Physicae Organum, v. 8, n. 1, p. 369-393, Brasília, 2022.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

PHYSICÆ ORGANUM

Artigo Original

Artigos

Buracos Negros e suas Diferentes Faces

Black Holes and its many Sides

Lucca Lopes Dias Santos*[1], Vanessa Carvalho de Andrade†[2]

[1,2]Instituto de Física – Universidade de Brasília

Resumo

Considerando o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (teoria alternativa para a descrição da interação gravitacional) obtemos, por intermédio de uma revisão dos temas constantes na literatura da área, as equações de campo para alguns modelos de buracos negros em regime clássico. É feita, inicialmente, uma comparação entre a Relatividade de Einstein - a qual se utiliza de geometria diferencial para descrever o espaço-tempo - e seu equivalente teleparalelo - que, por sua vez, modela a gravitação como uma teoria de calibre (Gauge). Discorre-se, então, sobre as soluções de Schwarzschild e Kerr para as equações de campo (bem como suas interpretações físicas) e obtém-se os objetos matemáticos necessários para a construção de seu equivalente teleparalelo (como tetradas, conexões e o tensor de torsão, por exemplo). Infere-se como essas diferentes maneiras de formular a Relatividade são equivalentes entre si, matematicamente consistentes e trazem, cada uma, variadas interpretações para o funcionamento do espaço-tempo, realizando tanto quanto possível uma transposição didática dos conceitos abordados nas publicações estudadas. As diferentes faces dos buracos negros são expostas, nessa perspectiva, na medida em que é possível descrevê-los por intermédio de diferentes formalismos.

Palavras-chave: *Relatividade Geral. Buraco negro de Schwarzschild. Buraco negro de Kerr. Teorias alternativas. Teleparalelismo.*

Abstract

In the context of the Teleparallel Equivalent of General Relativity (an alternative theory able to describe gravity) we have obtained, through the review of subjects in the literature, the field equations for some black hole models in a classical perspective. We first compare Einstein's Relativity, wich uses differential geometry to describe the space-time, and its teleparallel equivalent, wich molds gravitation as a Gauge Theory. We then discuss the Schwarzschild and Kerr solutions for the field equations (and its physical interpretations) and obtain the mathematical tools required for building up its teleparallel equivalent (such as tetrads, connections and the torsion tensor). We conclude how these distinct ways of formulating Relativity are equivalent, mathematically consistent and provides, each one on its own way, different intepretations for the space-time behavior, while we make the didatic transposition of the subjects in the papers or books consulted.

*luccalopes37@gmail.com
†vcandrade@unb.br

The black holes many faces are then shown as it is possible to describe then through different formalisms.

Keywords: *General Relativity. Schwarzschild black holes. Kerr black holes. Alternative theories. Teleparallel gravity.*

I. Introdução

A teoria da Relatividade Geral (RG), tal como construída por Albert Einstein, descreve a interação gravitacional - uma das quatro interações fundamentais da natureza -, relacionando a massa e a energia dos corpos com a geometria do espaço-tempo. Schutz aponta, então, como Einstein modela a gravitação usando espaços curvos (de caráter Riemanniano); os efeitos gravitacionais passam a ser vistos como consequência da curvatura inerente à geometria adotada, enquanto a trajetória de partículas em queda livre se relaciona com geodésicas na superfície de uma variedade (SCHUTZ, 2009).

Esse formalismo consegue descrever corretamente uma série de fenômenos, obtendo ampla e sólida confirmação experimental ao longo dos anos (dentro de certos domínios de validade). Segundo Capozziello, porém, a Relatividade Geral de Einstein apresenta algumas deficiências, tais como a presença de singularidades, a ausência (até então) de uma teoria de gravitação quântica consistente e a necessidade de assumir, a nível galático e extra-galático, a existência de matéria escura e energia escura a fim de explicar os dados obtidos experimentalmente sobre a dinâmica cósmica (CAPOZZIELLO; LAMBIASE, 2014; CAI, 2016).

Além disso, há diferenças conceituais na forma como a RG e as demais interações fundamentais são construídas: enquanto a relatividade se edifica em interpretações geométricas ao descrever a gravitação, como dito anteriormente, as forças fraca, forte e o eletromagnetismo são formulados como teorias de Gauge (ou de Calibre) (ALDROVANDI; PEREIRA, 2016). Estas últimas também possuem caráter geométrico em sua elaboração, pois consideram certas estruturas, como fibrados e espaços internos, às quais é possível associar conexões e derivadas covariantes, mas não necessariamente atribuem, quando aplicadas à gravitação, os efeitos gravitacionais à mudança da geometria do espaço em si (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Uma tentativa de unificação passa a ser, então, inviabilizada devido aos alicerces teóricos de cada modelo. Assim, suscita-se o questionamento: não seria possível reconstruir a relatividade de forma a superar esses percalços?

É nesse contexto que surge o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral, uma teoria alternativa à RG que busca descrever a gravitação como uma teoria de Gauge. No teleparalelismo, não mais a curvatura é a causa dos efeitos gravitacionais e a lagrangiana teleparalela, diferentemente da lagrangiana de Einstein-Hilbert - a qual se constitui com o escalar de Ricci -, passa a adotar um escalar obtido com contrações do tensor de torsão como argumento (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). São estabelecidos novos objetos matemáticos (tais como as tetradas) responsáveis por permitir a elaboração do novo formalismo e da estrutura teórica necessária para sua sustentação (como novas conexões, o tensor de torsão e superpotenciais, por exemplo) (ANDRADE, 2000b).

Ressalta-se, também, como a busca por teorias alternativas à Relatividade constituem um campo bastante prolífico para a produção de novos modelos teóricos. Com uma base histórica cujo desenvolvimento encontra sua gênese em investigações realizadas pelo próprio Einstein, partindo de teorias como a de Einstein-Cartan e passando por desenvolvimentos de Hayashi décadas depois (como indicado por Aldrovandi e Pereira), muito vem sendo feito na área atualmente. Abrem-se possibilidades não somente para o estudo do teleparalelismo, mas também de extensões do mesmo, com as teorias $f(T)$, nas quais são consideradas funções não lineares da torsão na lagrangiana, ou teorias dos tipos $f(R)$, $f(R,T)$, tensor-escalar, dentre uma miríade de outras possibilidades (CAI, 2016; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2015).

Tais esforços em estabelecer uma nova teoria não descartam, no entanto, o quão bem sucedida a RG já se mostrou em diversos testes no regime clássico. Mostram-se como proeminentes exemplos a correção nos valores relativos ao avanço do periélio de Mercúrio (D'INVERNO, 1992) - no domínio de nosso sistema solar - e as recentes detecções de ondas gravitacionais pela iniciativa LIGO (ABBOTT, 2016). Todavia, essas evidências experimentais não excluem a possibilidade das extrapolações teóricas propostas pelas teorias alternativas. Isto é, a RG pode ser uma teoria com domínio de validade restrito às situações aplicadas atualmente, mas em situações nas quais vale a Mecânica Quântica, como no Big Bang e em buracos negros - onde atuam campos de extrema intensidade - uma teoria mais ampla pode ser necessária. Visa-se justamente superar aparentes limitações (como as já citadas) do ferramental teórico hoje existente.

Dessa forma, é possível descrever fenômenos - e modelos - com os quais a RG já vem há muito lidando sob a perspectiva do formalismo teleparalelo. Assim, dedicamo-nos a estudar as soluções para alguns modelos de buracos negros em regime clássico nesse contexto. Mais especificamente, são levadas em conta as soluções de Schwarzschild e de Kerr para as equações de campo de Einstein, as quais adotam simetrias e descrevem, respectivamente, buracos negros estáticos (singularidades sem informação dinâmica atreladas ao seu comportamento) e buracos negros em rotação (D'INVERNO, 1992). Encontramos as equações de campo teleparalelas e construímos os objetos matemáticos necessários para tal, verificando a equivalência entre a RG e o teleparalelismo.

II. Relatividade Geral e seu Equivalente Teleparalelo

Considerando os resultados já obtidos pela RG, é possível desenvolver um formalismo alternativo capaz de recuperá-los. Tal desenvolvimento - no escopo deste artigo - parte do conceito de transformação de Gauge; é necessário, porém, levar em conta as noções básicas da relatividade de Einstein as quais visamos reproduzir.

II.1. Conceitos fundamentais da Relatividade Geral

Na Relatividade Geral, o espaço-tempo é modelado como uma variedade diferenciável 4-dimensional. As trajetórias de partículas (isto é, suas linhas de mundo) movendo-se no espaço passam, então, a ser identificadas com geodésicas. Nessa descrição, é de grande importância o estabelecimento de uma métrica - o objeto matemático responsável por estabelecer distâncias no espaço - a qual se concretiza sob a forma do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ com a relação

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1}$$

ds^2, então, é o chamado "elemento de linha", intimamente ligado com as distâncias estabelecidas no espaço tempo, e $\mu = 0,1,2,3$ são índices tensoriais[1].

