Álgebras de Clifford

JOSÉ ELIAS ABRÃO NETO*

ORIENTADOR: OLAVO LEOPOLDINO DA SILVA FILHO†

Universidade de Brasília

Resumo

Esse artigo tem como objetivo introduzir o leitor a álgebra de Clifford. Foi assumido que o leitor tem um conhecimento mínimo de álgebra linear como por exemplo multiplicação matricial. Apos introduzir as ideias e conceitos sobre a álgebra de Clifford são feitos dois exemplos de como ela pode ser aplicada na física.

Palavras-chave: Álgebra, Clifford, Eletromagnetismo.

1 Historia

As álgebras de Clifford tiveram origem na tentativa de representar um número complexo geometricamente. Com base na representação geométrica de números complexos, William Rowan Hamilton, em busca de uma generalização desses para o espaço tridimensional, criou em 1843 os números quatérnions.

Em 1844 Hermann Grassmann desenvolveu a sua própria álgebra com uma operação chamada produto exterior, sendo esta a operação chave na álgebra que hoje se conhece como álgebra externa.

A álgebra geométrica de Clifford, surge no século XIX em 1878, pelo matemático William Kingdom Clifford. Clifford introduziu o análogo do produto de quatérnions de Halmilton dentro da estrutura da álgebra extensão de Grassmann, obtendo um sistema naturalmente adaptado para a geometria ortogonal de um espaço arbitrário.

2 Motivações

Do que foi dito anteriormente, fica claro que uma maneira simples de introduzir uma motivação para o estudo da álgebra de Clifford é através dos números complexos.

*elias_abrao@hotmail.com

†olavolsf@gmail.com

Sabemos que um número complexo z no plano pode ser escrito como $z = x + iy$, em que x e y são suas coordenadas no plano. Há, evidentemente, uma representação do par ordenado (x, y), também no plano, em termos de vetores, na forma $\vec{z} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$.

Ora, é imediata a identificação dessas duas representações. De fato, podemos representá-las igualmente escrevendo, simplesmente, o par ordenado (x, y).

Entretanto, se imaginarmos a representação complexa e fizermos o produto entre dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2^* = x_2 - iy_2$ (o conjugado complexo de z_2), obtemos

$$z_1 z_2^* = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_2 y_1 - x_1 y_2) \tag{1}$$

Note que esse resultado é sugestivo, se o pensarmos como relacionado a vetores e seus produtos usuais (escalar e vetorial). De fato, pensando em termos de vetores, poderíamos escrever o resultado anterior como

$$z_1 z_2 = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 + i\,|\vec{z}_1 \times \vec{z}_2|, \tag{2}$$

em que fomos obrigados a usar o módulo por estarmos em duas dimensões.

Ora, então vemos que a operação de produto de números complexos é bastante rica (em duas dimensões), pois ela engloba, pensando em vetores, tanto o produto escalar como o produto vetorial, sintetizados em um único produto (no caso, de números complexos).

A álgebra de Clifford vem justamente para generalizar essas noções para espaços de dimensão maior do que duas.

3 Espaço Vetorial

Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos estiverem definidas as seguintes operações:

- Dados dois elementos u e v de V existe um outro elemento $u + v$ que também pertence a V. Essa operação é denominada soma e indica que V é fechado com relação a ela;
- Dado um $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ existe um outro elemento $\alpha \cdot v$ pertencente a V. Essa operação é denominada multiplicação por escalar.

Um elemento u pertencente a V é chamado de vetor covariante ou somente vetor e é escrito como $\vec{u}$.

As operações citadas anteriormente têm as seguintes propriedades:

Propriedade 3.1. *(Espaço Vetorial) Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$; temos que:*

1. *Comutatividade da Adição:* $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. *Associatividade da Adição:* $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. *Elemento Neutro da Adição:* $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

4. *Inverso Aditivo:* $\forall u \in V, \exists v \in V : u + v = v + u = 0$;
5. *Associatividade da Multiplicação:* $\alpha(\beta u) = \beta(\alpha\vec{u})$
6. *Distributividade dos Escalares:* $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
7. *Distributividade dos Vetores:* $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
8. *Elemento Neutro da multiplicação por escalar:* $\exists \gamma \in \mathbb{K} : \forall u \in V, \gamma u = u$.

Definição 3.1. *(Combinação Linear) Um vetor $\vec{v} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear de $v_1, v_2 ... v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que:*

$$\vec{v} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,$$

onde os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ formam um subconjunto $\mathcal{B}$ de V.

Definição 3.2. *(Base) É dito que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V se todos os elementos de V podem ser escritos como uma combinação linear de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$. O subconjunto $\mathcal{B}$ também é conhecido como base do espaço vetorial V.*

É costume fazer com que os vetores da base tenham modulo igual a 1, quando então dizemos que os vetores da base são normalizados, ou que a base, de modo geral, é normalizada.

Definição 3.3. *(Dimensão) Se a base $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial V tem n elementos, então dizemos que n é a dimensão do espaço vetorial V.*

Há, entretanto, espaços vetoriais de dimensão infinita, quando então a base tem infinitos elementos[1].

3.1 Produto Interno

Uma estrutura de Espaço Vetorial não depende de se definir a operação de produto interno entre vetores. Essa é uma operação que se introduz posteriormente, quando é o caso, à estrutura de Espaço Vetorial.

Tal operação, entretanto, muito frequentemente é relevante para os estudos em Física, de modo que a apresentamos a seguir.

[1]Esta diferenciação é importante, pois há diversos teoremas que valem para espaços de dimensão finita, mas não valem para espaços de dimensão infinita

Definição 3.4. *(Produto Escalar) Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais ou números complexos($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$); define-se um produto escalar entre elementos de V como: $\forall u, v \in V, \exists \gamma \in \mathbb{K}$ tal que*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{K} \\ < u, v > &\mapsto \gamma' \end{aligned} \tag{3}$$

ou seja, a função $<,>$ toma dois vetores pertencentes a V e leva em um número real ou complexo pertencente a $\mathbb{K}$.

Propriedade 3.2. *(Produto Escalar) Essa função $<,>$ é chamada de produto interno e tem as seguintes propriedades ($\forall u, v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$):*

1. $< u+v, w >=< v, w > + < u, w >$, $< u, v+w >=< u, v > + < u, w >$;
2. $< \lambda u, v >= \lambda^* < u, v >$, $< u, \lambda v >= \lambda < u, v >$ *('*' representa o complexo conjugado);*
3. $< u, v >=< v, u >^*$;
4. $< u, u > \geq 0$ *, sendo igual a zero apenas quando* $u = 0$.

Diferentes espaços podem ter produtos internos diferentes. Por exemplo, o espaço de Hilbert L^2 tem produto interno definido como

$$< x, y >= \int_a^b x(t)^* y(t) dt.$$

Já o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ tem produto interno

$$< u, v >= (\vec{u} \cdot \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}| cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre os dois vetores.

Exemplo 3.1. *Olhando para o produto interno no espaço euclidiano é possível ver uma das vantagens de se fazer as bases do espaço serem ortogonais($\theta = 90°$). Considerando as bases ortogonais (e_1, e_2) no espaço euclidiano de dimensão $dimV = 2$, o produto interno de dois vetores $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2$ e $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2$ é:*

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &=< u_1 e_1 + u_2 e_2, v_1 e_1 + v_2 e_2 > \\ &= u_1 v_1 < e_1, e_1 > + u_2 v_1 < e_2, e_1 > + u_2 v_2 < e_2, e1 > + u_2 v_2 < e_2, e_2 >, \\ &= u_1 v_1 |e_1||e_1| cos(0) + u_2 v_2 |e_2||e_2| cos(0) \end{aligned} \tag{4}$$

ou, usando a definição para o produto escalar no espaço euclidiano,

$$(u \cdot v) = u_1 v_1 |e_1||e_1| + u_2 v_2 |e_2||e_2|.$$

Caso também sejam consideradas bases normalizadas(módulo de $e_i = 1, \forall i$), então:

$$(u \cdot v) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Definição 3.5. *Uma base que é ortogonal e tem módulo igual à unidade de $\mathbb{K}$ (que representamos simplesmente por 1) é chamada de base ortonormal.*

Elementos de V não nulos que tem produto interno igual a zero são elementos linearmente independentes, ou seja não é possível escrever um elemento como a combinação linear do outro.

Do resultado a cima temos que o módulo de um vetor no espaço euclidiano pode ser dado pelo produto interno[2]

$$< v, v >= (v, v) = \sum_i^n v_i v_i = |\vec{v}|^2.$$

3.2 Espaço Dual e Funcionais

Em um espaço vetorial V podemos realizar operações que levam um elemento de V em um elemento de $\mathbb{K}$, como fazer uma integral definida usando elementos de V.

