Physicae Organum, v. 5, n. 2, p. 63-78, Brasília, 2019.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

PHYSICÆ ORGANUM

ARTIGO ORIGINAL

ECONOFÍSICA

Teoria econômica neo-clássica e o princípio variacional na dinâmica de mercados

Neo-Classical economic theory and the variational principle in the dynamics of makets

HENRIQUE ALVES DE LIMA*[1]

[1]Instituto de Física-UnB

Resumo

Resolver problemas da dinâmica de sistemas é uma função fundamental na física. Buscaremos apresentar métodos matemáticos, conhecidos nas soluções de problemas diversos em física, como resposta para questões da dinâmica de mercados presentes na teoria econômica neo-clássica.

Palavras-chave: *Princípio Variacional. Dinâmica de Mercados. Teoria Neo-clássica.*

Abstract

A fundamental purpose of Physics is to solve problems related to the dynamics of systems. We present mathematical methods, used to solve physical problems, as an answer to questions regarding market dynamics present in the neo-classical economic theory

Keywords: *Variational Principle. Market dynamics. Neo-classical theory.*

I. INTRODUÇÃO

Resolver problemas, solucionar as demandas da sociedade e apresentar equações em que seja possível fazer previsões é parte fundamental do trabalho dos físicos em todo o mundo. Ao longo dos anos, com o surgimento de diversas novas tecnologias e influenciadores de comportamento, os problemas se tornaram cada vez mais amplos e as demandas mais difíceis de serem supridas. Entender conceitos fundamentais da teoria econômica, juntamente com o arcabouço matemático necessário, pode ser a chave para desenvolver qualidades técnicas importantes para o entendimento do comportamento de diversos sistemas econômicos. O intuito desse texto é apresentar bases da teoria econômica e suas possíveis ligações com conceitos conhecidos por físicos, em destaque, o princípio variacional, usado na mecânica clássica como uma ferramenta útil para maximizar ou minimizar uma ação.

*henrique_adl@hotmail.com

II. Alguns fundamentos da teoria microeconômica neo-clássica

É comum ao estudante de física estar de frente para diversos problemas e buscar suas soluções. Os problemas apresentados, em geral, possuem elementos, objetos, grandezas e fenômenos que apresentam suas características e comportamentos próprios, como por exemplo, partículas que possuem massa e carga. Em economia, dizemos que os responsáveis pela dinâmica do sistema são *agentes econômicos*, que possuem características próprias fundamentais para a descrição dos sistemas. Em um mercado aberto, os agentes econômicos são basicamente produtores e consumidores.

Seja $x = x(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, onde x_k representa a quantidade demandada por um consumidor do bem "k", por exemplo, x_1, x_2 e x_3 podem representar respectivamente a quantidade demandada de TV's, Sorvetes e Litros de Gasolina. Esses bens ou serviços são demandados pelos consumidores a preços dados por $p = p(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$, onde p_k é o preço que o consumidor estaria disposto a pagar pela unidade de cada bem "k".

A teoria econômica neo-clássica descreve o comportamento do que é chamado "agente racional". O "agente racional" faz seus cálculos mentais implícitos de forma a buscar o máximo de satisfação em suas escolhas, matematicamente falando, se pudéssemos escolher uma função que descrevesse a satisfação do consumidor em suas escolhas, estaríamos buscando pontos de máximo em uma curva.

As escolhas do consumidor podem se encaixar no que chamamos de "cesta" de consumo. Essas cestas expressam as possíveis combinações de produtos que o consumidor estaria disposto a adquirir. Por exemplo, num cenário em que uma pessoa estaria disposta a comprar roupas e alimentos, montando as seguintes cestas:

Cestas	Alimentos	Roupas
A	8	2
B	6	5
C	10	3
D	2	8
E	5	5

Tabela 1: *Cestas de consumo.*

Podemos analisar esses pontos em um gráfico:

Vamos considerar que exista uma função $U(x)$ onde $x = x(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, iremos chamalá de **função de utilidade**. Essa função de utilidade atribui um valor para cada cesta, valor este que representa a satisfação consumidor. Vamos supor que inicialmente a função de utilidade seja dependente das quantidades de roupas e alimentos previamente citadas, ou seja:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \tag{1}$$

onde x_1 representa a quantidade demandada de roupas e x_2 a quantidade demandada de alimentos. Se voltamos na tabela I, vemos que as cestas "A", "E"e "D"retornam o mesmo valor para a função utilidade. A curva que é composta por todos esses pontos de mesma satisfação é chamada curva de indiferença ou isoutilidade. Ao longo dessa curva, qualquer cesta escolhida pelo consumidor vai gerar o mesmo nível de satisfação.

