponível em <<https://bit.ly/3ptrNeq>>.

órbitas não estão em um plano bidimensional, mas são tridimensionais. Mesmo nesse caso, definiremos uma órbita crítica que nos fornece o limite de uma sombra. Esta órbita crítica é a órbita esférica (instável). Tal órbita será dada por

$$\mathcal{R}(r) = 0, \frac{d\mathcal{R}(r)}{dr} = 0. \quad (23)$$

A solução dessa órbita,  $r_{\text{Esf}}$ , indica que  $r$  deve ser uma constante. Embora a órbita seja tridimensional e possa ser muito complicada, descreverá um movimento com distância radial fixa. Chamamos de órbita esférica as soluções dessas órbitas formando uma família de parâmetros. Portanto, adotando  $r_{\text{Esf}}$  como o "parâmetro", encontramos dois parâmetros conservados das órbitas esféricas de

$$\zeta_{\text{Esf}}(r_{\text{Esf}}, a, M) = \frac{(r_{\text{Esf}}^{\pm})^2 + a^2}{a} - \frac{2r_{\text{Esf}}^{\pm} \Delta(r_{\text{Esf}}^{\pm}, a, M)}{a(r_{\text{Esf}}^{\pm} - M)}. \quad (24)$$

$$\eta_{\text{Esf}}(r_{\text{Esf}}, a, M) = -\frac{r_{\text{Esf}}^3 (r_{\text{Esf}} (r_{\text{Esf}} - 3M)^2) - 4Ma^2}{a(r_{\text{Esf}} - M)^2}. \quad (25)$$

O parâmetro  $r_{\text{Esf}}$  é formado pela condição existente nas equações (24) e (25).

Inserindo as equações (25) e (24) em

$$\mathcal{J}(\zeta, \eta) := \eta + (a - \zeta)^2. \quad (26)$$

encontra-se a expressão

$$\mathcal{J}(r, M) = \mathcal{J}(r, M) = \frac{4r_{\text{Esf}}^2 \Delta(r_{\text{Esf}})}{(r_{\text{Esf}} - M)^2}. \quad (27)$$

Portanto, para órbitas esféricas reais, necessitaremos da condição  $\Delta(r_{\text{Esf}}) > 0$ , isto é,  $r_{\text{Esf}} > r_+$  para um buraco negro, onde

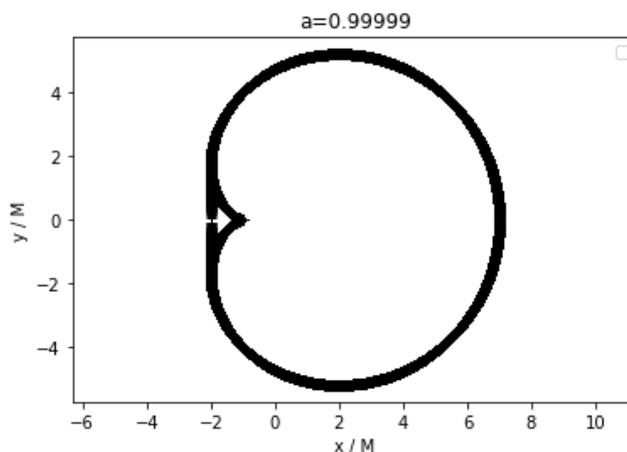
$$r_{\pm} := M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (28)$$

são os raios do horizonte, e qualquer raio  $r_{\text{Esf}}$  para uma singularidade nua. Como não é condição suficiente para a existência de uma órbita esférica, quando desenhamos a sombra do objeto colapsado, verificamos numericamente se a solução de

$$\mathcal{R}(r) = 0, \frac{d\mathcal{R}(r)}{dr} = 0. \quad (29)$$

Segundo Lima Junior et al. (2020) (JUNIOR, 2020) a constante  $\eta_{\text{Circ}}$  está relacionada ao movimento na direção da coordenada  $\theta$  e  $\zeta_{\text{Circ}}$  é o momento angular do fóton em torno do eixo  $z$ , por unidade de energia. Quando  $\eta_{\text{Circ}} = 0$ , as órbitas esféricas de fótons têm seu movimento restrito ao plano equatorial. Além disso, estas órbitas, restritas ao plano equatorial, são descritas no mesmo sentido de rotação do buraco negro, no caso em que  $\zeta_{\text{círculo}} >$ , e no sentido oposto, no caso em que  $\zeta_{\text{círculo}} < 0$ , constituindo as chamadas órbitas co-girantes e contra-girantes, respectivamente.