Essas operações são chamadas de transformações e são dadas por funcionais sendo aplicados em vetores.

Exemplo 3.2. *Por exemplo seja V o espaço vetorial dos polinômios no parâmetro t sobre os números reais e τ uma transformação linear $\tau : V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\tau(v) = \int_a^b v(t) dt$$

O funcional τ no exemplo seria a integral definida.

Mais especificamente, estamos interessados em trabalhar com transformações lineares ou seja:

Definição 3.6. *(Transformações Lineares) Considerando a transformação de um espaço vetorial V em um corpo $\mathbb{K}$ da forma $\Phi : V \to \mathbb{K}$, tais que, para $u, v \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$, temos que a transformação*

[2] O espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ apresenta particular interesse, uma vez que se pode mostrar que todo espaço vetorial de dimensão finita n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

é linear se, e somente se:

$$\Phi(au + bv) = a\Phi(u) + b\Phi(v),$$

de modo que funcionais lineares em V são transformações lineares de V no corpo $\mathbb{K}$.

Dados dois funcionais lineares Φ, Ψ sobre um espaço vetorial V e $\forall v \in V$, podem-se definir as operações de soma de funcionais e multiplicação por escalar a partir das propriedades:

Propriedade 3.3. *Operações sobre transformações lineares:*

1. $(\Phi + \Psi)(v) = \Phi(v) + \Psi(v)$,
2. $(a\Phi)(v) = a\Phi(v)$.

O conjunto dos funcionais lineares munido das duas operações 3.3 forma um espaço vetorial de grande importância.

Definição 3.7. *(Espaço Dual) O espaço vetorial cujos elementos são transformações lineares de V em $\mathbb{K}$ que possuem as propriedades 3.3 é chamado de espaço dual ao espaço vetorial V, e é representado como V^*.*

Dado um vetor qualquer $v \in V$, é sempre possível reescrever este vetor como uma combinação linear de elementos de uma base ortonormal. Se o espaço V tem dimensão $dimV = n$, é necessário ter n diferentes elementos ortonormais (e_i), de modo que o vetor v pode ser escrito como:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

Tomando um funcional $\Psi \in V^*$ e aplicando-o a $\vec{v}$, tem-se

$$\Psi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \Psi(e_i).$$

Com isso, podemos demonstrar um importante resultado:

Teorema 3.1. *Um elemento qualquer $\Psi \in V^*$ pode ser escrito em função dos termos $\Psi(e_i)$, ou seja, qualquer funcional de V^* pode ser decomposto na forma de uma combinação linear dos $\Psi(e_i)$. Deste modo, pode-se assumir os termos $\Psi(e_i)$ como base do espaço dual V^*.*

Demonstração 3.1. *Para que sejam bases de V^* os elementos $\Psi(e_i)$ devem ser linearmente independentes.*

Como, por construção, os elementos e_i são ortonormais temos que:

$$\sum_{i=1}^{m} K_i e_i \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

onde $K_i \in \mathbb{R}$. Aplicando um funcional Ψ em ambos os lados da equação:

$$\Psi(\sum_{i=1}^{n} K_i e_i) = \Psi(0) \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

Como os funcionais de V^* são lineares pode-se reescrever o termo do lado direito da igualdade como:

$$\Psi(\sum_{i=1}^{n} K_i e_i) = \Psi(0) = \Psi(v-v) = \Psi(v) - \Psi(v) = 0 \Leftrightarrow (\forall_i) K_i = 0,$$

Então os elementos $\Psi(e_i)$ são linearmente independentes e podem ser as bases de V^*. Como o espaço V^* também tem elementos que podem ser decompostos como uma combinação linear de suas bases,de maneira análoga aos vetores, os elementos de V^* são chamados de covetores ou vetores contravariantes.

Denota-se $\mathcal{B}^* = (e^1, e^2, ..., e^n)$ o conjunto dos elementos de base do espaço dual V^*, como visto acima. Esta base do espaço dual é definida de tal forma que, se e^i for aplicado em e_j deve ser obtido:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j,$$

onde o símbolo matemático δ^i_j é o delta de Kroenecker.

Tendo-se um vetor $v \in V$ é possível achar o seu covetor $\sigma \in V^*$, pois as bases de ambos os espaços estão relacionadas. É possível, portanto, passar-se de uma base no espaço dual para um base no correspondente espaço vetorial por meio da métrica.

Para vermos isso mais claramente, precisamos definir uma nova quantidade em nosso formalismo.

Definição 3.8. *(Métrica) A métrica em um espaço vetorial V define a maneira como calculamos comprimentos (em sentido genérico) neste espaço. Assim, se definimos um comprimento dado por ds^2, então*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{i,j} u^i u^j. \tag{5}$$

Com a definição 3.8, é fácil ver que a métrica é uma matriz dada pelo produto interno das bases, ou seja, $g_{i,j} =< e_i, e_j >$.

Exemplo 3.3. *Por exemplo seja V o espaço euclidiano em três dimensões, então as bases na forma matricial são:*

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz métrica fica:

$$g_{i,j} = \begin{bmatrix} \vec{i}\cdot\vec{i} & \vec{i}\cdot\vec{j} & \vec{i}\cdot\vec{k} \\ \vec{j}\cdot\vec{i} & \vec{j}\cdot\vec{j} & \vec{j}\cdot\vec{k} \\ \vec{k}\cdot\vec{i} & \vec{k}\cdot\vec{j} & \vec{k}\cdot\vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conhecendo-se a métrica do espaço vetorial V e suas bases é possível obter as bases do espaço dual, pois há um isomorfismo entre os espaços[3]. Assim, temos como definir uma correlação simétrica $\tau : V \to V^*$, tomando um elemento de V e levando em um elemento de V^*, que é invertível, ou seja, $\tau^{-1} : V^* \to V$. Essa correlação τ é a métrica.

Seja v um elemento de V podemos achar um elemento $\alpha \in V^*$ como:

$$\begin{array}{c} v = \sum_i v_i e_i = \sum_i g_{ij} x^j e^i = [g]\alpha \\ \Rightarrow \alpha = [g]^{-1} v \end{array}, \tag{6}$$

em que $[g]$ é a representação da métrica (correlação entre V e V^*) e $[g]^{-1}$ é a matriz da correlação inversa.

É comum fazer a simplificação na notação para os elementos da representação, colocando-se $x^j = v^j$ para identificar as componentes do vetor dual relativas ao vetor v, cujas componentes devem ser escritas v_j, salientando-se apenas que as componentes de um vetor de V^* têm o índice em cima, enquanto que as componentes de um vetor de V apresentam índices embaixo.

Outra notação comum decorre de se ocultar o somatório e subir/descer os índices dos escalares de modo a ter $\vec{v} = v^i e_i$ ou $\alpha = x_j e^j = v_j e^j$, nesse caso deve-se olhar apenas para a base para saber se o elemento pertence a V ou a V^*: a base de V é escrita com índices embaixo e_i, enquanto que a base de V^* é escrita com índices em cima e^j. Essa notação é chamada de notação de Einstein: índices repetidos, um em cima e o outro embaixo, representam índices mudos relacionados a um somatório sobre todos os valores que tal índice pode assumir.

Com essas convenções, podemos escrever

$$v_i = g_{ij} v^j, \tag{7}$$

[3] Afirmamos anteriormente que qualquer espaço vetorial de dimensão finita n é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$, assim, como ambos V e V^* são de dimensão n, são ambos isomorfos a $\mathbb{R}^n$ e, portanto, isomorfos entre si, já que o isomorfismo é uma propriedade simétrica e transitiva, além de reflexiva – uma relação de equivalência;

que estabelece a relação entre os elementos da representação, ou seja, as componentes do vetor e covetor nas bases dadas.

Exemplo 3.4. *Na Teoria Especial da Relatividade, mostra-se que a invariância da velocidade da luz c com o estado cinemático do referencial implica na invariância do elemento de linha*

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{8}$$

implicando que a métrica deve ser escrita como

$$\eta^i_j = < e^i, e_j > = diag(1,-1,-1,-1), \tag{9}$$

em que $diag(1,-1,-1,-1)$ *representa uma matriz* 4×4 *na qual apenas os elementos da diagonal são diferentes de zero e têm os valores assinalados.*

Nesse caso, diferentemente do espaço euclideano, não é mais possível representar *vetores e covetores (os duais) da mesma maneira.*

Em termos de representação, temos

$$e_0 = (1,0,0,0); e_1 = (0,1,0,0); e_2 = (0,0,1,0); e_3 = (0,0,0,1)$$
$$e^0 = (1,0,0,0); e^1 = (0,-1,0,0); e^2 = (0,0,-1,0); e^3 = (0,0,0,-1)$$

3.3 Tensores

Como visto anteriormente um funcional/covetor atuando em um vetor gera um número escalar. Pode-se pensar, então, no produto de dois covetores atuando em dois vetores.