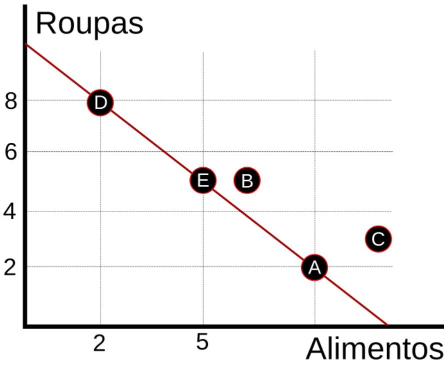

Figura 1: *Cestas possíveis com as combinações de alimentos e roupas.*

Há porém um limitador do dispêndio de um consumidor e consequentemente, um limitador para a escolha das cestas, o seu capital. O consumidor pode montar diversas cestas para o seu consumo, porém, o valor total da cesta está limitado pelo total que o agente está disposto a gastar. Teriamos uma condição da forma:

$$M = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = \bar{p}x \tag{2}$$

onde $\bar{p}$ é o preço médio.

Essa condição nos diz que nem todas as cestas podem ser obtidas, mas há uma condição importante a ser levada em conta, o consumidor tende a sempre escolher a cesta que lhe gera o *maior* nível de satisfação. Entender como essas combinações de compra ou venda afetam a satisfação dos agentes econômicos requer diversas informações e interpretações que podem não ser possíveis de sistematizar. Porém, podemos usar métodos matemáticos que nos retornem resultados significativos sobre esses comportamentos, buscaremos aqui achar um ponto em que a função utilidade tenha o seu maior valor possível, ou seja, a cesta em que a satisfação do agente econômico seja máxima. Considerando a restrição presente na equação (2), usaremos o método dos multiplicadores de Lagrange para encontramos pontos de máximo.

Vamos considerar o vínculo:

$$M - \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = 0. \tag{3}$$

Teremos então uma equação da forma:

$$U(x) - \lambda(x\bar{p} - M) = F(x, \bar{p}), \tag{4}$$

sujeita a condição:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Podemos fazer $\lambda\bar{p} = p$, considerando que λ muda apenas as escalas; Temos um resultado da forma:

$$dU(x) - pdx = 0 \Rightarrow p(x) = \nabla U(x) \tag{6}$$

O comportamento esperado para a curva de $f(x)$, que representa o preço que o consumidor estaria disposto a pagar por uma quantidade x de commodities, é descrito pela lei da demanda, ou seja, o preço que um comprador está disposto a pagar tende a diminuir com o aumento da quantidade demandada. Para o produtor, temos uma curva de preço $g(x)$, descrita pela lei da oferta, ou seja, o preço da oferta tende a aumentar com a quantidade ofertada.

Esperamos então que a curva $f(x)$ seja decrescente, levando a entender que o consumidor estaria disposto a pagar menos por uma quantidade n do que por $n-1$. Para a oferta, o produtor tende a cobrar mais por n do que por $n-1$.

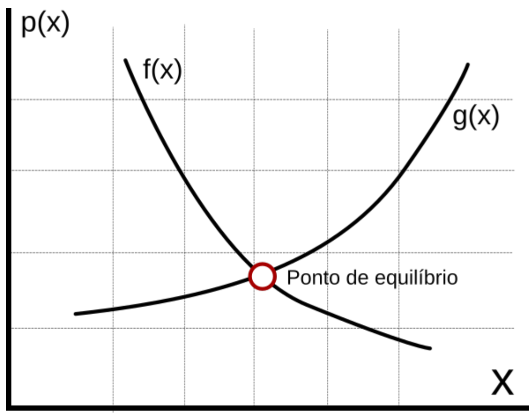

Figura 2: *Comportamentos previstos para as curvas de oferta g(x) e demanda f(x). O ponto de intecerssão das cuvas é chamado ponto de equilíbrio.*

O ponto de equilíbrio representa a situação em que demanda e oferta se encontram, o que gera um cenário de equilíbrio econômico. A ideia de um mercado no equilíbrio torna-se frágil até mesmo para sistemas idealizados, quando consideramos o fato que os produtores e consumidores não conhecem inicialmente os desejos uns dos outros. Queremos então desenvolver métodos que possam nos levar de um mercado fora do equilíbrio para um mercado no equilíbrio. Um problema sério existente nessa concepção é o de que as demandas e ofertas propostas podem variar com o tempo, levando o sistema a fugir do ponto de equilíbrio inicial e apresentar outro ponto de equilíbrio estável em um tempo posterior.