**Figura 11:** A sombra de um buraco negro de Kerr. As coordenadas celestes são medidas em unidades de massa ( $M$ ) de um buraco negro de Kerr.



Fonte: Simulado em Python e disponível em <<https://bit.ly/3ptrNeq>>.

Os subgráficos menores são as sombras de um buraco negro de Kerr para um observador localizado em uma galáxia muito distante do buraco negro e a 90 graus com relação ao seu plano equatorial.

## XIX.2. Observadores locais na geometria de Kerr

O estudo do artigo de Lima et al (2020) (JUNIOR, 2020) fornece-nos as características físicas para observadores locais na geometria de Kerr. no sentido de compreender as características físicas para observador locais na geometria de Kerr e serão apresentadas nessa sessão.

Descreveremos como o observador medirá o quadri-momento de um fóton singular, bem como este observador analisará a sombra de um buraco negro segundo a geometria de Kerr.

Descrevemos um observador com momento angular nulo pela base tetrada

**Tabela 3:** Base tetrada.

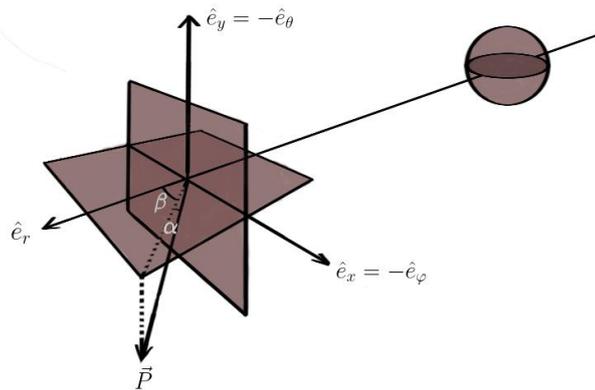
$\hat{e}_t$	$\zeta\partial_t + \gamma\partial_\varphi$	$\hat{e}_r$	$\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r$
$\hat{e}_\theta$	$\frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\partial_\theta$	$\hat{e}_\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}\partial_\varphi$

**Tabela 4:** Símbolos e suas respectivas representações.

Símbolo	Expressão
$\zeta$	$\sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{(g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}$
$\gamma$	$-\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{(g_{t\varphi})^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi}}}$

**Tabela 5:** Componentes da métrica de Kerr e suas respectivas expressões.

$g_{\mu\nu}$	Expressão	$g_{\mu\nu}$	Expressão
$g_{tt}$	$\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)$	$g_{rr}$	$\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2}$
$g_{t\varphi}$	$-\frac{2Mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$	$g_{\theta\theta}$	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$
$g_{\varphi\varphi}$	$\frac{(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta$		



**Figura 12:** Representação da decomposição do momento linear de um fóton na base  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ . Essa decomposição é feita em função dos ângulos  $(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre o tri-momento linear  $\vec{P}$  e o plano gerado pelos versores  $\hat{e}_r$  e  $\hat{e}_\varphi$ , enquanto que  $\beta$  é o ângulo que a projeção vertical de  $\vec{P}$  no plano  $\hat{e}_r \perp \hat{e}_\varphi$  faz com o versor  $\hat{e}_r$  segundo (JUNIOR, 2020). A esfera encontra-se no infinito para que os fótons cheguem no observador de forma paralela.

## XX. PROGRAMAÇÃO EM PYTHON

O Python é uma ferramenta de fácil acesso e gratuita, podendo ser usada nas suas mais variadas formas dentro da Ciência.

Suas bibliotecas são importadas por meio de comando simples e que são similares aos comandos existentes no preâmbulo dos textos acadêmicos escritos em LaTeX.

Por meio do Python podemos testar a velocidade da internet importante a biblioteca *speedtest-cli* e instalando-a em sua conta do *Google Colab* por meio do comando *pip install*

*speedtest-cli*. A partir desse teste você poderá se certificar do desempenho e do tempo gasto para simular seus scripts computacionais.