Definição 3.9. *Sejam* $\alpha,\beta \in V^*$, $v,u \in V$ *e os escalares* $\alpha(v),\beta(u)$. *O produto dos escalares define um funcional bilinear (linear em ambas as entradas) agindo sobre o produto cartesiano* $V\times V$ *na forma*

$$\alpha\otimes\beta : V\times V \to \mathbb{K}$$
$$(\alpha\otimes\beta)(v,u) \mapsto \alpha(v)\beta(u)$$

A grandeza $\alpha\otimes\beta$ *é denominada produto tensorial de* α *e* β.

Podemos, igualmente, definir um produto tensorial de vetores. Nesse caso, temos um funcional bilinear atuando no produto cartesiano de $V^*\times V^*$ na forma

$$(v\otimes u)(\alpha,\beta) = \alpha(v)\beta(u).$$

O produto tensorial forma um espaço vetorial. Denota-se por $T^2(V)\equiv T^2$ o espaço vetorial formado pelo produto tensorial $\alpha\otimes\beta$ de elementos $\alpha,\beta\in V^*$ e $T_2(V)\equiv T_2$ o espaço vetorial formado pelo produto tensorial $u \otimes v$ de elementos $u, v \in V$. De modo geral

$$T^2 = V^* \otimes V^*$$

$$T_2 = V \otimes V$$

Teorema 3.2. *Se a dimensão do espaço V for igual a n então*

$$dimT_2 = dimT^2(V) = n^2. \tag{10}$$

Demonstração 3.2. *Seja $\{e_i\}$ um conjunto de bases de V e $\{e^i\}$ um conjunto de bases de V^*, sabe-se que*

$$\alpha(v) = \sum_i v^i \alpha(e_i) = v^i \alpha_i,$$

onde estamos usando a notação de Einstein para evitar ter que escrever o somatório e estamos fazendo a simplificação $\alpha(e_i) = \alpha_i$. Fazendo as mesmas simplificações para $\beta(u)$ temos:

$$(\alpha \otimes \beta)(v, u) = v^i \alpha_i u^j \beta_j. \tag{11}$$

Considerando então os funcionais α e β como os covetores da base de V^*

$$(e^i \otimes e^j)(v, u) = \sum_k \sum_m v^k [e^i(e_k)] u^m [e^j(e_m)] = v^k \delta^i_k u^j \delta^j_m,$$

em que já usamos que $e^i(e_k) = \delta^i_k$, de modo que ficamos com

$$(e^i \otimes e^j)(v, u) = v^i u^j. \tag{12}$$

Como podemos escrever um covetor em função dos termos de base e usando a propriedade do produto tensorial de ser bilinear, pode-se chegar à conclusão que

$$\alpha \otimes \beta = a_i b_j e^i \otimes e^j,$$

onde os valores a_i e b_j são os valores obtidos ao se decompor os covetores α e β em função dos elementos de base.

Do resultado acima é possível concluir que os funcionais bilineares $e^i \otimes e^j$ podem ser usados como elementos de base do espaço T^2. Assim, um funcional bilinear arbitrário $\mathbf{B}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{B} = \sum_i \sum_j b^{i,j} e^i \otimes e^j = b_{i,j} e^i \otimes e^j,$$

onde os termos b_{ij} são escalares obtidos através da aplicação do funcional **B** nos vetores de base (e_i, e_j). O mesmo procedimento pode ser feito para as grandezas $e_i \otimes e_j$. Desse modo, é natural tomar $e_i \otimes e_j$ como base de T_2.

Os elementos do espaço T^2 são chamados de tensores contravariantes de ordem dois e os elementos de T_2 são chamados de tensores covariantes de ordem dois.

Tensores são objetos matemáticos que estendem as noções de vetores. Como visto anteriormente, ele pode ser construído a partir da aplicação de funcionais em vetores de um espaço vetorial V.

Podemos generalizar os tensores de maneira análoga ao que foi feito, definindo a multiplicação de n escalares resultantes de n funcionais atuando sobre n vetores, o resultado é chamado tensor de ordem *n*.

Pela mesma linha de raciocínio é possível concluir que vetores são tensores de ordem um e escalares são tensores de ordem zero.

Exemplo 3.5. *Seja $v, u \in V$ dado por $v = 2e_1 + 3e_2$ e $u = -5e_1 + 6e_2$ e a métrica $g_{i,j}$ dada por:*

$$g_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Esta matriz pode ser encarada como a matriz de representação da transformação linear $T(x,y) = (x+y, x-y)$ pois, se substituirmos a base canônica $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$, obtemos, respectivamente, $T(1,0) = (1,1)$ e $T(0,1) = (1,-1)$, de modo que a matriz de representação de T na base $\{e_i\}$, escrita como $[T]_e$ é exatamente 13, pois é construída a partir dos resultados da aplicação de T escritos como colunas. *Assim, de fato, dar a matriz de g é dar a representação da transformação linear que associada à correlação entre o espaço de origem V e seu dual V^*.*

Como se trata, de fato, de um operador linear*, visto levar de um espaço vetorial de dimensão n em outro de mesma dimensão, podemos inverter a matriz e obter, assim, a matriz de representação da transformação inversa.*

Podemos, imediatamente, obter os elementos da base de V^*, usando a métrica na forma (ver (6)) $e^i = [g^{-1}]^{i,j} e_j$. Note que, por uma questão de consistência, a inversa da matriz $[g]$ deve vir com os índices em cima, visto proceder à transformação inversa relativamente a $[g]$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 + e_2 \\ e_1 - e_2 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Os elementos $\alpha, \beta \in V^*$ podem ser obtidos como $\alpha = [g]^{-1} v = v_i e^i$ e $\beta = [g]^{-1} u = u_i e^i$, ou seja, usando (14),

$$\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

e

$$\beta = \begin{bmatrix} -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Assim os elementos α *e* β *são, na base de* V^*,

$$\alpha = 2e^1 + 3e^2 \ , \ \beta = -5e^1 + 6e^2$$

O produto tensorial dos elementos α *e* β *é*

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes \beta) = &-(2 \cdot 5)e^1 \otimes e^1 - (3 \cdot 5)e^2 \otimes e^1 \\ &+ (2 \cdot 6)e^1 \otimes e^2 + (3 \cdot 6)e^2 \otimes e^2\end{aligned} \ ,$$

ou

$$(\alpha \otimes \beta) = -10e^1 \otimes e^1 - 15e^2 \otimes e^1 + 12e^1 \otimes e^2 + 18e^2 \otimes e^2$$

O produto tensorial de β *e* α*, por sua vez, é*

$$\begin{aligned}(\beta \otimes \alpha) = &-(5 \cdot 2)e^1 \otimes e^1 - (5 \cdot 3)e^1 \otimes e^2 \\ &+ (6 \cdot 2)e^2 \otimes e^1 + (6 \cdot 3)e^2 \otimes e^2\end{aligned} \ ,$$

ou

$$(\beta \otimes \alpha) = -10e^1 \otimes e^1 - 15e^1 \otimes e^2 + 12e^2 \otimes e^1 + 18e^2 \otimes e^2$$

Fazendo a subtração dos dois produtos tensoriais

$$(\alpha \otimes \beta) - (\beta \otimes \alpha) = (-15 - 12)e^2 \otimes e^1 + (12 + 15)e^1 \otimes e^2 = -27e^2 \otimes e^1 + 27e^1 \otimes e^2.$$

Aplicando agora a subtração dos dois produtos tensoriais nos vetores v e u

$$(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v, u) = (\alpha \otimes \beta)(v, u) - (\beta \otimes \alpha)(v, u) = \alpha(v)\beta(u) - \beta(v)\alpha(u),$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha(v) &= (2e^1 + 3e^2)(2e_1 + 3e_2) \\ &= 4e^1(e_1) + 6e^1(e_2) + 6e^2(e_1) + 9e^2(e_2), \\ &= 4 + 9 = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(u) &= (-5e^1 + 6e^2)(-5e_1 + 6e_2) \\ &= 25e^1(e_1) - 30e^1(e_2) - 30e^2(e_1) + 36e^2(e_2), \\ &= 25 + 36 = 61\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= (2e^1 + 3e^2)(-5e_1 + 6e_2) \\ &= -10e^1(e_1) - 15e^1(e_2) + 12e^2(e_1) + 18e^2(e_2), \\ &= -10 + 18 = 8\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta(v) &= (-5e^1+6e^2)(2e_1+3e_2)\\ &= -10e^1(e_1)-15e^1(e_2)+12e^2(e_1)+18e^2(e_2).\\ &= -10+18=8\end{aligned}$$

Então

$$(\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)(v,u) = 13\cdot 61-8\cdot 8 = 793-64 = 729.$$

Dos resultados acima fica fácil ver que o produto tensorial não é comutativo, pois

$$(\alpha\otimes\beta)(v,u) = \alpha(v)\beta(u) \neq \alpha(u)\beta(v) = (\beta\otimes\alpha)(v,u).$$

4 Álgebra Exterior

Dado um tensor na forma $X_1\otimes X_2\otimes ...\otimes X_p$, em que X_i com $i=1,...,p$ são vetores, pode-se definir o **Operador Alternador** como se segue.