Se consideramos a quantidade demandada como uma função $D(p)$ e a oferta como uma função $S(p)$, podemos definir a diferença dessas duas funções como o excesso na demanda, atribuindo a isto uma função $\epsilon(p)$

$$D(p) - S(p) = \epsilon(p). \tag{7}$$

Queremos encontrar condições que levem a função $\epsilon(p)$ a se anular, excluindo os excessos na demanda e oferta, maximizando a eficiência desse mercado. O conceito da "mão invisível do mercado"nos fala de uma situação em que o próprio sistema em sí tende a corrigir os excessos e caminhar ao ponto de equilíbrio. Supondo que a oferta de mão de obra seja dada

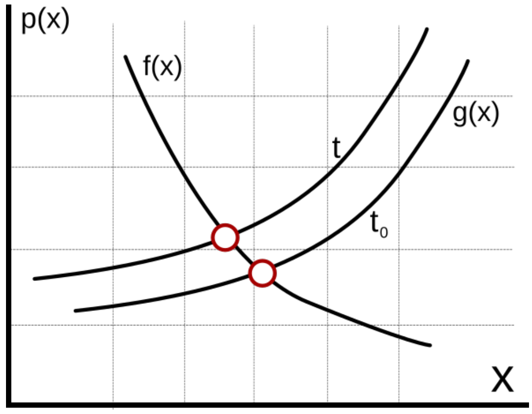

Figura 3: *Curvas de oferta e demanda em tempos diferentes. É possível perceber a mudança no ponto de equilíbrio do sistema para uma posição em que as quantidades ofertadas e demandadas são menores.*

por L, e que a variação temporal dessa oferta seja dada por

$$\frac{dL}{dt} = \epsilon(L). \tag{8}$$

No equilíbrio, $\epsilon(L) = 0$, ou seja, a oferta e demanda por mão de obra são iguais, todos os que desejam trabalhar encontram emprego. Diversos outros conceitos de microeconomia podem ser vistos em (PINDYCK; RUBINFELD, 2009).

Estamos buscando ferramentas e conceitos que nos ajudem a entender e solucionar problemas similares aos apresentados até aqui. Existe porém um atenuante para os problemas, a evolução temporal das variáveis, sendo assim, é necessário que se conheça métodos mais elaborados que englobem a dinâmica das variáveis econômicas.

III. Otimização da dinâmica de mercados como um elo entre física e economia

A grande motivação para esse artigo é apresentar situações presentes em economia que possuem uma analogia evidente com problemas recorrentes em física. Conhecemos a partir de observações da natureza que os entes físicos tendem a buscar estados de menor energia, mas qual seria o análogo econômico? Ora, os consumidores tendem a minimizar o seu gasto, os produtores tendem a maximizar o seu lucro e diminuir o custo de produção. Matematicamente falando, para ambos os casos estamos procurando máximos e mínimos de funções que demonstram o comportamento desses agentes ao longo do tempo.

Vamos iniciar esses conceitos apresentando um exemplo simples de otimização. Vamos considerar o caso de uma empresa que transforma uma matéria prima em um produto final, processo que consiste em levar a matéria prima de uma estado A para um estado Z. Essa transformação está sujeita a 5 etapas e entre cada etapa o produtor pode escolher um entre vários processos, cada um deles sujeito a um custo diferente. Ao final de todas as etapas, independente da escolha dos subprocessos, a matéria prima estará em um estado Z, o que mudará será o custo da produção para cada um dos caminhos escolhidos.

O produtor pode por exemplo escolher a sequência $ACEHKZ$, o que resultaria o valor

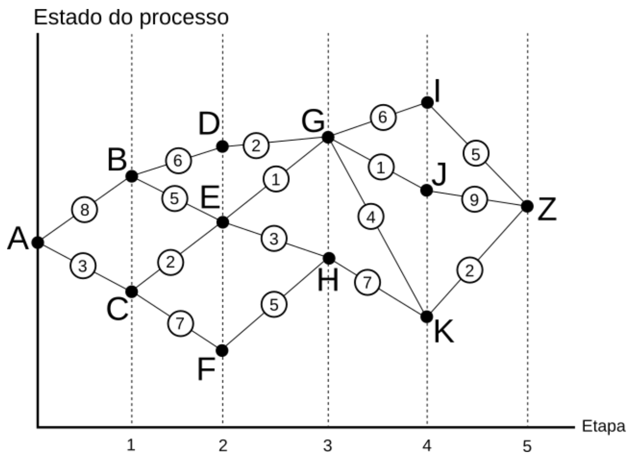

Figura 4: *Tomada de decisão em multi-etapas para o caso do processo de transformação de matéria prima. Os valores descritos nos círculos representam o custo de cada subprocesso.*

total da transformação $A \to Z$ como sendo $17um$(unidade monetária). Porém, o mais lógico a se considerar é que o produtor escolha a sequência que gere o menor custo da transformação $A \to Z$.