Dessa forma, $g_{\mu\nu}$ passa a ser o objeto fundamental para descrever a gravidade (CAI, 2016), e os demais objetos matemáticos do formalismo de Einstein podem ser escritos em função do tensor métrico[2]. Destacam-se, dentre eles, as conexões de Levi-Civita e o tensor de curvatura (ou de Riemann): as conexões surgem como consequência do caráter "curvo"que o espaço-tempo assume, podendo ser encaradas como uma forma de manter as transformações (operações de derivação) sofridas pelos demais objetos matemáticos covariantes (de forma que continue valendo a linearidade e a regra de Leibniz em sua aplicação) - daí o estabelecimento da "derivada covariante"; o tensor de curvatura, por sua vez, é o responsável por descrever a deformação espaço-temporal. Contraindo sucessivamente o tensor de Riemann com a métrica, obtém-se também o tensor de Ricci e o escalar de Ricci de maneira que, com o auxílio dos objetos citados, conseguimos escrever o chamado "tensor de Einstein", expressão relacionada com as equações de campo da RG[3].

A conexão de Levi-Civita, o tensor de curvatura, o tensor e o escalar de Ricci, bem como o tensor de Einstein, são respectivamente dados por (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; D'INVERNO, 1992):

$$\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{2}$$

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\eta\mu}\mathring{\Gamma}^{\eta}{}_{\lambda\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\eta\nu}\mathring{\Gamma}^{\eta}{}_{\lambda\mu} \tag{3}$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \tag{4}$$

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu}\mathring{R}_{\mu\nu} \tag{5}$$

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}, \tag{6}$$

em que grandezas sobrescritas por '$\circ$' referem-se à RG.

Assim, é possível obter a formulação geral das equações de campo de Einstein, as quais assumem a seguinte forma quando escritas com índices contravariantes:

$$\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu}. \tag{7}$$

Por se tratar de equações de movimento, da mesma forma que na Mecânica Clássica (ver (GOLDSTEIN, 2001)), essas equações podem ser obtidas a partir de uma lagrangiana. A lagrangiana em questão será $L = \mathring{L} + L_s$; o termo L_s é a lagrangiana referente à matéria

[1]Os diferentes tipos de índice, bem como suas relações, serão melhor explicitados mais adiante.

[2]Também é comum se referir ao tensor métrico como simplesmente "métrica".

[3]Para uma discussão mais detalhada a respeito da construção das conexões e do tensor de curvatura, ver (D'INVERNO, 1992), (CARROLL, 2004) e (LANDAU; LIFSHITZ, 1980).

(fonte) geradora do campo, incumbida de englobar quaisquer outros campos provenientes de demais interações, enquanto $\Theta^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, também relacionado à fonte do campo. $\mathring{L}$ denomina-se lagrangiana de Einstein-Hilbert, expressa por

$$\mathring{L} = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\mathring{R}. \tag{8}$$

II.2. O Teleparalelismo como uma teoria de Gauge para o grupo das translações

A fim de melhor compreender os aspectos teóricos da estrutura apresentada pelo formalismo teleparalelo, são necessárias noções a respeito de transformações de Gauge e de teorias de Gauge. Conhecer certos aspectos da teoria de grupos também se faz necessário.

II.2.1 Transformações de Gauge e Teorias de Gauge

Trasformações de Gauge, de acordo com (RUBAKOV, 2002) e (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011), são transformações de campo cujos parâmetros dependem dos pontos x^μ do espaço-tempo de forma arbitrária, em contraste com as transformações globais, cujos parâmetros são constantes e não dependem, portanto, dos pontos em que são avaliadas. Transformações de Gauge correspondem, assim, a transformações que levam de uma dada configuração de campos a uma outra configuração de campos.

Já uma teoria de Gauge (ou teoria de Calibre), levando ainda em conta a bibliografia citada, é uma teoria que apresenta invariância sob transformações de Gauge. Isto é, tanto os observáveis quanto as equações de campo são invariantes sob a aplicação de transformações de calibre. Fisicamente, a invariância sob transformações de Gauge está ligada à característica de que diferentes configurações dos campos (estes não observáveis) resultam nos mesmos observáveis físicos.

Como exemplo de teoria de Calibre pode ser citado o eletromagnetismo, frequentemente apresentado como a forma mais simples de uma teoria com essas características. Os campos elétrico e magnético, bem como os potenciais da teoria eletromagnética, obedecem às definições expostas anteriormente (RUBAKOV, 2002), além de possuírem demais semelhanças com teorias como o Teleparalelismo (este também uma teoria de calibre) que serão abordadas mais adiante.

II.2.2 Grupos e seus Geradores

Conforme abordado em (SCHWICHTENBERG, 2018), um grupo $(G, \circ)$ é um conjunto G, munido de uma dada operação $\circ$, que obedece a certos axiomas. Estes são: (1) a operação $\circ$ é "fechada"em G, então $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \circ g_2 \in G$; (2) existe um elemento identidade $e \in G$ tal que, se $g \in G$, então $g \circ e = e \circ g = g$; (3) para cada elemento $g \in G$ existe um elemento g^{-1} de forma que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$; (4) vale a associatividade entre os elementos do grupo com respeito à operação $\circ$.

Levando em conta essas definições, a fim de exprimir o significado e o funcionamento de um "gerador", seguiremos prosseguimento análogo ao desenvolvido em (SHANKAR, 1994).

Considerando um dado grupo G, uma transformação T pertencente à G e que seja próxima da identidade $\mathbf{I}$ pode ser escrita na forma

$$T(\varepsilon) = \mathbf{I} + \varepsilon J. \tag{9}$$

ε é algum parâmetro infinitesimal, enquanto J é o gerador. Podemos dizer que $T(\varepsilon)$ é uma transformação infinitesimal pois a transformação através dele obtida recai na ação do parâmetro ε, reforçando o aspecto de que se trata de uma transformação próxima à transformação identidade.

Aplicando $T(\varepsilon)$ sucessivas vezes, obtém-se uma transformação finita $g(\varepsilon)$, da forma

$$g(\varepsilon) = (\mathbf{I} + \varepsilon J)^k,$$

com k o número de aplicações da transformação $T(\varepsilon)$ feitas.

Considerando algum $N \in \mathbb{R}, N >> 1$, podemos escrever $T(\varepsilon)$, de forma alternativa, como uma expressão $T(\theta)$, dada por $T(\theta) = \mathbf{I} + \frac{\theta}{N}J$; são transformações infinitesimais aquelas para as quais $N \to \infty$, caso em que o termo θ/N comporta-se como um parâmetro infinitesimal (análogo a ε). θ é um novo parâmetro em função do qual serão escritas as transformações finitas provenientes de sucessivas aplicações das transformações infinitesimais.

Considerando portanto N aplicações e tomando o limite de $N \to \infty$, obtemos as seguintes igualdades:

$$g(\theta) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbf{I} + \frac{\theta}{N}J\right)^N = e^{\theta J}. \tag{10}$$

Daí o nome "gerador": J "gera"as transformações finitas na medida em que, quando colocado na exponencial juntamente com o parâmetro θ, recupera como resultado uma dada transformação.

No escopo do Teleparalelismo, é de grande importância o gerador do grupo das translações, o qual é dado por $J \equiv P_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$. Podemos verificar essa equivalência da seguinte maneira: consideremos uma transformação de translação $g(\alpha)$ cuja ação em $\psi(x,t)$, na coordenada particular $x^a \equiv x$, fornece $g(\alpha)\psi(x,t) = \psi(x+\alpha,t)$. Isto é, a aplicação da transformação desloca a função por um parâmetro espacial α. Como $g(\alpha) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}$, usando expansão em série de potência temos

$$e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,t) = \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ...\right)\psi(x,t). \tag{11}$$

Realizando expansão em série de potências de $\psi(x+\alpha,t)$, vemos que

$$\begin{aligned}\psi(x+\alpha) &= \psi(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\alpha^2}{2} + ...\\ &= \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ...\right)\psi(x,t).\end{aligned} \tag{12}$$

Como a equação (11) coincide com a equação (12), vemos que de fato $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,t) =$

$\psi(x+\alpha)$ e que, consequentemente, o gerador para o grupo das translações é P_a.