Definição 4.1. *(Operador Alternador) O Operador Alternador (Alt) é tal que*

$$Alt(X_1\otimes X_2\otimes ...\otimes X_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)X_{\sigma(1)}\otimes X_{\sigma(2)}\otimes ...\otimes X_{\sigma(p)}, \tag{15}$$

onde S_p é o conjunto de todas as permutações possíveis e $\varepsilon(\sigma)=1$, se o número de permutações feitas for par, e $\varepsilon(\sigma)=-1$, se o número de permutações feitas for ímpar.

Com a definição do alternador é possível definir a noção de **p-vetores**.

Definição 4.2. *(p-Vetor) Um p-vetor($A_{[p]}$) é um tensor contravariante de ordem p alternado, ou seja:*

$$A_{[p]} = Alt(v_1\otimes v_2\otimes ...\otimes v_p),$$

onde $v_1,v_2,...,v_p\in V$. Denota-se por $\Lambda_p(V)$ o espaço dos p-vetores. É simples mostrar que $\Lambda_p(V)$ é espaço vetorial.

Assim, $\Lambda_0(V)=\mathbb{R}$ e $\Lambda_1(V)$ é o espaço dos 1-vetores, ressaltando-se que 1-vetor é sinônimo de vetor.

Exemplo 4.1. *Vamos aplicar a definição de p-Vetores para explicitar um 2-vetor, ou seja, o* *caso em que $p = 2$. Neste caso temos $X_1 = u, X_2 = v$ e*

$$A_2 = \frac{\sigma(1,2 \to 1,2) u \otimes v + \sigma(1,2 \to 2,1) v \otimes u}{2}$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{u \otimes v - v \otimes u}{2},$$

uma vez que a permutação $\sigma(1,2 \to 2,1)$ é ímpar.

Se tivermos um 3-vetor, então $X_1 = u, X_2 = v, X_3 = w$ e ficamos com

$$\begin{aligned} A_3 = \frac{1}{6}[&u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + w \otimes u \otimes v \\ &- v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u] \end{aligned}.$$

Com a definição de p-vetores pode-se definir o **produto exterior**.

Definição 4.3. *(Produto Exterior) Sejam $A_{[p]} \in \Lambda_p(V)$ um p-vetor e $B_{[q]} \in \Lambda_q(V)$ um q-vetor; o produto exterior $\wedge : \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \to \Lambda_{p+q}(V)$ é dado por*

$$A_{[p]} \wedge B_{[q]} = Alt(A_{[p]} \otimes B_{[q]}). \tag{16}$$

Exemplo 4.2. *Vamos conferir o resultado do produto exterior de um 1-vetor com um 2-vetor. Temos que calcular $A_1 \wedge A_2$ que deve ser escrito como*

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 = Alt(A_1 \otimes A_2) &= Alt(u \otimes \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v) \\ &= \frac{1}{2} Alt(u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v) \\ &= \frac{1}{2} Alt(u \otimes v \otimes w) - Alt(u \otimes w \otimes v) \end{aligned}$$

dando, como resultado,

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{6}(&u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + v \otimes w \otimes u \\ &- v \otimes u \otimes w + w \otimes u \otimes v - w \otimes v \otimes u \\ &- u \otimes w \otimes v + u \otimes v \otimes w - v \otimes u \otimes w \\ &+ v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u + w \otimes u \otimes v) \end{aligned}.$$

Podemos, agora, proceder à combinação dos tensores semelhantes para obter, simplesmente

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 = \frac{1}{6}[u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v + w \otimes u \otimes v \\ -v \otimes u \otimes w + v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u] \end{aligned},$$

que nada mais é que $A_3 = A_{1+2}$.

Das equações (15) e (16), fazendo o produto exterior de dois vetores v e u, é possível concluir que o produto exterior é anticomutativo.

$$\begin{aligned} v \wedge u &= \frac{1}{2}(v \otimes u - u \otimes v) \\ u \wedge v &= \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) \\ v \wedge u &= -u \wedge v \end{aligned}. \tag{17}$$

Tem-se também, imediatamente, que o produto exterior é associativo e linear.

$$(A_{[p]} \wedge B_{[q]}) \wedge C_{[r]} = A_{[p]} \wedge (B_{[q]} \wedge C_{[r]})$$

$$K \wedge A_{[p]} = KA_{[p]}, K \in \Lambda_0(V) = \mathbb{R}$$

Dado os espaços vetoriais $\Lambda_p(V)$ é construído o espaço vetorial $\Lambda(V)$ como a soma direta dos espaços vetoriais $\Lambda_p(V)$ com p = 1,...,n.

$$\Lambda(V) = \Lambda_0(V) \oplus \Lambda_1(V) \oplus \Lambda_2(V) \oplus ... \oplus \Lambda_n(V) = \oplus_{p=0}^{n} \Lambda_p(V)$$

Já foi assinalado que os produtos tensoriais $e_i \otimes e_j \otimes ... \otimes e_p$, em que $\{e_i\}$ é base de V, são base do espaço vetorial $V \otimes V \otimes ... \otimes V$ (p-vezes). Podemos generalizar essa noção para o espaço vetorial $\Lambda_p(V)$.

Definição 4.4. *Seja* $\{e_i\}_{i=1..n}$ *uma base de* V *de dimensão n. Então a base do espaço vetorial* $\Lambda_p(V)$ *será dada por todas as permutações* $e_i \wedge e_j \wedge ... \wedge e_p$ *linearmente independentes.*

Exemplo 4.3. *Se temos* $p = 2$ *e um espaço vetorial* V *de dimensão* 3*, então podemos formar os seguintes fatores linearmente independentes*

$$e_1 \wedge e_2; e_2 \wedge e_3; e_3 \wedge e_1,$$

e mais nenhuma outra, pois já vimos que $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$*. Assim, um 2-vetor em* $\mathbb{R}^3$ *deve ser escrito na forma*

$$A_2 = a^{1,2} e_1 \wedge e_2 + a^{2,3} e_2 \wedge e_3 + a^{3,1} e_3 \wedge e_1.$$

em que $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Finalmente, temos também

$$A_3 = a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

com um único $a^{1,2,3} \in \mathbb{K}$, visto não ser possível combinar os e_i de outra forma que seja linearmente independente.

Note-se que, para $p = 1$ em um espaço vetorial V tal que $dim(V) = 3$, temos

$$A_1 = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3,$$

onde $a^i \in \mathbb{K}$, ou seja, simplesmente um vetor usual. Da mesma maneira, $A_0 = a^0$, em que $a^0 \in \mathbb{K}$. Finalmente, temos ainda

$$A_3 = a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

em que $a^{1,2,3} \in \mathbb{K}$, pois só há uma maneira linearmente independente de se combinar os três vetores de base disponíveis.

Define-se então uma **álgebra exterior**:

Definição 4.5. *(Álgebra Exterior) Uma álgebra exterior é o par($\Lambda(V), \wedge$), ou seja o espaço vetorial $\Lambda(V)$ equipado com o produto exterior $\wedge$.*

Definição 4.6. *(Multivetor) Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então um elemento arbitrário (A) de $\Lambda(V)$ é chamado de multivetor e consiste na soma de um escalar($\Lambda_0(V)$), um 1-vetor($\Lambda_1(V)$), um 2-vetor($\Lambda_2(V)$), etc. Até um n-vetor ($\Lambda_n(V)$)*

$$\Lambda(V) \ni A = F + F^i \mathbf{e_i} + F^{ij} \mathbf{e_i} \wedge \mathbf{e_j} + ... + F^{i,..,n} \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} \wedge ... \wedge \mathbf{e_n}$$

Exemplo 4.4. *Para um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}^3$ teremos um multivetor A dado por*

$$\begin{aligned} A = {} & a^0 + a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3 \\ & + a^{1,2} e_1 \wedge e_2 + a^{2,3} e_2 \wedge e_3 + a^{3,1} e_3 \wedge e_1 + a^{1,2,3} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Em um espaço vetorial (V) podemos definir a ação de um funcional(α) sobre um vetor **v** de modo que $\alpha : V \to \mathbb{R}$. Na álgebra exterior, isso se reflete simplesmente em $\alpha : \Lambda_1(V) \to \Lambda_0(V)$.