O próximo passo consiste em considerar um processo que ocorra em etapas contínuas, ou seja, agora as etapas do processo tendem ao infinito, consequentemente, os subprocessos. Iremos considerar o tempo t como a variável de etapas.

Vamos considerar o seguinte exemplo. Uma pessoa possui uma poupança A e deseja chegar ao valor Z. Existem diversos planos de investimento e outras maneiras de multiplicar esse montante inicial a fim de chegar ao capital final Z, porém, se considerarmos um intervalo de tempo τ, existirá um plano de investimento no qual o rendimento será máximo ao longo do tempo. Podemos também pensar o caso em que um produtor deseja minimizar os custos de produção ao longo do tempo, buscando a sequência de processos que minimize a sua função de custo.

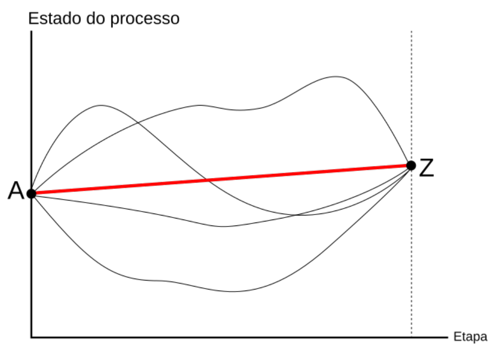

Figura 5: *Caso contínuo do processo $A \to Z$. A curva em vermelho representa, por exemplo, o caminho que minimiza uma variável ao longo do tempo.*

Usaremos a ideia do funcional e o princípio variacional como a resposta matemática para encontrarmos a curva que melhor representa o resultado que buscamos.

IV. O princípio variacional aplicado a problemas econômicos

O problema fundamental a ser resolvido é encontrar uma função $y(t)$ tal que a integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} f(y(t), y'(t); t) dt \tag{9}$$

seja um *extremo*, ou seja, um máximo ou mínimo. Para isso, são necessárias inicialmente as condições:

$$y(t_1) = A \tag{10}$$

$$y(t_2) = Z \tag{11}$$

Veremos posteriormente que não necessariamente sempre teremos problemas em que são dados os valores para os parâmetros $y(t2)$ e t_2. O que irá diferenciar o resultado de ser um máximo ou mínimo será a condição de segunda ordem. A solução para esse tipo de problema consiste inicialmente em resolver uma ou um conjunto de equações diferenciais, geradas a partir da conhecida equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

Vamos considerar o exemplo simples de uma função $f = 12ty + y'^2$, com condições $y(t_1) = y_1$ e $y(t_2) = y_2$ arbitrárias. Teríamos a equação 9 descrita por:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} (12ty - y'^2) dt \tag{13}$$

Aplicando f à equação de Euler-Lagrange, teríamos a seguinte equação diferencial:

$$2y'' - 12t = 0 \tag{14}$$

Resolvendo a equação diferencial, teríamos a função $y(t)$ dada por:

$$y(t) = t^3 + C_1 t + C_2, \tag{15}$$

com C_1 e C_2 sendo constantes arbitrárias que dependem das condições $y(t_1), y(t_2)$ e $y'(t_1), y'(t_2)$. Esse problema é bastante simples e serve apenas para ilustrar a condição imposta pela equação 12. Porém, existem outras condições que precisam ser satisfeitas para determinar o comportamento da curva $y(t)$ que minimiza ou maximiza o nosso funcional. Essas condições dependem exclusivamente da forma do problema que está sendo estudado, devemos lembrar que cada situação busca representar a dinâmica de um sistema que possui suas particularidades e algumas condições de contorno podem representar interesses dos agentes econômicos. Assim, essas diversas condições são uma resposta para a particularidade de cada caso apresentado.

I. Condições de caracterização da curva

Até agora tratamos apenas de encontrar curvas que sejam extremos, mas o que difere uma curva de ser um máximo ou mínimo? Iremos falar das diversas condições que lapidam a curva que desejamos.