II.2.3 O Teleparalelismo Relativístico

De acordo com (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012), o Teleparalelismo, por sua vez, considera o espaço-tempo (chamado espaço externo) - neste caso, um espaço de caráter riemanniano - como a base de um fibrado em cujos pontos são fixados espaços tangentes (chamados espaços internos), que correspondem às fibras da configuração. A relação entre esses espaços é feita por intermédio de tetradas ${h_a}^{\mu}, {h^a}_{\mu}$, atuando sobre a métrica de Minkowski η_{ab}:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} {h^a}_{\mu} {h^b}_{\nu}. \tag{13}$$

Tais tetradas são a princípio sistemas de coordenadas (campos vetoriais) inerentes à partícula que percorre dada trajetória no espaço-tempo. Assim, como possuem tanto índices da forma $\{a,b,c,... = 0,1,2,3\}$ (índices internos) e da forma $\{\mu,\nu,\rho = 0,1,2,3\}$ (índices externos), é possível contraí-las com uma dada métrica e obter a métrica correspondente no outro espaço (seja ele o espaço interno ou o espaço externo, bastando considerar a relação inversa da equação (13) e que ${h^a}_{\mu} {h_a}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$, ${h^a}_{\mu} {h_b}^{\mu} = \delta^{a}_{b}$). Ou seja, da mesma forma que é possível manipular índices tensoriais internos utilizando a métrica η_{ab}, também é possível fazê-lo com índices tensoriais externos usando $g_{\mu\nu}$.

Desse modo, com o campo de tetradas definido, o Teleparalelismo corresponde a uma teoria de Gauge para o grupo das translações (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Isto é, na gravitação teleparalela uma transformação de Gauge corresponde a uma translação na fibra (espaço tangente ao ponto x^{μ} da base) em que é feita a adição de um parâmetro $\varepsilon \equiv \varepsilon(x^{\mu})$, expressa por

$$x'^a = x^a + \varepsilon^a, \tag{14}$$

enquanto os geradores das translações infinitesimais serão

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \partial_a. \tag{15}$$

Devido ao caráter das transformações de calibre, uma transformação infinitesimal pode então ser escrita como

$$\delta x^a = \varepsilon^b P_b x^a; \tag{16}$$

se considerarmos, porém, ao invés de uma variação infinitesimal nas coordenadas, uma transformação de alguma fonte $\psi(x^a(x^{\mu}))$ geradora do campo, notamos que sua derivada ordinária não é covariante (pois ε não é constante):

$$\delta(\partial_{\mu}\psi) = \varepsilon^a \partial_a(\partial_{\mu}\psi) + (\partial_{\mu}\varepsilon^a)\partial_a \psi. \tag{17}$$

Assim, para recuperar a covariância, introduz-se o potencial de Gauge $A_{\mu} = {A^a}_{\mu} P_a$, o qual faz parte da álgebra de Lie do grupo das translações. Desse modo, defini-se a derivada covariante abaixo, a qual é covariante sobre transformações infinitesimais e é da forma

$$h_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^a{}_\mu \partial_a \psi. \tag{18}$$

Reescrevendo a equação (18) como $h_\mu \psi = h^a{}_\mu \partial_a \psi$, encontramos a expressão do campo das tetradas,

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu. \tag{19}$$

Além disso, tratando-se de uma transformação de Gauge, o formalismo exposto até então apresenta a propriedade de que o tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ pode ser obtido com o comutador da derivada covariante h_μ (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Logo, da equação (18), temos que

$$[h_\mu, h_\nu] = F^a{}_{\mu\nu} P_a \tag{20}$$

e $F^a{}_{\mu\nu}$ é, portanto, o tensor intensidade de campo para o campo de Gauge gerado; ao expandir essa operação, por inspeção, esse termo pode então ser reconhecido como a expressão geral para a torção, $\dot{T}^a{}_{\mu\nu}$, conforme indicado por Andrade e Pereira (ANDRADE; PEREIRA, 1997a). Ou seja, há uma correspondência entre o tensor intensidade de campo e a torção, uma grandeza relativa à geometria do espaço-tempo. Assim, de acordo com Andrade e Pereira, a torção é identificada como:

$$\dot{T}^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \dot{T}^a{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu \equiv \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} \neq 0. \tag{21}$$

Grandezas sobrescritas por '•' referem-se a grandezas em diferentes formalismos - não necessariamente no escopo e sob as definições da RG -, sendo usadas para indicar os objetos da Gravitação Teleparalela ou, até mesmo, em formalismos mais gerais. $\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu}$, por exemplo, é a chamada conexão de Weitzenböck, e pode ser expressa por

$$\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{22}$$

Trata-se da conexão teleparalela a qual pode, num contexto mais amplo, ser identificada como um caso particular da conexão de Cartan, que assume forma semelhante (ANDRADE; PEREIRA, 1997b).

Neste ponto, é interessante notar outro paralelo que pode ser traçado entre a teoria eletromagnética e o teleparalelismo, na medida em que ambas são teorias de Gauge. No eletromagnetismo também surge um tensor intensidade de campo e, assim como na equação (20), ele depende de potenciais A_μ (uma vez que $h^a{}_\mu$ depende desses potenciais, como mostra a equação (19)), podendo ser expresso na forma (RUBAKOV, 2002; GRIFFITHS, 2013)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{23}$$

Vemos, porém, que tanto a intensidade de campo quanto o potencial eletromagnéticos não possuem índice interno. Ou seja, em comparação com o equivalente teleparalelo, o eletromagnetismo coloca-se como um caso mais restrito de uma teoria de Gauge. Evidencia-se, assim, uma semelhança estrutural entre o teleparalelismo e a teoria eletromagnética.

Salientamos somente que a equação (23) diz respeito ao eletromagnetismo, a despeito da convenção usada para os potenciais.

Como a conexão de Weitzenböck, por sua vez, não é simétrica em seu último par de índices, a equação (21) indica uma torção não nula, diferentemente da RG, em que $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ (equação (2)) é simétrica no último par de índices e resulta numa torção identicamente nula,

$$\overset{\circ}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} = 0. \tag{24}$$

Vale ressaltar, também, que as equações (19), (21) e (22) assumem as formas mostradas devido ao referencial adotado - o referencial inercial das tetradas. Em casos mais gerais, surgem nessas expressões a conexão de spin, identificada por $\dot{A}^{a}{}_{b\mu}$ e que representa os efeitos de uma transformação de referenciais. Para a conexão de Cartan (ver a equação (22)) na base tetrada (nosso sistema de referencial), porém, ela é nula. Ou seja, $\dot{A}^{a}{}_{b\mu} = 0$.

À vista disso, grandezas dependentes somente da conexão de spin também serão nulas (uma vez que esta o é devido ao referencial adotado). É esse o caso da curvatura, cuja expressão se dá em termos da conexão de Lorentz/spin. Considerando, então, que a curvatura pode ser escrita em função, unicamente, da conexão $\dot{A}^{a}{}_{b\mu}$ e de suas derivadas por meio de uma função da forma

$$\dot{R}^{a}{}_{b\mu\nu} = f(\dot{A}^{a}{}_{b\mu}, \partial_{\nu}\dot{A}^{a}{}_{b\mu}), \tag{25}$$

aferimos que, no Teleparalelismo, a curvatura é nula. Ou seja, enquanto a RG é uma teoria na qual há curvatura e a torção é identicamente nula, no formalismo teleparalelo ocorre o contrário: a gravitação é representada pela torção, e a curvatura é igual a zero.

Isto posto, é possível relacionar a conexão de Weitzenböck com a conexão de Levi-Civita por intermédio da relação

$$\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}, \tag{26}$$

em que $\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu}$ é o tensor de contorção, dado por

$$\dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{T}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \dot{T}_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - \dot{T}^{\rho}{}_{\mu\nu}). \tag{27}$$

II.3. A lagrangiana teleparalela e suas equações de campo

De acordo com (ANDRADE; PEREIRA, 1997a), a lagrangiana para campos de Gauge para o grupo das translações (caso do Teleparalelismo), assume a forma

$$\dot{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\dot{T}^{a}{}_{\mu\nu}\dot{T}^{b}{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}N_{ab}{}^{\nu\rho}\right], \tag{28}$$

em que $\dot{T}^{a}{}_{\mu\nu}$ é a intensidade do campo e, como identificamos anteriormente, no caso da gravidade teleparalela, coincide com a torção. Além disso, $N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab}h_{c}{}^{\nu}h^{c\rho}$. Como temos a presença de tetradas, os índicies internos (algébricos) e externos (de espaço tempo) podem ser transformados um no outro. É necessário, dessarte, incluir todas permutações cíclicas possíveis dos índices a, b e c na equação de $N_{ab}{}^{\nu\rho}$. Realizando tais permutações e substituindo na equação (28), obtemos (ANDRADE; PEREIRA, 1997a)

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{L} &= \frac{hc^4}{16\pi G}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}\left[\frac{1}{4}h_c{}^{\nu}h^{c\rho}\eta_{ab}+\frac{1}{2}h_a{}^{\rho}h_b{}^{\nu}-h_a{}^{\nu}h_b{}^{\rho}\right]\\ &= \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho}-\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right].\end{aligned} \tag{29}$$

Essa é a lagrangiana teleparalela; ou seja, as equações de campo de partículas, no referencial inercial das tetradas, sob o formalismo teleparalelo, podem ser obtidas a partir da equação (29).