A generalização dessa operação que, atuando em um elemento pertencente a $\Lambda_p(V)$, leve em um elemento de $\Lambda_{p-1}(V)$ é chamada de contração($\rfloor$). Vamos definir a aplicação de um p-vetor em p funcionais antes de definirmos a contração, visto que a operação de contração depende desta noção.

Definição 4.7. *(Aplicação de p-Vetor a p funcionais) A aplicação de um p-Vetor* $A_{[p]} = \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_p}$ *a p funcionais* $\alpha_1, ..., \alpha_p$ *é definida como*

$$A_{[p]}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \alpha_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) \alpha_2(\mathbf{v}_{\sigma(2)}) ... \alpha_p(\mathbf{v}_{\sigma(p)}), \tag{18}$$

e é, evidentemente, um elemento de $\mathbb{K}$.

Exemplo 4.5. *Vamos apresentar um exemplo concreto da aplicação de um 2-Vetor, construído a partir dos vetores v e u, a 2 funcionais* α *e* β*. Temos, da definição, que*

$$A_{[2]}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha(v)\beta(u) - \beta(v)\alpha(u)).$$

Considere, agora, que a aplicação funcional α *a um vetor representa a projeção deste vetor no eixo-x, enquanto que a aplicação do funcional* β *a um vetor representa a projeção deste vetor no eixo-y. Então ficamos com*

$$A_{[2]} = \frac{1}{2}(v_x u_y - u_x v_y).$$

Podemos, agora, definir a contração.

Definição 4.8. *(Contração) Seja* $A_{[p]}$ *um p-vetor e* α *um funcional, sua contração é dada por*

$$(\alpha \rfloor A_{[p]})(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}) = p A_{[p]}(\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{p-1}$ *são funcionais arbitrários.*

Escrevendo $A_{[p]} = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p$ e usando as equações (15) e (16) é possível reescrever a definição 4.8 como:

$$(\alpha \rfloor A_{[p]})(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{p-1}) = \frac{p}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}) \alpha_1(v_{\sigma(2)}) ... \alpha_{p-1}(v_{\sigma(p)})$$

A definição 4.8 nos diz que a contração de um funcional α por um p-vetor aplicado em $(p-1)$ funcionais é igual a p funcionais sendo aplicados no p-vetor multiplicado por um escalar. Ao fazer a substituição indicada na definição 4.8, é possível ver que ao aplicar p funcionais no p-vetor obtém-se um número escalar (cf. também o exemplo anterior). Assim cada funcional α ao ser aplicado diminui o grau do multivetor em um. Então a contração de um funcional por um p-vetor gera um (p-1)-vetor.

Para o caso um vetor v a definição acima se reduz à aplicação de um funcional em um vetor

$$\alpha \rfloor v = \alpha(v). \tag{19}$$

Como a contração faz um elemento do espaço $\Lambda_p(V)$ ir para um elemento de $\Lambda_{p-1}(V)$ assume-se que, caso seja feita a contração de um elemento de $\Lambda_0(V)$, o resultado é nulo.

$$\alpha \rfloor K = 0; K \in \Lambda_0(V)$$

Exemplo 4.6. *Um resultado muito útil é a contração de um $2-vetor$ por um funcional α*

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = 2(v \wedge u)(\alpha, \beta),$$

de modo que β é um funcional arbitrário. Usando a definição 4.8 de contração, temos que

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = \frac{2}{2!}(v \otimes u - u \otimes v)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(u) - \alpha(u)\beta(v),$$

ou seja,

$$(\alpha \rfloor (v \wedge u))(\beta) = (\alpha(v)u - \alpha(u)v)(\beta) = ((\alpha \rfloor v)u - (\alpha \rfloor u)v)(\beta).$$

Como β é arbitrário, a expressão acima deve ser válida para qualquer funcional β, de modo que

$$\alpha \rfloor (v \wedge u) = (\alpha \rfloor v)u - v(\alpha \rfloor u) = \alpha(v)u - \alpha(u)v. \tag{20}$$

Por meio da definição de contração é possível se generalizar o resultado anterior para a contração de um produto exterior de um p-vetor com um q-vetor

$$\alpha \rfloor (A_{[p]} \wedge B_{[q]}) = (\alpha \rfloor A_{[p]}) \wedge B_{[q]} + (-1)^p A_{[p]} \wedge (\alpha \rfloor B_{[q]}),$$

sendo que o termo $(-1)^p$ está relacionado com o número de termos (de $A_{[p]}$) que o funcional α terá que "pular" para chegar em $B_{[q]}$.

4.1 Álgebra de Grassmann

Dado um espaço vetorial V pode-se definir um funcional bilinear simétrico $g : V \times V \to \mathbb{R}$, ou seja, um produto interno. Define-se então uma **álgebra de Grassmann**

Definição 4.9. *(Álgebra de Grassmann) Uma álgebra de Grassmann é uma álgebra exterior $(\Lambda(V), \wedge)$ equipada com a generalização de g para o espaço vetorial $\Lambda(V)$.*

A generalização do funcional bilinear $g : V \times V \to \mathbb{R}$, é denotada G e é definida como se segue.

Definição 4.10. *(Produto Interno) Seja G a generalização do produto interno para espaços $\Lambda_p(V)$. Define-se $G : \Lambda_p(V) \times \Lambda_p(V) \to \mathbb{R}$ como*

$$G(v_1 \wedge ... \wedge v_p, u_1 \wedge ... \wedge u_p) = (v^p \wedge v^{p-1} \wedge ... \wedge v^1) \rfloor (u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_p).$$

Para casos onde haja espaços Λ_p e Λ_q com $p \neq q$ define-se $G(A_{[p]}, B_{[q]})$ como

$$G(A_{[p]}, B_{[q]}) = 0, \quad p \neq q.$$

Dentro da álgebra de Grassmann é possível definir-se o isomorfismo (dual) de Hodge (representado por $\star$).

Definição 4.11. *(Isomorfismo de Hodge) Seja $A_{[}p]$ um p-vetor sobre um espaço vetorial V de dimensão n. Define-se o dual de Hodge como a operação*

$$\star A_{[p]} = (-1)^{p(p-1)/2} A_{[p]} \rfloor \Omega_v, \tag{21}$$

onde Ω_v representa um n-vetor simples unitário($1e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n$).

Teorema 4.1. *Um resultado importante obtido usando o isomorfismo de Hodge é*

$$v \times u = \star(v \wedge u); v, u \in \mathbb{R}^3 \tag{22}$$

Demonstração 4.1. *Como u e v pertencem a $\mathbb{R}^3$, eles podem ser escritos como*

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 \\ v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \end{aligned},$$

em que (e_1, e_2, e_3) formam a base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Usando a associatividade do produto exterior, temos que

$$\begin{aligned} v \wedge u = v_1 u_1 e_1 \wedge e_1 + v_1 u_2 e_1 \wedge e_2 + v_1 u_3 e_1 \wedge e_3 \\ + v_2 u_1 e_2 \wedge e_1 + v_2 u_2 e_2 \wedge e_2 + v_2 u_3 e_2 \wedge e_3 \, . \\ + v_3 u_1 e_3 \wedge e_1 + v_3 u_2 e_3 \wedge e_2 + v_3 u_3 e_3 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Com o auxílio das equações (17) é possível mostrar que $\mathbf{e_i} \wedge \mathbf{e_i} = 0$ e, usando a anticomutatividade do produto externo, a equação anterior se reduz a

$$\begin{aligned} v \wedge u = (v_1 u_2 - u_1 v_2) e_1 \wedge e_2 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) e_1 \wedge e_3 \\ + (v_2 u_3 - u_2 v_3) e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

Usando novamente a equação (17), chegamos a

$$v \wedge u = (v_1 u_2 - u_1 v_2) e_1 e_2 + (v_1 u_3 - u_1 v_3) e_1 e_3 + (v_2 u_3 - u_2 v_3) e_2 e_3.$$

Aplicando agora o isomorfismo de Hodge no primeiro termo na equação com $\Omega = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ e usando $e^i \rfloor e_j = e^i(e_j) = \delta^i_j$, obtém-se o resultado desejado

$$\star(v \wedge u) = (v_1u_2 - u_1v_2)\mathbf{e_3} + (v_1u_3 - u_1v_3)\mathbf{e_2} + (v_2u_3 - u_2v_2)\mathbf{e_1} = v \times u$$

5 Álgebra de Clifford

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ equipado com uma forma bilinear simétrica g, $\mathbb{A}$ uma álgebra associativa com unidade $1_{\mathbb{A}}$ e γ uma aplicação linear $\gamma : V \to \mathbb{A}$. Definimos uma álgebra de Clifford (Cl) como

Definição 5.1. *(Álgebra de Clifford) Uma álgebra de Clifford é o par($\mathbb{A}$,γ) para o espaço quadrático(V,g) quando $\mathbb{A}$ é gerada como uma álgebra por $\{\gamma(v)|v \in V\}$ com γ satisfazendo*

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = 2g(v,u)1_A$$

Para todo $v,u \in V$.