Quando tratamos de funções de uma variável e que sejam diferenciáveis até a sua segunda derivada, caso exista um valor a que aponte um máximo local, é necessário que $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$ sejam satisfeitas. Esse ponto pode ser tratado fisicamente como um ponto de equilíbrio instável. Existem condições análogas que precisam ser respeitadas para o caso em que estudamos. Buscando extremos em:

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x(t), x'(t); t) dt, \tag{16}$$

onde F é duas vezes diferenciável em cada um de seus argumentos. As condições que caracterizam $x(t)$ como máximo ou mínimo são:

$$\frac{\partial^2 F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'^2} \leq 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'^2} \geq 0 \tag{18}$$

A condição 17 nos diz que a função $x(t)$ é um **máximo** e a 18 nos diz que $x(t)$ é um **mínimo**. Essa condição é chamada condição de *Legendre*.

Vamos considerar agora que apenas o valor inicial $x(t_1) = x_1$ seja determinado, ou seja, o valor final $x(t_2)$ é livre. Caso o problema estudado apresente essa liberdade para o valor de $x(t_2)$ é preciso considerar a chamada condição de transversalidade, apresentada na equação 19.

$$\left.\frac{\partial F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'}\right|_{t=t_2} = 0 \tag{19}$$

Para o caso de t_2 ser livre, é necessária a condição:

$$\left.F - x' \frac{\partial F}{\partial x'}\right|_{t=t_2} = 0 \tag{20}$$

Caso ambos $x(t_2)$ e t_2 sejam livres, ou seja, não determinados inicialmente no problema, as condições de transversalidade podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\left.\frac{\partial F(x(t), x'(t); t)}{\partial x'}\right|_{t=t_2} = 0 \tag{21}$$

$$\left.F\right|_{t=t_2} = 0 \tag{22}$$

Há ainda o caso em que as coordenadas finais não são nem completamente livres ou previamente dadas. Essa situação funciona como uma condição intermediária, em que há um grau de limitação para as condições de $x(t_2)$ e t_2. Essa condição não será abordada aqui, porém pode ser encontrada com detalhes na seção 10 de (ALPHA, 1992).

Todas essas condições descritas até aqui são necessárias para modelar a equação $x(t)$ que buscamos, algumas delas, usadas para casos específicos. As demonstrações de todas essas condições podem ser encontradas em (ALPHA, 1992) e (KAMIEN MORTON, 1991).

Para ilustrar o uso dessas condições, vejamos um exemplo. Vamos encontrar extremos para a expressão:

$$\int_0^T ((c_1)[x'(t)]^2 + c_2 x(t))dt \tag{23}$$

As condições são: $x(0) = 0$, $x(T) = B$, sendo B uma constante dada, porém, T é livre.

O primeiro passo é aplicar o nosso integrando à equação de Euler-Lagrange (12), o que nos resulta:

$$2c_1 x''(t) = c_2 \tag{24}$$

Isolando o termo $x''(t)$ e realizando duas vezes uma integração com limites indeterminados, chegamos à solução:

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1} + K_1 t + K_2 \tag{25}$$

Como o tempo final T é livre, precisamos fazer uso da condição 20:

$$c_1 x'(T)^2 = c_2 x(T) \tag{26}$$

Precisamos agora determinar as constantes K_1, K_2 e T. Utilizaremos as condições de contorno e transversalidade para determinar o valor dessas constantes. Utilizando a condição de contorno $x(0) = 0$, chegamos ao resultado de que $K_2 = 0$. Aplicando (25) em (26) e sabendo que $K_2 = 0$, teremos a seguinte expressão:

$$c_1(c_2 T/2c_1 + K_1)^2 = c_2(c_2 T^2/4c_1 + K_1 T) \tag{27}$$

Expandindo os termos e fazendo as devidas manipulações, chegamos ao resultado de $K_1 = 0$. Assim, teremos a solução $x(t)$ escrita como:

$$x(t) = \frac{c_2 t^2}{4c_1}, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{28}$$

Como $x(T) = B$, teremos:

$$T = 2(Bc_1/c_2)^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Podemos ver por este exemplo que as condições de contorno e transversalidade são responsáveis por modelar a curva de solução que maximiza ou minimiza o problema. Considerando as dificuldades de trabalhar com casos reais, até os mais simples modelos teóricos podem ser consideravelmente mais complicados do que o vimos em 23.

II. Otimização da dinâmica de uma empresa monopolista

Vamos analisar um modelo clássico, chamado modelo de Evans, de uma empresa monopolista que produza um único bem. Esse é um modelo com algumas abstrações, porém, apresenta bem a construção do pensamento lógico que leva à solução de problemas reais de otimização.