Usando as definições da curvatura com a conexão de Weitzenböck (a qual é nula) e a equação (26), é possível encontrar a relação entre $\overset{\bullet}{L}$ e a lagrangiana de Einstein-Hilbert:

$$\overset{\bullet}{L} = \overset{\circ}{L} - \partial_\mu\left(\frac{c^4 h}{8\pi G}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right). \tag{30}$$

Isto é, a despeito de um termo de divergência, a lagrangiana teleparalela é equivalente à lagrangiana da RG (Einstein-Hilbert).

Considerando, então, uma lagrangiana da forma $L = \overset{\bullet}{L} + L_s$, e usando leis de conservação (teoria de Noether), escrevemos o equivalente teleparalelo das equações de campo na equação (7) (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012):

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - kh\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho} = kh\Theta_a{}^{\rho}, \tag{31}$$

em que $k = 8\pi G/c^4$, $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$ é chamado superpotencial e $\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}$ é a corrente de Gauge, dados respectivamente por

$$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = \overset{\bullet}{K}{}^{\rho\sigma}{}_{a} - h_a{}^{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\rho}{}_{\theta} + h_a{}^{\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\sigma}{}_{\theta}, \tag{32}$$

$$\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho} = \frac{1}{k}h_a{}^{\mu}\overset{\bullet}{S}_c{}^{\nu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\nu\mu} - \frac{h_a{}^{\mu}}{h}\overset{\bullet}{L}. \tag{33}$$

Usando a identidade na equação (26) é possível, também, relacionar a equação de campo em (31) com grandezas da RG, ao mostrar como o membro esquerdo da equação teleparalela obedece à relação

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - k(h\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}) = h(\overset{\circ}{R}_a{}^{\rho} - 1/2h_a{}^{\rho}\overset{\circ}{R}). \tag{34}$$

III. Algumas Soluções para Buracos Negros em Regime Clássico

Devido à não linearidade das equações de campo deduzidas por Einstein (equação (7)), encontrar soluções exatas que as satisfaçam torna-se um trabalho bastante difícil (D'INVERNO, 1992). Um caminho para encontrar soluções de forma analítica (não numérica) passa a ser, portanto, adotar simetrias inerentes aos problemas considerados. É nesse contexto que se encontram os modelos de Schwarzschild e de Kerr para buracos negros na perspectiva clássica, que são soluções para as equações (7) e se edificam sobre a suposição de simetrias a respeito da constituição da métrica.

III.1. A Solução de Schwarzschild

A solução de Shwarzschild para as equações de campo de Einstein descreve, do ponto de vista de uma interpretação física, um buraco negro estático; isto é, uma singularidade sem qualquer variável dinâmica atrelada ao seu comportamento. Tal solução surge, conforme dito anteriormente, como fruto da adoção de simetrias a respeito da métrica considerada - neste caso, a simetria mais simples possível, a esférica.

Assim, foi sob as condições de uma simetria esférica e de uma métrica estacionária e estática que, pouco tempo após a publicação dos trabalhos que traziam as equações de campo de Einstein, Schwarzschild conseguiu deduzir sua solução (SCHWARZSCHILD, 1916)[4].

Seguindo, então, o procedimento exposto em (D'INVERNO, 1992) para a dedução dessa solução, podemos considerar, antes de assumir as particularidades impostas à solução de Schwarzschild, uma solução geral em coordenadas esféricas,

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi). \tag{35}$$

Como queremos uma solução de caráter esférico, assumimos que transformações nas coordenadas θ e ϕ, do tipo $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to -\phi$, deixam a métrica invariante. Não aparecerão, portanto, termos cruzados $d\theta d\phi$ no elemento de linha, que será dado por

$$\begin{aligned} ds^2 = & A(t,r)dt^2 - 2B(t,r)dtdr - C(t,r)dr^2 + \\ & - D(t,r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \end{aligned} \tag{36}$$

na qual A, B, C e D são funções de r e t; não dependem de θ e ϕ pois, como discutido, há invariância ao longo dessas coordenadas (e dependem de t pois aqui tratamos do caso geral, sem levar em consideração, ainda, o caráter estático que a solução deverá ter).

Já os termos com dr^2 e $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ são oriundos do elemento de linha de uma superfície esférica bidimensional, quando consideradas somente as componentes espaciais. Ou seja, de fato a equação (36) descreve uma simetria esférica na medida em que leva em conta todos os termos possíveis, tanto temporais quanto espaciais, que poderiam aparecer na expressão de acordo com os limites impostos pela hipótese de simetria esférica.

Realizando mudanças de coordenadas convenientes e reescrevendo os coeficientes de cada termo diferencial[5], é possível reduzir o elemento de linha à forma

$$ds^2 = e^p dt^2 - e^q dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{37}$$

[4] A tradução para o Inglês do artigo original, publicado em Alemão, pode ser encontrada em (SCHWARZSCHILD, 1999).

[5] A realização dessas operações, passo a passo, podem ser conferidas em (D'INVERNO, 1992).

em que $p = p(t,r)$ e $q = q(t,r)$[6].

Para determinar os valores dos coeficientes p e q usamos as equações de campo de Einstein (no vácuo) - ponto a partir do qual as considerações específicas do modelo de Schwarzschild passam a ser levados em conta. Assim, por inspeção percebemos que ao elemento de linha na equação (37) se associa à métrica covariante

$$g_{\mu\nu} = diag(e^p, -e^q, -r^2, -r^2 \sin^2\theta). \tag{38}$$

De posse da métrica acima, podemos então usar a equação (6), juntamente com as definições de conexão, tensor de curvatura e escalar de Ricci, para calcular o tensor de Einstein. Ao fazê-lo, nota-se que suas componentes não nulas ${G_0}^0$, ${G_0}^1$, ${G_1}^1$ e ${G_2}^2$ levam a três equações independentes,

$$\begin{aligned} e^{-p}\left(\frac{p'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} &= 0; \\ e^{-p}\left(\frac{q'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} &= 0; \\ \dot{\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Nessa última expressão, pontos representam a derivação em relação ao tempo, enquanto linhas representam derivadas sobre o raio.

Resolvendo essas equações, encontramos os valores de e^p e e^q e, consequentemente, chegamos à Solução de Schwarzschild nas coordenadas (t,r,θ,ϕ)[7], resultando em

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \tag{40}$$

aqui, $m = GM$ (ou $m = GMc^{-2}$, em unidades não relativísticas) é a chamada massa geométrica.

Ou seja, deixamos de ter a forma mais geral possível para um elemento de linha com simetria esférica, como na equação (37), e obtivemos a solução esférica mais geral possível para as equações de campo de Einstein. Isso é verdade pois determinamos os valores das variáveis p e q por intermédio do tensor de Einstein (o qual está intimamente ligado com as equações de campo no vácuo, uma vez que $G_{\mu\nu} = 0$ é um caso particular da equação (7)).

Nota-se a existência de uma indeterminação em

$$r = 2m. \tag{41}$$

Trata-se da única singularidade intrínseca - não removível com mudanças de coordenadas - da solução na equação (40) de forma que $r = 2m$ é chamado 'Raio de Schwarzschild'. É o ponto no qual o caráter das componentes g_{00} e g_{11} se invertem, passando de tipo-tempo

[6]Por convenção, a notação das coordenadas utilizadas foi mantida: não escrevemos t', r', ... após as mudanças de coordenadas.

[7]Mais uma vez, a notação das variáveis foi mantida a mesma, por convenção, a despeito de quaisquer redefinições das coordenadas.

para tipo-espaço, e vice-versa. Por esse motivo os cones de luz curvam-se, no diagrama espaço-temporal, para o interior da singularidade, não havendo mais 'futuro' possível para a partícula que ultrapasse esse ponto além daquele voltado para a singularidade. É a superfície onde há o ponto de 'não-retorno' da partícula.

Uma forma alternativa de escrever a solução de Schwarzschild é tentar aproximá-la, tanto quanto possível, de um espaço euclidiano tridimensional. Para isso, usamos coordenadas $X^{\mu'}$ de caráter esférico, estático e isotrópico. Com esse objetivo escrevemos (D'INVERNO, 1992) (PEREIRA, 2001)

$$\begin{gathered} ds^2 \equiv g_{\mu'\nu'} dX^{\mu'} dX^{\nu'} = C(\rho)dt^2 - D(\rho)(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2); \\ d\Omega = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2, \end{gathered} \tag{42}$$

que é a "solução de Schwarzschild em coordenadas isotrópicas". ρ é a variável ligada à coordenada radial de $X^{\mu'}$; $C(\rho)$ e $D(\rho)$ são os coeficientes que acompanham os diferenciais e possibilitam uma aproximação, em forma, da expressão do elemento de linha com um espaço euclidiano. Essa aproximação se evidencia ao escrever os termos que acompanham $D(\rho)$ nas coordenadas $X^{\mu'}$, caso em que obtemos a expressão $ds^2 = C(\rho)dt^2 - D(\rho)[(dX^{1'})^2 + (dX^{2'})^2 + (dX^{3'})^2]$.