Considerando uma base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ em V na álgebra de Clifford($\mathbb{A}$,γ) para (V,g) temos:

$$\gamma(e_i)\gamma(e_j) + \gamma(e_j)\gamma(e_i) = 0 \Longleftrightarrow i \neq j$$
$$\gamma(e_i)^2 = Q(e_i)1_A = q(e_i, e_i)1_A$$

Tem-se então que $\mathbb{A}$ é gerada pelos produtos da forma

$$\mathbb{A} = spam(\gamma(e_1)^{\mu_1}\gamma(e_2)^{\mu_2}...\gamma(e_n)^{\mu_n}|\mu_i = 0,1)$$

Como o número de elementos da forma $\gamma(e_1)^{\mu_1}\gamma(e_2)^{\mu_2}...\gamma(e_n)^{\mu_n}$ com $\mu_i = 0,1$ é 2^n a dimensão de $\mathbb{A}$ é $dim\mathbb{A} \leq 2^n$. A álgebra de Clifford($\mathbb{A}$,γ) para o espaço quadrático(V,g) é chamada de universal quando $dim\mathbb{A} = 2^n$ e é denotada $Cl(V,g)$ ou $Cl(V)$. É feita uma simplificação na anotação de $\gamma(e_i)$ para γ_i para $\mathbf{e_i}$.

5.1 Produto de Clifford

Na álgebra de Clifford foi definido um produto geométrico. Nesse produto geométrico estão simultaneamente presentes o produto interno(contração) e o produto exterior.

Definição 5.2. *Sejam v e u vetores $\in \mathbb{R}^n$ definimos o produto geométrico como:*

$$vu = v \wedge u + v \rfloor u \tag{23}$$

Como a álgebra de Clifford e construída em cima da álgebra de Grassmmann temos que os elementos multivetoriais da álgebra exterior também estão presentes na álgebra geométrica, pode-se então generalizar a definição de produto geométrico para:

Definição 5.3. *Sejam $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor e $A_{[p]} \in \Lambda(\mathbb{R})$ um p-vetor definimos o produto geométrico como:*

$$vA_{[p]} = v \wedge A_{[p]} + v \rfloor A_{[p]}$$

O produto geométrico goza de propriedades como a associatividade, proveniente do produto exterior de Grassmann, e da invertibilidade, proveniente do produto da álgebra Hamiltoniana.

5.2 Espaços $\mathbb{R}^{p,q}$

Definição 5.4. *Um espaço $\mathbb{R}^{p,q}$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais com dimensão $dim\mathbb{R}^{p,q} = n = p+q$ cujo o produto interno das bases $g(e_i, e_i) = 1$ com $i = (1,2,...,p)$ e $g(e_j, e_j) = -1$ com $j = (p+1, p+2, ..., n)$.*

Uma álgebra de Clifford sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^{p,q}$ é chamada de $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$. Um elemento de $Cl_{p,q}(\mathbb{R})$ é formado por qualquer combinação das bases.

Exemplo 5.1. *Seja $p = 2$ e $q = 1$ um elemento(Ψ) de $Cl_{2,1}(\mathbb{R})$ é da forma:*

$$\Psi = \alpha + a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + a_3\mathbf{e_3} + a_{1,2}\mathbf{e_1e_2} + a_{1,3}\mathbf{e_1e_3} + a_{2,3}\mathbf{e_2e_3} + a_{2,1}\mathbf{e_2e_1} + a_{3,1}\mathbf{e_3e_1}$$

$$+a_{3,2}\mathbf{e_3e_2} + a_{3,2}\mathbf{e_3e_2} + a_{1,2,3}\mathbf{e_1e_2e_3}$$

Fazendo uso da equação (23) fica claro que $\mathbf{e_ie_j} = -\mathbf{e_je_i}$ e $\mathbf{e_ie_i} = \pm 1$. É possível então reorganizar os termos de forma a simplificar a equação.

$$Cl_{2,1} \ni \Psi = \alpha + b_1\mathbf{e_1} + b_2\mathbf{e_2} + b_3\mathbf{e_3} + b_{1,2}\mathbf{e_1e_2} + b_{1,3}\mathbf{e_1e_3} + b_{2,3}\mathbf{e_2e_3} + b_{1,2,3}\mathbf{e_1e_2e_3}$$

Onde o termo $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{j,i}$.

5.3 Operador Nabla(∇) e Operador $\mathcal{D}$

O operador Nabla é um operador construído por derivadas parciais e vetores de base ortonormais, ele é definido como:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{e_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

O operador Nabla só tem sentido quando atua em funções diferenciáveis.
Com o operador nabla definido, é possível definir um segundo operador($\mathcal{D}$) como:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \tag{24}$$

Esse operador $\mathcal{D}$ tem papel fundamental no eletromagnetismo. Ele é usado para representar as equações de Maxwell na forma tensorial.

5.4 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell juntamente com a lei da força de Lorentz representam o eletromagnetismo clássico, elas são:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

5.5 Equações de Maxwell em $Cl_{3,0}(V)$

Olhando para as equações de Maxwell nota-se a presença dos operadores diferenciais rotacional e divergente além da derivada temporal. E de se esperar que seja possível representar as equações de Maxwell na álgebra de Clifford por meio do operador $\mathcal{D}$, pois segundo as equações (19, 22, 23) é possível representar o produto interno e o produto vetorial na álgebra de Clifford.

Olhando para as equações de Maxwell em $\mathbb{R}^3$ nota-se que os operadores diferenciais estão sendo aplicados em dois vetores, o vetor do campo elétrico $\vec{E}$ e o vetor do campo magnético $\vec{B}$. Define-se então um novo vetor $\mathcal{F}$ como a soma do campo elétrico com o campo magnético.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c}\vec{E} + \vec{B}$$

Onde os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser escritos como:

$$\vec{E} = E_1\mathbf{e_1} + E_2\mathbf{e_2} + E_3\mathbf{e_3}$$

$$\vec{B} = B_1\mathbf{e_1} + B_2\mathbf{e_2} + B_3\mathbf{e_3}$$

Aplicando então o operador $\mathcal{D}$ no vetor $\mathcal{F}$ obtém-se:

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}\right)\left(\frac{1}{c}\vec{E} + \vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} + \frac{1}{c}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c}\nabla \rfloor \vec{E} + \nabla \wedge \vec{B} + \nabla \rfloor \vec{B} \tag{25}$$

Onde já foi usado o fato de que a contração de um escalar é zero para a contração do operador $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$.

O primeiro termo do lado direto é a contração de um vetor por um escalar, o que resulta apenas na aplicação da derivada temporal no vetor campo elétrico.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\wedge\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{26}$$

O termo $\nabla\rfloor\vec{E}$ resulta em:

$$\nabla\rfloor\vec{E}=\frac{\partial E_1}{\partial x_1}\mathbf{e^1}\rfloor\mathbf{e_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}\mathbf{e^2}\rfloor\mathbf{e_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\mathbf{e^3}\rfloor\mathbf{e_3}=\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}=\nabla\cdot\vec{E} \tag{27}$$

O termo $\nabla\wedge\vec{E}$ é o produto exterior de dois vetores que resulta

$$\nabla\wedge\vec{E}=\frac{\partial E_1}{\partial x_2}e_2\wedge e_1+\frac{\partial E_1}{\partial x_3}e_3\wedge e_1+\frac{\partial E_2}{\partial x_1}e_1\wedge e_2+\frac{\partial E_2}{\partial x_3}e_3\wedge e_2+\frac{\partial E_3}{\partial x_1}e_1\wedge x_3+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}e_2\wedge e_3$$

Usando a anticomutatividade do produto exterior (equação 17) obtém-se.

$$\nabla\wedge\vec{E}=(\nabla\times\vec{E})\Omega_v \tag{28}$$

Olhando para o termo $\nabla\wedge\vec{B}$ temos:

$$\nabla\wedge\vec{B}=\frac{\partial B_2}{\partial x_1}\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_1}\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_3}+\frac{\partial B_1}{\partial x_2}\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_1}+\frac{\partial B_3}{\partial x_2}\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}+\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_2}$$

Comparando o resultado acima com a equação(22) possível chegar a conclusão de que há um problema na definição do vetor $\mathcal{F}$. O problema aparece ao tentar representar o produto vetorial pelo produto externo. Segundo a equação(22) é necessário que haja a aplicação do dual de Hodges no produto exterior para que ele seja igual ao produto vetorial.
Para arrumar esse problema muda-se a definição do vetor $\mathcal{F}$, define-se então $\mathcal{F}$ como o multivetor

$$\mathcal{F}=\frac{1}{c}\vec{E}+\vec{B}\Omega_v$$

Onde Ω_v é o $3-vetor$ unitário, $\Omega_v=\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}$.