Considerando que o custo de produção desse bem seja dado pela função:

$$C = aQ^2 + bQ + c \qquad (a, b, c > 0) \tag{30}$$

Esse modelo leva em conta que a empresa não tenha estoque, ou seja, uma produção semelhante à conhecida na logística como *just in time*; é produzido exatamente o que é demandado. A demanda $Q(t)$ depende de dois fatores importantes, o preço $P(t)$ e a variação no tempo do preço $P'(t)$:

$$Q = d - eP(t) + fP'(t) \qquad (d, e > 0; f \neq 0) \tag{31}$$

Sendo o lucro dessa empresa igual ao produto do preço pela a quantidade vendida menos o custo de produção, ou seja, $L = PQ - C$, teremos o lucro dessa empresa dado pela equação:

$$\begin{aligned} L = \pi(P, P') = PQ - C = P(d - eP + fP') \\ - a(d - eP + fP')^2 - b(d - eP + eP') - c \end{aligned} \tag{32}$$

Expandindo os termos quadráticos e manipulando a equação, teremos:

$$\begin{aligned} &\pi(P, P') = -e(1 + ae)P^2 + (d + 2ade + be)P \\ &- af^2P'^2 - f(2ad + b)P' + f(1 + 2ae)PP' \\ &- (ad^2 + bd + c) \end{aligned} \tag{33}$$

A função de lucro π pode ser descrita como uma função de P e P'. Para deixar mais claro o que estamos fazendo, buscamos encontrar uma curva $P(t)$ em que o lucro seja máximo ao longo do tempo. Para isso, precisamos resolver um problema da forma:

$$\Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P')dt \tag{34}$$

com $P(0) = P_0$, $P(T) = P_T$, P_0, T e $P(T)$ dados.

Aplicando $\pi(P, P')$ na equação de Euler-Lagrange e manipulando os termos, chegaremos à uma equação diferencial da forma:

$$P'' - \frac{e(1 + ae)}{af^2}P = -\frac{d + 2ade + be}{2af^2} \tag{35}$$

Essa equação tem uma solução geral dada por:

$$P(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \bar{P} \tag{36}$$

com as raízes r_1 e r_2 expressas por:

$$r_1, r_2 = \pm\sqrt{\frac{e(1+ae)}{af^2}} \tag{37}$$

e a solução particular $\bar{P}$:

$$\bar{P} = \frac{d + 2ade + be}{2e(1+ae)} \tag{38}$$

Aplicando as condições de contorno na solução geral, podemos determinar o valor para as constantes A_1 e A_2:

$$A_1 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}} \tag{39}$$

$$A_2 = \frac{P_0 - \bar{P} - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \tag{40}$$

Como os valores para T, $P(T)$ e $P(0)$ são previamente dados, conhecer essas duas contantes A_1 e A_2 completa a solução do nosso problema, ou seja, agora temos determinada a curva $P(t)$.

V. Formulação Hamiltoniana aplicada à problemas econômicos

Uma formulação mais moderna e mais abrangente pode ser apresentada para resolver os problemas de dinâmica que foram propostos, essa proposta é chamada *teoria do controle ótimo*. Essa teoria basea-se em estudar o comportamento de certas *variáveis de controle* que funcionam como instrumentos de otimização do sistema. Essa formulação também se torna interessante quando temos problemas em que o princípio variacional não é conveniente, como por exemplo, quando existem limitações nas derivadas da função de estado, o que seria análogo aos vínculos não holônomos da mecânica clássica. Assim como antes, estamos procurando também a curva de controle $u(t)$ que torna nossa função um extremo, já que uma vez conhecida a curva $u(t)$ também podemos definir a curva de estado $y(t)$.

Para ilustrar a ideia do que seriam essas variáveis de controle, imagine um recurso finito (água, petróleo, ouro), dado por uma função S, em que exista a condição $S(0) = S_0$. Ao longo do tempo, esse recurso será extraído e utilizado, reduzindo sua quantidade em estoque, assim, a variação temporal desse recurso:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t) \tag{41}$$

Podemos perceber que a variável $E(t)$ tem sua relação direta com o a variável de estado $S(t)$, representando a taxa de extração desse recurso e funcionando como um mecanismo direção da curva de estado.