Nas coordenadas de caráter esférico $X^{\mu'}$ as componentes espaciais são tais que

$$\begin{gathered} X^{1'} = \rho \sin\theta \cos\phi; \\ X^{2'} = \rho \sin\theta \sin\phi; \\ X^{3'} = \rho \cos\theta. \end{gathered} \tag{43}$$

No entanto, as coordenadas em (35), frequentemente chamadas de "coordenadas de Schwarzschild", também possuem uma singularidade em $r = 2m$. Para um observador externo, uma partícula caindo em direção ao buraco negro parece levar uma quantidade infinita de tempo para atingir a superfície delimitada pela raio de Schwarzschild. Suas linhas de mundo radiais, isto é, a trajetória que a partícula descreve, possuem comportamento assintótico.

Mas esse evento não é percebido no referencial da partícula, o qual leva em conta o tempo próprio e não a coordenada t de um observador externo. Ou seja, no referencial da partícula, ela consegue atingir $r = 2m$ e $r = 0$ em um tempo finito. Assim, é possível realizar uma mudança na coordenada temporal para corrigir esse comportamento, que é fruto de uma limitação das coordenadas adotadas, e não um reflexo concreto do real comportamento físico do evento.

Fazendo $t \to \bar{t}$ (ver (D'INVERNO, 1992)), conseguimos contornar a singularidade e estender a solução de $2m < r < \infty$ para $0 < r < 2m$. Reescrevendo o elemento de linha na equação (40) com essa nova coordenada, encontramos a chamada "Forma de Eddington Finkelstein"da solução de Schwarzschild. Contudo, se usarmos $v = \bar{t} + r$ (chamado parâmetro temporal avançado) no lugar de simplesmente $\bar{t}$, é possível escrever o elemento de linha resultante de maneira mais simples.

Obtemos, assim, a solução de Schwarzschild em "coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein", $(v = \bar{t} + r, r, \theta, \phi)$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{44}$$

III.2. Buracos Negros em Rotação e a Solução de Kerr

A solução de Kerr, por sua vez, agrega caráter dinâmico ao comportamento da fonte do campo por ela descrito. Sob a perspectiva da interpretação física, refere-se a um buraco negro com rotação constante - modelo que só foi possível após a elaboração da solução, por Kerr, quase cinco décadas após a dedução da Solução de Schwarzschild (KERR, 1963).

É possível deduzir tal equação utilizando o método de Newman Janis - também chamado de algoritmo de Newman Janis -, o qual usa complexificação de coordenadas a fim de chegar até a solução encontrada por Kerr (D'INVERNO, 1992; NEWMAN; JANIS, 1965; DRAKE; SZEKERES, 1998).

Dessa forma notamos, então, que é possível recuperar os coeficientes não nulos da métrica da equação (44) na forma

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu \tag{45}$$

se usarmos as tetradas (D'INVERNO, 1992; CANONICO, 2012)

$$\begin{aligned}
l^\mu &= (0,1,0,0) = \delta^\mu_1 \;; \\
n^\mu &= (-1,-1/2(1-2m/r),0,0) = -\delta^\mu_0 - 1/2(1-2m/r)\delta^\mu_1 \;; \\
m^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right) \;; \\
\bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0,0,1,\frac{-i}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right) \,,
\end{aligned} \tag{46}$$

com $\bar{m}^\mu$ o complexo conjugado de m^μ. Se permitirmos que r assuma valores complexos (artifício que faz parte do método de Newman-Janis) as tetradas acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
l^\mu &= \delta^\mu_1 \;; \\
n^\mu &= -\delta^\mu_0 - 1/2\left[1 - m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right)\right]\delta^\mu_1 \;; \\
m^\mu &= \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}\left(\delta^\mu_2 + \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right) \;; \\
\bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(\delta^\mu_2 - \frac{i}{\sin\theta}\delta^\mu_3\right) \,.
\end{aligned} \tag{47}$$

Ao fazer, então, as mudanças de coordenadas $v \to v' = v + ia\cos\theta$, $r \to r' = r + ia\cos\theta$, $\theta \to \theta'$ e $\phi \to \phi'$, são obtidas componentes l'^μ, n'^μ, m'^μ e $\bar{m}'^\mu$ que correspondem à solução de Kerr quando aplicadas numa relação na forma da equação (45) (quando fazemos $g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu$). Com isso, obtemos a solução de Kerr em coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dv^2 - 2dvdr + \frac{2mr}{\rho^2}(2a\sin^2\theta)dvd\bar{\phi} + 2a\sin^2\theta drd\bar{\phi} - \rho^2 d\theta^2 + \\ - \left((r^2+a^2)\sin^2\theta + \frac{2mr}{\rho^2}(a^2\sin^4\theta)\right)d\bar{\phi}^2; \tag{48}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{49}$$

Reitera-se que, mais uma vez, foi mantida a notação $(v,r,\theta,\bar{\phi})$ por convenção e que $\bar{\phi} = -\phi' = -\phi$. Além disso, aparece o parâmetro temporal v pois, na dedução do elemento de linha na equação (48), partimos da solução de Schwarzschild em coordenadas de Eddington-Finkelstein (equação (44)).

Para recuperar, então, as coordenadas esféricas, é necessária uma mudança de coordenadas da forma $(v,r,\theta,\bar{\phi}) \to (t,r,\theta,\phi)$. Para isso, são feitas as transformações

$$\begin{aligned} dv = d\bar{t} + dr = dt + \frac{2mr+\Delta}{\Delta}dr; \\ d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta}dr; \\ \Delta = r^2 - 2mr + a^2. \end{aligned} \tag{50}$$

Obtemos, então, a chamada solução de Kerr na forma de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta\, d\phi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\phi - adt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2. \tag{51}$$

O coeficiente a, introduzido durante a utilização do método de Newman-Janis e até então uma constante qualquer, está relacionado com a velocidade angular da fonte - ou seja, do buraco negro em rotação. Mais especificamente, a pode ser identificado como o momento angular por unidade de massa (CARROLL, 2004; MISNER, 1973). Até o ponto em que consideramos o conjunto de tetradas na equação (47), tratávamos de transformações ainda relativas à solução de Schwarzschild. Já a partir da equação (48), passamos a nos referir a um corpo que gira, uma vez que foi introduzido a. Nota-se como o caso de Schwarzschild é recuperado quando $a = 0$, indicativo de uma rotação nula (se a fonte não gira, volta a valer a solução de Schwarzschild).

Além disso, a equação (51) é estacionária e axialmente simétrica. A única singularidade intrínseca do modelo, que ocorre quando $\rho = 0$, implica em uma uma singularidade em formato de anel com raio a no plano equatorial $z = 0$ - uma consequência matemática de ρ ser nulo - e m continua a ser identificado como a massa geométrica, assim como o era na equação de Schwarzschild da qual partimos (D'INVERNO, 1992).

IV. Dinâmica dos Buracos Negros no Contexto Teleparalelo

Com o ferrametal desenvolvido até aqui - o formalismo teleparalelo - podemos, então, tentar achar o equivalente alternativo às equações de campo para os buracos negros de

Schwarzschild e de Kerr. Para tal é necessário, primeiramente, encontrar a forma que assumem as tetradas em cada modelo. Com elas será possível calcular as conexões e, consequentemente, as componentes não nulas da torção. Assim, teremos os ingredientes necessários para construir as equações de campo.

IV.1. Modelo de Schwarzschild

No caso de Schwarzschild, considera-se inicialmente a forma isotrópica da solução (equação (42)), em que aparecem os coeficientes $C(\rho)$ e $D(\rho)$. Segundo Hayashi, em um sistema estático isotrópico como o $X^{\mu'}$ adotado, podemos assumir, sem perda de generalidade, que as tetradas são diagonais (HAYASHI; SHIRAFUJI, 1979). Assim, levando em conta as equações (42) e (13), inferimos que as tetradas serão dadas por

$$h^a{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \sqrt{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{D} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

É possível ver como a tetrada acima obedece às condições necessárias ao notar que, usando a forma matricial, se contrairmos $h^a{}_{\mu'}$ por ela mesma e pela matriz da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, recuperamos a métrica $g_{\mu'\nu'}$ do elemento de linha de Schwarzschild - procedimento descrito pela equação (13). Já a forma diagonal é permitida pois não há perda de generalidade em adotá-la, como apontado por Hayashi. A matriz inversa $h_a{}^{\mu'}$ pode ser obtida invertendo cada um dos elementos de $h^a{}_{\mu'}$, por se tratar de uma matriz diagonal.