Essa mudança e feita com o objetivo de obter um dual de Hodge nos termos contendo $\vec{B}$. Refazendo as contas com o novo multivetor $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{DF}=(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\nabla})(\frac{1}{c}\vec{E}+\vec{B}\Omega_v)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\wedge\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\wedge\vec{B}\Omega_v+\frac{1}{c}\nabla\wedge\vec{E}+\frac{1}{c}\nabla\rfloor\vec{E}+\nabla\wedge\vec{B}\Omega_v+\nabla\rfloor\vec{B}\Omega_v \tag{29}$$

Os termos contendo $\vec{E}$ não foram alterados, assim o primeiro, o terceiro e o quinto termo da equação (29) não foram modificados, então as equações(26,27,28) ainda são validas.

Abrindo o termo $\vec{B}\Omega_v$

$$\vec{B}\Omega_v=\vec{B}\wedge\Omega_v+\vec{B}\rfloor\Omega_v$$

Como Ω_v é composto do produto exterior das bases qualquer que seja o termo de $\vec{B}$ é possível mudar a ordem dos termos de modo a ter $\mathbf{e_i} \wedge \mathbf{e_i}$ que é zero

$$B_1(\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_1}) \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} = 0$$

$$-B_2(\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_2}) \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_3} = 0$$

$$B_3(\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_3}) \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} = 0$$

Então $\vec{B} \wedge \Omega_v = 0$. Resolvendo a parte da contração.

$$\vec{B} \rfloor \Omega = B_1(\mathbf{e^1} \rfloor \mathbf{e_1}) \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} - B_2(\mathbf{e^2} \rfloor \mathbf{e_2}) \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_3} + B_3(\mathbf{e^3} \rfloor \mathbf{e_3}) \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}$$

Onde está sendo usado o fato de que as bases são ortogonais, ou seja, $\mathbf{e^i} \rfloor \mathbf{e_j} = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{i,j}$. O resultado final de $\vec{B}\Omega_v$ é:

$$\vec{B}\Omega_v = B_1\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} + B_2\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} + B_3\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}$$

Fazendo o produto exterior operador nabla com o resultado obtido acima chega-se na mesma situação do produto exterior de $\vec{B}$ com Ω_v, os resultados não nulos são:

$$\nabla \wedge \vec{B}\Omega_v = (\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3})\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} \tag{30}$$

Esse resultado pode ser reescrito como $(\nabla \cdot \vec{B})\Omega_v$.

Fazendo a contração do nabla pelo $2 - vetor\ \vec{B}\Omega_v$.

$$\nabla \rfloor \vec{B}\Omega_v = -\frac{\partial B_2}{\partial x_1}(\mathbf{e^1} \rfloor \mathbf{e_1}) \wedge \mathbf{e_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1}(\mathbf{e^1} \rfloor \mathbf{e_1}) \wedge \mathbf{e_2} + \frac{\partial B_1}{\partial x_2}(\mathbf{e^2} \rfloor \mathbf{e_2}) \wedge \mathbf{e_3}$$

$$-\frac{\partial B_3}{\partial x_2}(\mathbf{e^2} \rfloor \mathbf{e_2}) \wedge \mathbf{e_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3}(\mathbf{e^3} \rfloor \mathbf{e_3}) \wedge \mathbf{e_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3}(\mathbf{e^3} \rfloor \mathbf{e_3}) \wedge \mathbf{e_1}$$

Reorganizando os termos

$$\nabla \rfloor \vec{B}\Omega_v = (\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1})\mathbf{e_3} + (\frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3})\mathbf{e_2} + (\frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2})\mathbf{e_1}$$

Comparando o resultando obtido com o rotacional de um vetor chega-se a conclusão que:

$$\nabla \rfloor \vec{B}\Omega_v = -\nabla \times \vec{B} \tag{31}$$

De maneira análoga a equação(26), o produto exterior da derivada parcial pelo multivetor $\vec{B}\Omega_v$ resulta na aplicação da derivada no multivetor.

$$\frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B}\Omega_v = \frac{\partial \vec{B}\Omega_v}{\partial t} \tag{32}$$

Pegando os resultados obtidos nas equações(26,27,28,30,31,32) e separando por grau.
Para $0-vetor$ tem-se

$$\frac{1}{c}\nabla\rfloor\vec{E} = \frac{1}{c}\nabla\cdot\vec{E} \tag{33}$$

Para $1-vetor$ tem-se

$$-\nabla\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{34}$$

Para $2-vetor$ foi obtido:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}\Omega_V}{\partial t}+\frac{1}{c}(\nabla\times\vec{E})\Omega_v \tag{35}$$

E para $3-vetor$ obteve-se:

$$(\nabla\cdot\vec{B})\Omega_v \tag{36}$$

Olhando as equações (33,34,35,36) e comparando com as equações de Maxwell é possível chegar a conclusão que se definir um multivetor $\mathcal{J}$ como:

$$\mathcal{J} = \rho - \frac{1}{c}\vec{J}$$

Onde ρ é um escalar e $\vec{J}$ é um vetor de modo a fazer com que os termos $2-vetor$ e $3-vetor$ sejam iguais a zero. Temos que as quatro equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathcal{J} \tag{37}$$

5.6 Equações de Maxwell em $Cl_{1,3}(V)$

Sabe-se que as equações de Maxwell são invariantes por transformações de Lorentz, ou seja ao fazer uma mudança de coordenadas no espaço de Minkowski as equações de Maxwell se mantém. Por isso há um interesse em escrever as equações de Maxwell no espaço $\mathbb{R}^{1,3}$, normalmente se obtém as equações de Maxweel em $\mathbb{R}^{1,3}$ por meio de tensores. No nosso caso o interesse seria obter essas equações por meio da álgebra de Clifford.

Para escrever as equações de Maxwell em $Cl_{1,3}$ começa-se introduzindo dois $2-vetores$ e definindo o operador de Dirac.

O primeiro $2-vetor$ a ser introduzido é: $\mathbf{E} = \vec{E}\mathbf{e_0}$, já o segundo é : $\mathbf{B} = \vec{B}\mathbf{e_0}$. Como os vetores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são formados pelas bases $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ ao abrir o produto geométrico de clifford a parte da contração será zero pois $e^0\rfloor e_i = 0, i = 1,2,3$. Então o produto $\vec{E}\mathbf{e_0}$ resulta em:

$$\mathbf{E} = \vec{E}\mathbf{e_0} = E_1\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_0} + E_2\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_0} + E_3\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_0}$$

O mesmo se aplica ao produto $\vec{B}\mathbf{e_0}$

$$\mathbf{B} = \vec{B}\mathbf{e_0} = B_1\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_0} + B_2\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_0} + B_3\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_0}$$

O operador de Dirac(∂) é então redefinido como:

$$\partial = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})\mathbf{e_0} + \vec{\nabla}$$

Nota-se que a única diferença entre o operador de Dirac e o operador $\mathcal{D}$(equação 24) é que agora a derivada parcial temporal é um vetor.
Seguindo a mesma linha de raciocínio usada para colocar as equações de Maxwell na álgebra de Clifford $Cl_{3.0}$ define-se um multivetor $\mathcal{F}$ como:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c}\mathbf{E} - \Omega_v\mathbf{B}$$

Onde agora o termo Ω_v é um $4-vetor$ unitário, $\Omega_v = \mathbf{e_0}\wedge\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}$. Aplicando o operador de Dirac no multivetor $\mathcal{F}$.