Poderíamos descrever esse problema como:

$$\int_0^T U(E)e^{-\rho t}dt \tag{42}$$

Com as condições $S'(t) = f(t,S,E)$, $S(0) = S_0$, $S(T)$ é livre e $\frac{dS(t)}{dt} = -E(t)$. Agora o integrando não depende explicitamente apenas da função de estado y e sua derivada temporal, a função de controle substitui $y'(t)$.

Todas as mudanças apresentadas até aqui fazem parte do que chamamos de formulação Hamiltoniana, que é fundamento para as mais diversas áreas da física. Sendo assim, é viável construir uma função Hamiltoniana a partir de uma transformação de variáveis:

$$H(t,y,u,\lambda) = F(t,y,u) + \lambda(t)f(t,y,u) \tag{43}$$

Na mecânica clássica, buscamos substituir q'_k por p_k e assim, resolver não mais N equações diferenciais de segunda ordem e sim $2N$ equações diferenciais de primeira ordem. Aqui, estamos substituindo $f(t,y,u)$ por uma função auxiliar $\lambda(t)$ buscando também resolver equações diferenciais de primeira ordem. Considerando todas essas informações, esperamos que hajam também equações de movimento para as variáveis y e λ, além de condições de contorno e transversalidade.

Para um problema de maximização que tenha a forma:

$$V = \int_0^T F(t,y,u)dt \tag{44}$$

com as condições: $y' = f(t,y,u)$, $y(0) = A$, $y(T)$ é livre, e A e T dados, teremos as seguintes condições:

$$\text{Max}_u H(t,y,u,\lambda) \text{ Para } t \in [0,T]$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{45}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} \tag{46}$$

e a condição de transversalidade:

$$\lambda(T) = 0 \tag{47}$$

A expressão $\text{Max}_u H$ significa que a Hamiltoniana será maximizada com respeito à variável u. Assim como foi feito anteriormente, as condições de segunda ordem podem ser escritas como:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0 \tag{48}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0 \tag{49}$$

sendo a equação 48 necessária para maximizar um problema e a equação 49 para minimizar. Uma última condição ainda é necessária e se aplica apenas para os casos em que a Hamiltoniana não é linear em $u(t)$, ou seja, a Hamiltoniana não é da forma $H(t) = Au(t) + B$ e quando o máximo de H não ocorre em um ponto do contorno. Estamos considerando que u seja definido em uma região de controle, determinada por um intervalo fechado $[a, c]$. Essa condição é expressa por:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{50}$$

Em resumo, a condição 50 só é aplicável quando u é não linear e H seja maximizado por u em um ponto interno ao intervalo fechado $[a, c]$, ou seja, $a < u < c$.

Vamos visualizar um exemplo simples. Considere o problema:

$$\text{Max} \int_0^1 (x + u)dt \tag{51}$$

com $x' = 1 - u^2$ e $x(0) = 1$. Teremos então a Hamiltoniana dada por:

$$H = x + u + \lambda(1 - u^2) \tag{52}$$

Podemos ver que a Hamiltoniana 52 não é linear em u, sendo assim, devemos usar a condição 50. Utilizando as condições apresentadas em 46, 47, 48 e 50, teremos as seguintes equações:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = 1 - 2\lambda u, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\lambda \leq 0 \tag{53}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1, \qquad \lambda(1) = 0 \tag{54}$$

Integrando a expressão em 54 e aplicando a condição de contorno, teremos:

$$\lambda = 1 - t \tag{55}$$

A partir de 53, podemos escrever:

$$u = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(1 - t) \tag{56}$$

Substituindo 56 em $x' = 1 - u^2$ e $x(0) = 1$, chegaremos a:

$$x' = 1 - \frac{1}{4}(1 - t)^2, \qquad x(0) = 1 \tag{57}$$

Integrando a expressão 57, aplicando as condições de contorno e listando todos os resultados, chegaremos às seguintes equações para os parâmetros procurados:

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \frac{1}{4}(1 - t) + \frac{5}{4} \\ \lambda(t) &= 1 - t \\ u(t) &= \frac{1}{2}(1 - t) \end{aligned} \tag{58}$$

É possível perceber que essa formulação carrega a vantagem de apresentar equações diferenciais de ordem menor, o que pode facilitar a solução dos problemas na maioria das vezes.

I. Condições de restrição envolvendo variáveis de controle

Quando tratamos de restrições nas curvas que extremizam os funcionais estudados, estamos falando de situações similares aos problemas tratados no início desse artigo, que eram resolvidos a partir do método dos multiplicadores de Lagrange. Existem diversos tipos de restrição para as variáveis de controle, vamos falar sobre restrições que representam igualdades da forma $g(t,y,u) = c$. Os outros tipos de restrições podem ser encontrados de forma detalhada no capitulo 10 em (ALPHA, 1992).