Todos os scripts que foram desenvolvidos por (ANDRADE; WURZ, 2022) encontram-se em <<https://bit.ly/3ptrNeq>>.

Com o Python podemos:

- Calcular a trajetória de fótons próximos de um objeto massivo;
- Determinar todos os coeficientes necessários para as equações de campo de Einstein introduzindo uma métrica adequada ao estudo;
- Determinar a curva de luz de um buraco negro;
- Determinar a órbita de precessão do planeta Mercúrio.
- Calcular a sombra de um buraco negro de Kerr e
- Determinar equações da geodésica.

As aplicações do Python para análise da fenomenologia é bastante ampla. Em nosso estudo, optamos por determinar alguns dos exemplos acima importando as biblioteca *matplotlib* que apresenta em seu output os resultados finais do processamento, *pylab* que é similar ao *matplotlib*, o *numpy* que possibilita trabalhar com dados numéricos, *math* que possui todas as ferramentas matemáticas que dão suporte aos dados gerados numericamente e *scipy* que é uma biblioteca avançada e mais robusta que possibilita a obtenção e manipulação de dados científicos.

## XXI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho foi dedicado a estudar os diferentes tipos de buracos negros investigados pela comunidade científica até o momento.

Observou-se que existe um limite de velocidade para que qualquer objeto possa escapar da sua superfície e essa velocidade limite deve ser igual a velocidade da luz. Assim, uma estrela supermassiva que está colapsando conseguirá curvar seus últimos raios para o seu interior. Essa estrela seria tão brilhante que não poderia ser vista por qualquer observador localizado em uma galáxia distante. Contudo essa explicação ficou sem estudos mais profundos até que fosse formulada a Teoria da Relatividade Geral, pois há uma relutância da comunidade científica no estudo de fenômenos que carecem de comprovação direta.

Tanto a Primeira quanto a Segunda Guerra Mundial acabaram trazendo grandes infortúnios para os estudos da Teoria da Relatividade Geral, quando a primeira caravana para os estudos da deflexão da luz acabou resultando no confisco dos telescópios, pois pensou-se que estes seriam usados para serviço de espionagem.

Mais tarde, verificou-se que o modelo descrito por Karl Schwarzschild não descreve modelos reais de estrelas existentes no Universo, uma vez que estes objetos colapsados acabam conservando seu momento angular.

Com o advento da física para o estudo dos quasares verificou-se a necessidade de estudo dos buracos negros rotativos, surgindo o modelo mais realístico de buraco negro existente no universo, pois seu momento angular deve ser conservado após o colapso da estrela.

Considera-se ainda mais relevante o uso de métodos computacionais para o entendimento da estrutura desses objetos colapsados, pois descrevem com mais rapidez e eficiência a geometria de um buraco negro de Schwarzschild ou de Kerr, por exemplo.

Utilizou-se pacotes prontos desenvolvidos em Python voltados para o estudo de buracos negros de Schwarzschild e de Kerr facilitando o estudo desses fenômenos intrigantes. Verificou-se que um buraco negro que apresenta momento angular deverá se aproximar do modelo estudado por Schwarzschild se este apresentar um momento angular que diminui com o tempo.

Há ainda modelos de buracos negros que são esfericamente simétricos, estáticos e que apresentam a conservação da carga, bem como existem buracos negros de Kerr com carga elétrica conservada após o seu último suspiro como estrela supermassiva.

Considerou-se, em primeiro momento o estudo dos modelos mais simples, porém observa-se a necessidade de um estudo mais detalhado dos outros modelos não apresentados nesse trabalho.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, V. C.; WURZ, G. *Buracos Negros de Kerr e de Schwarzschild: uma abordagem por meio do Python*. 103 f. Monografia (Especialização em Astrofísica Gravitacional e Física Espacial) — Universidade de Brasília, Brasília, 2022. 116

JUNIOR, H. C. L.; CUNHA, P. V. da; HERDEIRO, C. A.; CRISPINO, L. C. Sombras de buracos negros: desvendando a física por detrás da imagem de M87. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, 2020. 111, 113, 114, 115

MOORE, T. A. *A general relativity workbook*. [S.l.]: University Science Books Mill Valley, 2013. 109