$$\partial\mathcal{F} = (\mathbf{e_0}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla})(\frac{1}{c}\mathbf{E} - \Omega_v\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B} + \frac{1}{c}\nabla\mathbf{E} - \nabla\Omega_v\mathbf{B} \tag{38}$$

Todos os elementos de $\mathbf{E}$ são $2-vetores$ contendo o termo $\mathbf{e_0}$ então ao fazer o produto externo de $\mathbf{e_0}$ com $\mathbf{E}$ é sempre possível reorganizar os termos de modo a ficar com $\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{e_0} = 0$

$$\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{E} = -E_1(\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_1} = 0$$

$$\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{E} = -E_2(\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_2} = 0$$

$$\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{E} = -E_3(\mathbf{e_0}\wedge\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_3} = 0$$

A contração do $2-vetor$ $\mathbf{E}$ por $\mathbf{e_0}$ resulta em:

$$\mathbf{e^0}\rfloor\mathbf{E} = -E_1(\mathbf{e^0}\rfloor\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_1} - E_2(\mathbf{e^0}\rfloor\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_2} - E_3(\mathbf{e^0}\rfloor\mathbf{e_0})\wedge\mathbf{e_3}$$

Combinando os resultados obtidos para $\mathbf{e_0}\mathbf{E}$ chega-se a conclusão que o termo o primeiro termo do lado direito da equação (38) é um $1-vetor$.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{39}$$

O segundo termo do lado direito da equação (38) envolve o produto geométrico de $\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B}$, abrindo esse produto tem-se:

$$\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B} = \mathbf{e_0}\wedge(\Omega_v\mathbf{B}) + \mathbf{e_0}\rfloor(\Omega_v\mathbf{B}) \tag{40}$$

Abrindo o termo $\Omega_v\mathbf{B}$.

$$\Omega_v\mathbf{B} = \Omega_v\wedge\mathbf{B} + \Omega_v\rfloor\mathbf{B}$$

Análogo ao feito com o produto geométrico $\mathbf{e_0E}$, o produto externo $\Omega_v \wedge \mathbf{B}$ é nulo e a contração resulta em:

$$\Omega_v \rfloor \mathbf{B} = -B_1\Omega_v \rfloor (\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_1}) - B_2\Omega_v \rfloor (\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_2}) - B_3\Omega_v \rfloor (\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_3})$$

$$\Omega_v \rfloor \mathbf{B} = -B_1\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} - B_2\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} - B_3\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}$$

Voltando na expressão do produto geométrico de $\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B}$(equação 40)

$$\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B} = -B_1\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} - B_2\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} - B_3\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}$$

Onde a contração some pois não há termos com e_0 em $\Omega_v\mathbf{B}$.

Então o segundo termo da equação(38) gera um $3-vetor$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B} = -\frac{1}{c}(\frac{\partial B_1}{\partial t}\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\mathbf{e_0} \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2}) \tag{41}$$

Analisando $\frac{1}{c}\nabla\mathbf{E}$

$$\frac{1}{c}\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{c}(\nabla \wedge \mathbf{E} + \nabla \rfloor \mathbf{E})$$

A contração resulta em:

$$\nabla \rfloor \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1}\mathbf{e_0} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2}\mathbf{e_0} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\mathbf{e_0} = (\nabla \cdot \vec{E})\mathbf{e_0}$$

Para o produto exterior $\nabla \wedge \mathbf{E}$:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_0} + \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_0} + \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_0} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2}\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_0} +$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_0} + \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_0}$$

Reorganizando os termos

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = ((\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2})\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_0} + (\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1})\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_0}(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3})\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_0} \tag{42}$$

Então o produto geométrico $\frac{1}{c}\nabla\mathbf{E}$ resulta em um $1-vetor$ e em um $3-vetor$

$$\frac{1}{c}\nabla\mathbf{E} = \frac{1}{c}(\nabla \cdot \vec{E})\mathbf{e_0} + \frac{1}{c}\nabla \wedge \mathbf{E} \tag{43}$$

O ultimo termo da equação (38) é $\nabla\Omega_v\mathbf{B}$, colocando ele na representação geométrica de Clifford.

$$\nabla\Omega_v\mathbf{B} = \nabla \wedge (\Omega_v\mathbf{B}) + \nabla \rfloor (\Omega_v\mathbf{B})$$

Abrindo o produto exterior $\nabla \wedge (\Omega_v\mathbf{B})$

$$\nabla \wedge (\Omega_v\mathbf{B}) = -\nabla \wedge (B_1\mathbf{e_2} \wedge \mathbf{e_3} + B_2\mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e_1} + B_3\mathbf{e_1} \wedge \mathbf{e_2})$$

$$\nabla \wedge (\Omega_v \mathbf{B}) = -(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_1} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2})$$

$$\nabla \wedge (\Omega_v \mathbf{B}) = -(\nabla\cdot\vec{B})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}$$

Para a contração:

$$\nabla\rfloor(\Omega_v\mathbf{B}) = \frac{\partial B_1}{\partial x_2}\mathbf{e_3} - \frac{\partial B_1}{\partial x_3}\mathbf{e_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3}\mathbf{e_1} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1}\mathbf{e_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\mathbf{e_2} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2}\mathbf{e_1}$$

$$\nabla\rfloor(\Omega_v\mathbf{B}) = (\frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2})\mathbf{e_1} + (\frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1})\mathbf{e_2} + (\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_1})\mathbf{e_3}$$

$$\nabla\rfloor(\Omega_v\mathbf{B}) = -(\nabla\times\vec{B})$$

Então $\nabla\Omega_v\mathbf{B}$ é:

$$\nabla\Omega_v\mathbf{B} = -(\nabla\cdot\vec{B})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3} - (\nabla\times\vec{B}) \tag{44}$$

Substituindo as equações(39,41,42,43,44) na equação (38)

$$\partial\mathcal{F} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B} + \frac{1}{c}(\nabla\cdot\vec{E})\mathbf{e_0} + \frac{1}{c}\nabla\wedge\mathbf{E} + (\nabla\cdot\vec{B})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3} + (\nabla\times\vec{B})$$

As equações acima podem ser separadas em dois grupos. O primeiro grupo que vem do produto externo $\partial\wedge\mathcal{F}$

$$\partial\wedge\mathcal{F} = +(\nabla\cdot\vec{B})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3} + \frac{1}{c}(\nabla\wedge\mathbf{E}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e_0}\Omega_v\mathbf{B}$$

Comparando as equações desse grupo com as equações de Maxwell é possível chegar a conclusão que se $\partial\wedge\mathcal{F} = 0$ temos uma parte das equações de Maxwell:

$$(\nabla\cdot\vec{B})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3} = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{45}$$

$$(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2})\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_0} = -\frac{\partial B_3}{\partial t}\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_0}$$

$$(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1})\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_0} = -\frac{\partial B_2}{\partial t}\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_1}\wedge\mathbf{e_0}$$

$$(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3})\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_0} = -\frac{\partial B_1}{\partial t}\mathbf{e_2}\wedge\mathbf{e_3}\wedge\mathbf{e_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{46}$$

Esse primeiro grupo então é chamado de equação homogênea. O segundo grupo de equações são as que vem da contração $\partial \rfloor \mathcal{F}$

$$\partial \rfloor \mathcal{F} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}(\nabla \cdot \vec{E})\mathbf{e_0} + (\nabla \times \vec{B})$$

Comparando com o restante das equações de Maxwell é possível chegar a conclusão de que $\partial \rfloor \mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{J}$, onde $\mathbf{J}$ é um quadrivetor definido como:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{e_0} + \vec{j}$$

De modo a ter:

$$(\nabla \cdot \vec{E})\mathbf{e_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathbf{e_0} \tag{47}$$

$$(\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{j} \tag{48}$$

O segundo grupo de equações é chamado de equação não-homogênea. Tem-se então que as equações de Maxwell podem podem ser representadas em $Cl_{1,3}$ como:

$$\partial \mathcal{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{J} \tag{49}$$

Referências

[1] Coelho,U. F.; Lourenço, L. M. *Um corso de Álgebra Linear*. 3ª edição. São Paulo: EDUSP,2013. 263p

[2] Vaz Junior,J.; Junior, R.R. *Álgebras de Clifford e Espinores*. 1ª edição. São Paulo: Livraria da Física, 2012 . 248p

[3] Jancewicz,B. *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. ,1988. 428p

[4] Amado,C.R. *Aplicação da Álgebra Geométrica do Espaço-Tempo de Minkowski à Óptica Relativista*. 2009.127f.Dissertação(Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores) - Universidade Técnica De Lisboa, Universidade Técnica De Lisboa, Lisboa, 2009