Além disso, nas coordenadas de Schwarzschild (indicadas na equação (35)), vemos que o elemento de linha na equação (40) é da forma

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \tag{53}$$

enquanto g_{00} e g_{11} são componentes da métrica de Schwarzschild, a qual pode ser obtida diretamente a partir do elemento de linha na equação (40).

Assim, comparando termo a termo os elementos de linha da solução de Schwarzschild em coordenadas esféricas (equação (53)) e em coordenadas isotrópicas (equação (42)), encontramos a correspondência entre as componentes das coordenadas $X^{\mu'}$ e as coordenadas esféricas (PEREIRA, 2001),

$$C(\rho)dt^2 = g_{00}dt^2 \Rightarrow C(\rho) = g_{00}; \tag{54}$$

$$-D(\rho)\rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \rho\sqrt{D(\rho)} = r; \tag{55}$$

$$-D(\rho)d\rho^2 = g_{11}dr^2 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{dr} = \sqrt{\frac{-g_{11}}{D(\rho)}}. \tag{56}$$

Como $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ e $X^{\mu'} = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (t, \rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta)$ é possível, dessarte, usar a transformação geral de coordenadas

$$h^a{}_\mu = \frac{\partial X^{\nu'}}{\partial x^\mu} h^a{}_{\nu'} \tag{57}$$

para encontrar a tetrada $h^a{}_\mu$ no sistema de coordenados esférico. Ou seja, estamos levando a tetrada $h^a{}_{\nu'}$, escrita em termos das coordenadas isotrópicas $X^{\nu'}$, até a tetrada $h^a{}_\mu$, escrita em termos das coordenadas esféricas x^μ. A operação de mudança de coordenadas é feita termo a termo. Por exemplo, para $a = 1$ e $\mu = 3$, temos

$$\begin{aligned} h^1{}_3 &= \frac{\partial X^{0'}}{\partial \phi} h^1{}_{0'} + \frac{\partial X^{1'}}{\partial \phi} h^1{}_{1'} + \frac{\partial X^{2'}}{\partial \phi} h^1{}_{2'} + \frac{\partial X^{3'}}{\partial \phi} h^1{}_{3'} \\ &= \frac{\partial(\rho \sin\theta \cos\phi)}{\partial \phi} h^1{}_{1'} = -r \sin\theta \sin\phi. \end{aligned} \tag{58}$$

Consequentemente, se definirmos $\gamma_{00} \equiv \sqrt{g_{00}}$ e $\gamma_{11} \equiv \sqrt{-g_{11}}$, as tetradas $h^a{}_\mu$ e $h_a{}^\mu$ no sistema x^μ serão

$$h^a{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ 0 & \gamma_{11} \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \gamma_{11} \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}; \tag{59}$$

$$h_a{}^\mu = (h^a{}_\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{00}{}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11}{}^{-1} \sin\theta \cos\phi & r^{-1} \cos\theta \cos\phi & -(r \sin\theta)^{-1} \sin\phi \\ 0 & \gamma_{11}{}^{-1} \sin\theta \sin\phi & r^{-1} \cos\theta \sin\phi & (r \sin\theta)^{-1} \cos\phi \\ 0 & \gamma_{11}{}^{-1} \cos\theta & -r^{-1} \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Com as expressões para as componentes das tetradas, é possível usar a equação (22) a fim de encontrar as componentes não nulas da conexão de Weitzenböck para o caso de Schwarzschild, uma vez que esta é definida como uma contração das tetradas e de suas derivadas. Por exemplo, para $\dot{\Gamma}^0{}_{01}$ temos

$$\dot{\Gamma}^0{}_{01} = h_a{}^0 \partial_1 h^a{}_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_r \sqrt{g_{00}} = \partial_r [\ln \sqrt{g_{00}}]. \tag{61}$$

Ao todo, as conexões não nulas são:

$$\begin{aligned} &\dot{\Gamma}^0{}_{01} = \partial_r [\ln \sqrt{g_{00}}]; && \dot{\Gamma}^2{}_{12} = \dot{\Gamma}^3{}_{13} = \frac{\sqrt{-g_{11}}}{r}; \\ &\dot{\Gamma}^1{}_{11} = \partial_r [\ln \sqrt{-g_{11}}]; && \dot{\Gamma}^2{}_{21} = \dot{\Gamma}^3{}_{31} = \frac{1}{r}; \\ &\dot{\Gamma}^1{}_{22} = -\frac{r}{\sqrt{-g_{11}}}; && \dot{\Gamma}^2{}_{33} = -\sin\theta \cos\theta; \\ &\dot{\Gamma}^1{}_{33} = \dot{\Gamma}^1{}_{22} (\sin\theta)^2; && \dot{\Gamma}^3{}_{23} = \dot{\Gamma}^3{}_{32} = \cot\theta. \end{aligned} \tag{62}$$

Seguem diretamente das conexões não nulas e da equação (21), assim como em (PEREIRA, 2001), os termos não nulos de torção oriundos de uma subtração de conexões com os últimos dois índices permutados:

$$\begin{aligned}
\dot{T}^{0}{}_{01} &= -\partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}]; & \dot{T}^{0}{}_{10} &= \partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}];\\
\dot{T}^{2}{}_{21} &= -\frac{(1-\sqrt{-g_{11}})}{r}; & \dot{T}^{2}{}_{12} &= \frac{(1-\sqrt{-g_{11}})}{r};\\
\dot{T}^{3}{}_{31} &= -\frac{(1-\sqrt{-g_{11}})}{r}; & \dot{T}^{3}{}_{13} &= \frac{(1-\sqrt{-g_{11}})}{r}.
\end{aligned} \tag{63}$$

As conexões na equação (62) evidenciam como a conexão de Weitzenböck não é simétrica no último par de índices, sendo permitida a existência de termos de torção diferentes de zero. Estes, por sua vez, indicam na equação (63) como, de fato, a torção é antissimétrica em seu último par de índices.

Por conseguinte, de posse das expressões dos objetos matemáticos calculados até então (tetradas, conexões e torção) e conhecendo as componentes não nulas da métrica de Schwarzschild (equações (40) e (53)), conseguimos calcular o equivalente teleparalelo às equações de campo de Einstein (equação (31)). Isso é possível pois tanto $\dot{S}_a{}^{\rho\sigma}$ (equação (32)) e $\dot{J}_a{}^{\rho}$ (equação (33)) são dados em função dos objetos matemáticos citados.

Usando as tetradas encontradas nas equações (59) e (60), nós calculamos, por intermédio da equação (29), a expressão da lagrangiana para a Solução de Schwarzschild no contexto teleparalelo, a qual é um dos constituintes do termo $\dot{J}_a{}^{\rho}$:

$$\begin{aligned}
\dot{L} =& \frac{c^4 h}{8\pi G} g_{00}(\dot{T}^{0}{}_{10}\dot{T}^{2}{}_{12} + \dot{T}^{0}{}_{10}\dot{T}^{3}{}_{13} + \dot{T}^{2}{}_{12}\dot{T}^{3}{}_{13})\\
=& \frac{c^4 h}{8\pi G} g_{00}\left(2\frac{1-\sqrt{-g_{11}}}{r}\partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}] + \left[\frac{1-\sqrt{-g_{11}}}{r}\right]^2\right).
\end{aligned} \tag{64}$$

Ademais, ressalta-se que, como estamos tratando de soluções no vácuo - isto é, caso em que na RG o tensor de Einstein (ver equação (6)) é nulo e, consequentemente, o tensor energia-momento também o é -, não há campos referentes à matéria. Por conseguinte, também trataremos de soluções para regiões no espaço onde não há matéria e as linhas de campo manifestam-se no vácuo. É suficiente, portanto, considerar equações de campo na forma $\partial_\sigma(h\dot{S}_a{}^{\rho\sigma}) - kh\dot{J}_a{}^{\rho} = 0$, com o segundo membro da equação igual a zero - membro com o tensor energia-momento, aqui igual a zero.

Nota-se que há somente um índice repetido - chamado índice mudo - na expressão da equação de campo descrita acima, designado por σ. Pela convenção de Einstein, haverá soma com respeito a esse índice em cada uma das equações de campo possíveis. Os demais índices, a e ρ - chamados índices livres -, podem assumir qualquer valor dentro de suas definições, resultando em 16 diferentes possíveis equações de campo cuja fórmula geral é

$$\partial_0(h\dot{S}_a{}^{\rho 0}) + \partial_1(h\dot{S}_a{}^{\rho 1}) + \partial_2(h\dot{S}_a{}^{\rho 2}) + \partial_3(h\dot{S}_a{}^{\rho 3}) - kh\dot{J}_a{}^{\rho} = 0. \tag{65}$$

a e ρ podem ter os valores $a = (0,1,2,3)$, $\rho = (0,1,2,3)$. No caso em que $a = 0$ e $\rho = 0$, por exemplo, nós calculamos a seguinte equação de campo teleparalela:

$$\partial_r(\ln h) + \partial_r(\ln\sqrt{g_{00}}) + \partial_r(\ln \dot{T}^2{}_{12}) = \frac{1}{2}\dot{T}^2{}_{12}; \tag{66}$$

substituindo as componentes da torção, indicadas na equação (63), podemos expressar a equação de campo (66) da seguinte maneira (com os elementos da métrica deduzidos a partir do elemento de linha na equação (40)):

$$\partial_r(\ln h) + \partial_r(\ln\sqrt{g_{00}}) + \partial_r\left[\ln\left(\frac{1-\sqrt{-g_{11}}}{r}\right)\right] = \frac{1-\sqrt{-g_{11}}}{2r} \tag{67}$$

IV.2. Modelo de Kerr

Analogamente ao caso de Schwarzschild, é possível escrever o equivalente teleparalelo às equações de campo para a solução de Kerr, bem como encontrar as conexões não nulas e as componentes não nulas da torção. Aqui, exploramos a obtenção destes últimos objetos matemáticos.