Vamos considerar um problema com duas variáveis de controle, u_1 e u_2, onde a seguinte condição deve ser obedecida:

$$g(t,y,u_1,u_2) = c \tag{59}$$

O problema pode ser apresentado como:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \int_0^T F(t,y,u_1,u_2)dt \\
&\text{sujeito à condição} \quad y' = f(t,y,u_1,u_2) \\
&g(t,y,u_1,u_2) = c \\
&\text{e condições de contorno não especificadas}
\end{aligned} \tag{60}$$

Utilizando o método similar aos multiplicadores de Lagrange, teremos uma função $\mathfrak{L}$ que será descrita por:

$$\mathfrak{L} = H + \theta(t)[c - g(t,y,u_1,u_2)] \tag{61}$$

Aqui, o multiplicador de Lagrange $\theta(t)$ é dinâmico, ou seja, uma função do tempo. Considerando que cada u_j tenha uma solução dentro de um intervalo fechado $[a,c]$, faz-se necessária a condição:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_j} - \theta \frac{\partial g}{\partial u_j} = 0, \quad \forall t \in [0,T] \tag{62}$$

É também necessária a condição:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = c - g(t,y,u_1,u_2) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \tag{63}$$

As condições 62 e 63, acompanhadas de condições de segunda ordem, são responsáveis por modelar a curva de solução para a maximização de H em um caso de restrição de equidade. Além disso, existem também modificações nas equações canônicas de Hamilton. As condições restantes são:

$$y' = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{64}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \theta\frac{\partial g}{\partial y} \tag{65}$$

acompanhadas de uma devida condição de transversalidade. Podemos perceber que a equação de movimento para y se mantêm a mesma, porém, a equação para λ é acrescida de um termo que depende do multiplicador de Lagrange. Muitos dos problemas que tratam de restrições, são apresentados com limitantes em formas de inequações. A ideia inicial para entender as restrições dessa forma é pensar que quando tratamos de variáveis de controle, tornam-se mais interessantes os casos em que sejam impostos limites de atuação para essas variáveis, limites da forma $a < u < b$. Restrições por inequações podem ser vistas em detalhes em (KAMIEN MORTON, 1991).

VI. Conclusão

Estimular o pensamento econômico de profissionais acostumados a resolver diversos tipos de problemas pode ser o primeiro passo para uma série de ganhos futuros. Os tópicos abordados por este trabalho são base para a construção de uma teoria fundamental para se entender a dinâmica de mercados. É possível perceber que a maior parte do arcabouço matemático abordado é usada com frequência na solução de problemas em física, sendo assim, entender a dinâmica de problemas econômicos gera um diferencial para o profissional da área. Apesar disto, existem diversos conceitos agregados à teoria de optimização da dinâmica, que não são vistos com frequência por físicos, principalmente alunos de graduação, revelando que essa teoria apresenta particularidades interessantes de serem abordadas. Buscamos apresentar fundamentos da teoria econômica de forma simples, considerando que a maior parte desses conceitos não são apresentados, na maioria das vezes, em cursos de ciências exatas. É possível encontrar em (CRAVEN; ISLAM, 2005) conceitos para a programação de modelos econômicos e ideias semelhantes às encontradas nesse trabalho. Fica como proposta, a simulação de modelos econômicos a partir de métodos de programação estatística, como por exemplo, a simulação de um modelo de crescimento estocástico, que pode ser encontrado no capítulo 7 em (CRAVEN; ISLAM, 2005)

Referências

ALPHA, C. C. *Elements of dynamic optimization*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1992. 71, 76

BARRO R.J; SALA-I-MARTIN, X. *Economic Growth*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2004. ISBN 9780262025539.

CRAVEN, B.; ISLAM, S. *Optimization in Economics and Finance: Some Advances in Non-Linear, Dynamic, Multi-Criteria and Stochastic Models*. [S.l.]: Springer, 2005. ISBN 9780387242798. 77

EVANS, G. C. *Mathematical introduction to economics*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1930.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 2002. ISBN 9780201657029.

KAMIEN MORTON, I. *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. [S.l.]: Elsevier Science, 1991. v. 2nd ed. 71, 77

MARION, J. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. [S.l.]: Elsevier Science, 2013. ISBN 9781483272818.

MCCAULEY JOSEPH, L. *Dynamics of markets: econophysics and finance*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. *Microeconomics*. [S.l.]: Pearson/Prentice Hall, 2009. ISBN 9780132080231. 67