A tetrada que recupera a equação (51) é, segundo (PEREIRA, 2001) e (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012), dada pela matriz

$$h^a{}_\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & \eta \\ 0 & \gamma_{11}\sin\theta\cos\phi & \gamma_{22}\cos\theta\cos\phi & -k\sin\phi \\ 0 & \gamma_{11}\sin\theta\sin\phi & \gamma_{22}\cos\theta\sin\phi & k\cos\phi \\ 0 & \gamma_{11}\cos\theta & -\gamma_{22}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

cuja inversa $h_a{}^\mu$ é

$$h_a{}^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{00}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -kg^{03}\sin\phi & \gamma_{11}^{-1}\sin\theta\cos\phi & \gamma_{22}^{-1}\cos\theta\cos\phi & -k^{-1}\sin\phi \\ kg^{03}\cos\phi & \gamma_{11}^{-1}\sin\theta\sin\phi & \gamma_{22}^{-1}\cos\theta\sin\phi & k^{-1}\cos\phi \\ 0 & \gamma_{11}^{-1}\cos\theta & -\gamma_{22}^{-1}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Nas equações (68) e (69), $k^2 = \eta^2 - g_{33}$ e $\eta = \frac{g_{03}}{\gamma_{00}}$, com $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$ e $\gamma_{ii} = \sqrt{-g_{ii}}, i \in \{1,2,3\}$. Ressalta-se que, tratando-se da solução de Kerr, os elementos $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$ referem-se, naturalmente, à métrica do elemento de linha na equação (51).

É possível verificar que as tetradas nas equações (68) e (60) de fato recuperam a métrica de Kerr com o auxílio da equação (13) e da relação $h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a_b$ (ambas satisfeitas neste caso).

Repetindo o procedimento da seção anterior, a equação (22) fornece as seguintes conexões não nulas:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Gamma}^{0}{}_{01} = \partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}]; && \dot{\Gamma}^{0}{}_{13} = kg^{03}\gamma_{11}\sin\theta; \\
&\dot{\Gamma}^{0}{}_{23} = kg^{03}\gamma_{22}\cos\theta; && \dot{\Gamma}^{0}{}_{31} = \frac{\partial_r(\eta)}{\gamma_{00}} + \frac{1}{2}\partial_r(k^2)g^{03}; \\
&\dot{\Gamma}^{1}{}_{11} = \partial_r[\ln\sqrt{-g_{11}}]; && \dot{\Gamma}^{0}{}_{32} = \frac{\partial_\theta(\eta)}{\gamma_{00}} + \frac{1}{2}\partial_\theta(k^2)g^{03}; \\
&\dot{\Gamma}^{1}{}_{12} = \partial_\theta[\ln\sqrt{-g_{11}}]; && \dot{\Gamma}^{1}{}_{22} = -\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}}; \\
&\dot{\Gamma}^{1}{}_{33} = -\frac{k\sin\theta}{\gamma_{11}}; && \dot{\Gamma}^{2}{}_{12} = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}}; \\
&\dot{\Gamma}^{2}{}_{21} = \partial_r[\ln\sqrt{-g_{22}}]; && \dot{\Gamma}^{2}{}_{22} = \partial_\theta[\ln\sqrt{-g_{22}}]; \\
&\dot{\Gamma}^{2}{}_{33} = -\frac{k\cos\theta}{\gamma_{22}}; && \dot{\Gamma}^{3}{}_{13} = \frac{\gamma_{11}\sin\theta}{k}; \\
&\dot{\Gamma}^{3}{}_{23} = \frac{\gamma_{22}\cos\theta}{k}; && \dot{\Gamma}^{3}{}_{31} = \partial_r[\ln k]; \\
&\dot{\Gamma}^{3}{}_{32} = \partial_\theta[\ln k].
\end{aligned}
\tag{70}
$$

As componentes não nulas da torção correspondentes são, consequentemente (mais uma vez, foi usada a equação (21)):

$$
\begin{aligned}
&\dot{T}^{0}{}_{01} = -\partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}]; && \dot{T}^{1}{}_{21} = \partial_\theta[\ln\sqrt{-g_{11}}]; \\
&\dot{T}^{0}{}_{10} = \partial_r[\ln\sqrt{g_{00}}]; && \dot{T}^{2}{}_{12} = \partial_r[\ln\sqrt{-g_{22}}] - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}}; \\
&\dot{T}^{0}{}_{13} = \frac{\partial_r(\eta)}{\gamma_{00}} + kg^{03}(\partial_r(k) - \gamma_{11}\sin\theta); && \dot{T}^{2}{}_{21} = -\partial_r[\ln\sqrt{-g_{22}}] + \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}}; \\
&\dot{T}^{0}{}_{31} = -\frac{\partial_r(\eta)}{\gamma_{00}} - kg^{03}(\partial_r(k) - \gamma_{11}\sin\theta); && \dot{T}^{3}{}_{13} = \frac{1}{k}(\partial_r(k) - \gamma_{11}\sin\theta); \\
&\dot{T}^{0}{}_{23} = \frac{\partial_\theta(\eta)}{\gamma_{00}} + kg^{03}(\partial_\theta(k) - \gamma_{22}\cos\theta); && \dot{T}^{3}{}_{31} = \frac{1}{k}(\gamma_{11}\sin\theta - \partial_r(k)); \\
&\dot{T}^{0}{}_{32} = -\frac{\partial_\theta(\eta)}{\gamma_{00}} - kg^{03}(\partial_\theta(k) - \gamma_{22}\cos\theta); && \dot{T}^{3}{}_{23} = \frac{1}{k}(\partial_\theta(k) - \gamma_{22}\cos\theta); \\
&\dot{T}^{1}{}_{12} = -\partial_\theta[\ln\sqrt{-g_{11}}]; && \dot{T}^{3}{}_{32} = \frac{1}{k}(\gamma_{22}\cos\theta - \partial_\theta(k)).
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Vale pontuar que algumas das conexões calculadas na equação (70) apresentaram discrepâncias em relação aos resultados expostos pela referência consultada (PEREIRA, 2001). Mais especificamente, houve discordância entre alguns sinais das conexões $\dot{\Gamma}^{0}{}_{23}$, $\dot{\Gamma}^{0}{}_{32}$ e $\dot{\Gamma}^{0}{}_{31}$. Consequentemente, quatro das componentes da torção na equação (71) ($\dot{T}^{0}{}_{13}$, $\dot{T}^{0}{}_{31}$, $\dot{T}^{0}{}_{23}$ e $\dot{T}^{0}{}_{32}$) também diferiram das expressões presentes na referência citada. Dessa forma, os possíveis motivos dessas discrepâncias ainda são objeto de investigação, instigando possíveis discussões futuras.

V. Considerações Finais

No presente trabalho descrevemos um formalismo - o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral - responsável por modelar a interação gravitacional como uma teoria de calibre. Nesse sentido, demonstramos como é possível elaborar uma teoria alternativa à RG capaz de descrever corretamente a dinâmica dos eventos físicos considerados (no caso os modelos de buracos negros de Schwarzschild e Kerr) e recuperar resultados análogos aos já obtidos pela relatividade de Einstein (quando considerado o domínio da Física Clássica).

Nessa perspectiva, ao estabelecer a identidade (26) foram obtidas, consequentemente, uma série de equivalências entre essas diferentes teorias. Foi mostrado, por exemplo, como a lagrangiana de Einstein-Hilbert e a lagrangiana teleparalela diferem somente por termos de divergência; dessa correspondência seguiu, por sua vez, a íntima relação entre as equações de campo teleparelas (também frutos da utilização da equação (26)) e as grandezas da RG, materializada na equação (34).

Sob tais considerações, obtivemos o equivalente das equações de campo para a solução de Schwarzschild (a exemplo da equação (67)), bem como os objetos matemáticos necessários para tal. Isso possibilitou a visualização, de maneira mais concreta, de alguns aspectos já previstos pela teoria desenvolvida anteriormente. Da equação (67) é evidente, por exemplo, uma característica inerente à solução de Schwazrschild também na RG: nota-se que a indeterminação (singularidade) em $r = 0$ persiste, uma vez que o limite da equação alternativa encontrada quando $r \to 0$ é indeterminado.

Outro ponto cuja visualização foi concretizada devido à realização desses cálculos foi a percepção de como, ao considerar a gravitação como uma teoria de Gauge para o grupo das translações, não mais a métrica $g_{\mu\nu}$ é a responsável por atuar como bloco fundamental de construção da teoria. Utilizando tetradas (equação (19)) inferimos como estas, juntamente com as conexões de Cartan (equação (22)) passam a ser os ingredientes com os quais podemos definir os demais objetos matemáticos: componentes da torção, superpotenciais, a lagrangiana do sistema físico em questão, as próprias equações de campo, etc. (como indicado em (CAI, 2016)).

Não se deve, porém, pensar que o escopo das aplicações e elaborações do formalismo teleparalelo se restrinja à reescrever as equações de campo desses modelos. É possível utilizar o formalismo desenvolvido para a descrição de demais modelos teóricos (não necessariamente de buracos negros), a exemplo do equivalente teleparalelo da Teoria de Kaluza Klein ou da construção do gravitomagnetismo (ver (ANDRADE, 2000a) e (SPANIOL; ANDRADE, 2009) para maiores detalhes).

Além disso, a propriedade do Equivalente Teleparalelo de recuperar as bem sucedidas previsões já corroboradas pela RG é somente parte do grande potencial das teorias alternativas. Visa-se justamente, ao considerar esse tipo de teoria, buscar alguma descrição teórica mais ampla capaz de superar as aparentes limitações da teoria da Relatividade Geral (como já citado anteriormente) a fim de melhor descrever eventos cosmológicos ou áreas da gravitação em si.

Nesse contexto tem-se, portanto, uma série de teorias que vão além da proposta teórica exposta no presente trabalho. As teorias $f(T)$, por exemplo, consideram uma função não linear do escalar T na lagrangiana; de forma análoga, teorias $f(R)$ levam em consideração funções não lineares do escalar de Ricci R. Com escopo mais geral ainda há, também, as chamadas teorias $f(R,T)$; estas, diferentemente da RG e do teleparalelismo - quando os efeitos gravitacionais são frutos, única e respectivamente, da curvatura do espaço-tempo e da torção - levam em conta ambas grandezas em sua formalização. Dessarte, segue com ampla extensão a lista de teorias alternativas à RG investigadas atualmente (como descrito em (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2015)) que resultam na mesma dinâmica, porém com novas interpretações e ganhos do ponto de vista formal.

Outrossim, por mais que exista uma correspondência entre o teleparalelismo e a RG em regime clássico, ressalta-se como essas teorias divergem quando considerados certos domínios de validade: casos em que vale a Física Quântica (como no Big Bang), situações em que há campos extremos (singularidades de buracos negros) ou mesmo aproximações em regime semiclássico. Justamente aí reside parte da motivação em estudar teorias alternativas, pois há certa liberdade de alterar as bases teóricas ao tentar descrever os fenômenos observados.

Por razões como essas, em certas teorias mais gerais, quando são levadas em conta a torção e a curvatura do espaço-tempo, supõe-se que a torção pode ser acoplada aos spins referente à rotação da matéria. Ou seja, há previsões teóricas de que a torção, além da curvatura, produziria efeitos gravitacionais observáveis no comportamento de corpos massivos - porém em baixa intensidade (HEHL, 1976). Por se tratar de um efeito bastante pequeno, ainda não foi observado experimentalmente; com o avanço da astrofísica observacional e a obtenção de medidas cada vez mais precisas, entretanto, abrem-se novas possibilidades para a eventual detecção de fenômenos como esse.

Vemos, então, como o campo de teorias alternativas mostra-se uma área bastante prolífica para possíveis avanços na compreensão do universo - em especial, da interação gravitacional e de suas consequências. Sua aplicação aos modelos mais simples de buracos negros nos permite perceber aparentes vantagens em adotá-las - como a proximidade com as outras interações fundamentais (também formuladas como teorias de Gauge). Os buracos negros apresentam-se, desse modo, com diferentes faces - como dançarinos num baile de máscaras cosmológico - na medida em que podem ser descritos sob a perspectiva de diferentes formalismos.

As fronteiras da gravitação estendem-se, porém, muito além de simplesmente obter resultados já verificados usando novas teorias (como exposto ao longo do texto). Dessa forma, se admirar as diferentes faces dos buracos negros no baile cósmico é uma maneira de obter um vislumbre de como cada fenômeno físico pode ser compreendido a partir de diferentes perspectivas, estudar as demais teorias alternativas, em contextos mais amplos, coloca-se como uma tentativa de aprender e admirar os passos da dança cósmica que é a evolução do universo e o funcionamento da gravitação em si.

VI. Agradecimentos

Agradecemos ao ProIC/DPG/UnB pela realização do Programa de Iniciação Científica, edital PIBIC 2019/2020, ao longo do qual foi desenvolvido o projeto a partir do qual construímos o presente trabalho.

Agradecemos, também, à contrapartida UnB pelo apoio financeiro, por intermédio do fornecimento de bolsa de Iniciação Científica durante a vigência do edital PIBIC 2019/2020.

Referências

ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. 371

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. v. 173. 370, 372, 375, 376, 378, 387

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *An Introduction to Geometrical Physics*. 2. ed. New Jersey: World scientific, 2016. 370

ANDRADE, V. D.; GUILLEN, L.; PEREIRA, J. *Teleparallel Equivalent of the Kaluza-Klein Theory*. 2000. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9909004>. Acesso em: 09/12/2021. 389

ANDRADE, V. D.; GUILLEN, L.; PEREIRA, J. *Teleparallel Gravity: An Overview*. 2000. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0011087>. Acesso em: 09/12/2021. 370

ANDRADE, V. D.; PEREIRA, J. *Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction*. 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9703059>. Acesso em: 09/12/2021. 376, 377, 378

ANDRADE, V. D.; PEREIRA, J. *Riemannian and Teleparallel Descriptions of the Scalar Field Gravitational Interaction*. 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9706070>. Acesso em: 09/12/2021. 376

CAI, Y.-F.; CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D.; SARIDAKIS, E. N. *f (T) teleparallel gravity and cosmology*. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1511.07586>. Acesso em: 10/12/2021. 370, 371, 372, 389

CANONICO, R.; PARISI, L.; VILASI, G. et al. The newman janis algorithm: A review of some results. In: INSTITUTE OF BIOPHYSICS AND BIOMEDICAL ENGINEERING, BULGARIAN ACADEMY OF .... *Proceedings of the Twelfth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. [S.l.], 2012. p. 159–169. 382

CAPOZZIELLO, S.; LAMBIASE, G. *Open problems in gravitational physics*. 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1409.3370>. Acesso em: 10/12/2021. 370

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. *Extended Theories of Gravity*. 2011. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1108.6266>. Acesso em: 10/12/2021. 373

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended gravity: State of the art and perspectives. In: WORLD SCIENTIFIC. *THE THIRTEENTH MARCEL GROSSMANN MEETING: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories*. [S.l.], 2015. p. 1097–1112. 371, 390

CARROLL, S. M. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. San Francisco: Addison Wesley, 2004. 372, 383

D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. 371, 372, 378, 379, 381, 382, 383

DRAKE, S. P.; SZEKERES, P. *An Explanation of the Newman-Janis Algorithm*. 1998. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9807001>. Acesso em: 10/12/2021. 382

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2001. 372

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 4. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2013. 376

HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 19, n. 12, p. 3524, 1979. 384

HEHL, F. W.; HEYDE, P. Von der; KERLICK, G. D.; NESTER, J. M. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 48, n. 3, p. 393, 1976. 390

KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, APS, v. 11, n. 5, p. 237, 1963. 382

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. v. 2. 372

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. 383

NEWMAN, E. T.; JANIS, A. Note on the kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 6, n. 6, p. 915–917, 1965. 382

PEREIRA, J.; VARGAS, T.; ZHANG, C. Axial-vector torsion and the teleparallel kerr spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 18, n. 5, p. 833, 2001. 381, 384, 386, 387, 388

RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*. New Jersey: Princeton University Press, 2002. 373, 376

SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. 370

SCHWARZSCHILD, K. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *SPAW*, p. 189–196, 1916. 379

SCHWARZSCHILD, K. *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory*. 1999. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/physics/9905030>. Acesso em: 10/12/2021. 379

SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2018. 373

SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1994. 373

SPANIOL, E. P.; ANDRADE, V. C. D. *Gravitomagnetism in Teleparallel Gravity*. 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0802.2697>. Acesso em: 10/12/2021. 389