

O Vácuo Quântico

WALESKA PRISCYLLA FLORENCIO DE MEDEIROS*

Instituto de Física, Universidade de Brasília

Resumo

Discute-se na presente pesquisa, a quantização do campo eletromagnético, enfatizando o estado de vácuo quântico e como este pode ser significativa através dos efeitos Casimir e Unruh.

Palavra-chaves: quantização do campo eletromagnético, vácuo quântico, efeito Casimir, efeito Unruh-Davies.

INTRODUÇÃO

A noção comum que associamos primeiramente a palavra ‘vácuo’ é a ausência absoluta de matéria [1]. Atualmente, somos levados a uma redefinição dessa noção pelos pressupostos da teoria quântica de campos, na qual a quantização do campo eletromagnético nos concede maneiras de lidar com vários fenômenos relacionados ao vácuo.

Neste processo, o campo eletromagnético modal de frequência ω se torna matematicamente equivalente a de um oscilador harmônico com mesma frequência e autovalores. A principal consequência segue na definição do estado de vácuo como sendo um estado que não possui fótons, mas, no entanto, possui uma quantidade de energia devida às flutuações estatísticas do valor esperado do quadrado dos campos.

Ao estender o procedimento de quantização para um campo de vários modos submetido ao espaço de um paralelepípedo, o número de modos permitidos se torna infinito e implica na densidade de energia no ponto zero de vácuo sendo também infinita. Entretanto, se duas placas paralelas perfeitamente condutoras e descarregadas forem trazidas até o seu interior, será requerida uma energia potencial cujo valor é a diferença entre duas quantidades infinitas, da qual é possível se obter um significado físico de valor finito mostrado em 1948, pelo físico holandês Hendrik B. G. Casimir, como o surgimento de uma força atrativa entre as placas.

A densidade de energia de vácuo é a mesma para todos os observadores em diferentes sistemas inerciais. No entanto, é diferente para observadores que se movem com uma aceleração *própria* constante pelo estado de vácuo; estes percebem a

*waleska182_@hotmail.com

si mesmos submetidos a um banho térmico. Este resultado foi obtido em 1976, por Bill Unruh ao concluir que a aceleração promove uma diferente interpretação para a flutuação quântica de campo no ponto zero.

Notação Relativística

O Operador d'alembertiano \square^2 é definido como

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} = \delta_\nu \delta_\nu \quad (1)$$

onde $\nu = (x, y, z, ict)$ é o quadri-vetor de deslocamento no espaço-tempo [2]. Em alguns casos é conveniente denotarmos $\tau = ct$.

I. OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

A hamiltoniana de um oscilador harmônico quântico (OHQ), o qual possui massa m e frequência ω , se mantém com o mesmo formato clássico

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \quad (2)$$

com exceção de P e Q que nesse caso representam os operadores momento e posição no espaço de Hilbert. [3][4]

Dois operadores não-hermitianos são definidos como:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P - im\omega Q) \quad (3)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(P + im\omega Q) \quad (4)$$

segue da regra de comutação canônica $[Q, P] = i\hbar^1$, o comutador entre eles

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (5)$$

Isolando os operadores P e Q nas equações (3)-(4) e usando a relação de comutação entre os operadores a e a^\dagger na equação (5), podemos escrever a expressão (2) como

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \equiv \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

¹Nessa fórmula, e nas demais apresentadas neste artigo, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π .

na qual os autovalores do operador $N \equiv a^\dagger a$ são os níveis de energia do oscilador harmônico n , com respectivo autovetores $|n\rangle$, descritos pela equação de autovalores

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (7)$$

Ao analisarmos o efeito do operador N nos kets $a|n\rangle$ e $a^\dagger|n\rangle$ é possível chegar nas seguintes equações:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (8)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (9)$$

por razão óbvia, a é chamado de operador de "aniquilação" e a^\dagger operador de "criação".

Da equação de autovalores para a Hamiltoniana

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (10)$$

obtemos os níveis de energia do oscilador harmônico

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (11)$$

no qual $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

II. CAMPOS

Nosso universo é composto por campos de matéria, nos quais os quanta são os férmions (ex. elétrons e quarks) e os bósons (ex. fótons e glúons). Todos esses campos possuem energia no ponto zero ou estado de vácuo do campo.

Nos concentraremos no campo de força eletromagnético, cujo quanta são os fótons. Pois este, quando quantizado, possui muitos aspectos que se aplicam à todas as teorias quânticas de campo.

III. QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

O primeiro passo para a quantização do campo eletromagnético é mostrar que esse campo modal é equivalente a um oscilador harmônico quântico. [4]

As equações de Maxwell para o campo livre, i.e. numa região livre de fontes e na condição de calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, são satisfeitas pelo potencial vetorial \mathbf{A} , escrito como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, que quando substituído nas equações de Maxwell resulta em

$$\square^2 \mathbf{A} = 0. \quad (12)$$

Assim, a solução para as equações de Maxwell no espaço livre pode ser obtida pela resolução da equação (12) para o potencial vetorial na condição de calibre de Coulomb, sujeita à apropriadas condições de contorno. Segue a solução monocromática dada pela separação de variáveis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \alpha(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}) \\ &= \alpha(0) e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \alpha^*(0) e^{i\omega t} \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (13)$$

na qual $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ satisfaz a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (14)$$

com $k = \omega/c$ e $\alpha(t)$ satisfazendo $\ddot{\alpha}(t) = -\omega^2 \alpha(t)$.

Através da equação (13), podemos escrever os campos vetoriais elétrico e magnético como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} = -\frac{1}{c} [\dot{\alpha}(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \dot{\alpha}^*(t) \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})] \quad (15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = \alpha(t) \nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \nabla \times \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Assumindo sem perda de generalidade que a função modal $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ é normalizada

$$\int d^3 \mathbf{r} |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})| = 1, \quad (17)$$

introduzindo as definições,

$$q(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) - \dot{\alpha}(t)] \quad (18)$$

$$p(t) = \frac{k}{\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) + \dot{\alpha}(t)] \quad (19)$$

e utilizando as equações (15)-(16) podemos obter a Hamiltoniana do campo $H = 1/8\pi \int d\mathbf{r}^3 (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ como

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (20)$$

Essa notação sugere que, como desejado, o nosso campo modal de frequência ω e massa unitária é matematicamente equivalente a um oscilador harmônico com a mesma frequência.

Quando passamos da teoria clássica para a quântica, os números $\alpha(t)$ e $\alpha^*(t)$ devem ser substituídos pelos operadores $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2} a(t)$ e $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2} a^\dagger(t)$ respectivamente, nas equações (13), (15)-(16), resultando na Hamiltoniana para o campo modal quantizado equivalente ao do (OHQ) na equação (6), com autovalores de energia dados pela equação (11).

O inteiro n é o número de fótons no campo modal, descrito pelo estado $|n\rangle$. Para $n = 0$, temos o estado de vácuo $|0\rangle$, definido como sendo o estado sem fótons, mas, no entanto, este possui uma energia de ponto zero cujo valor é $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

O valor esperado dos campos elétrico e magnético zera em todos os estados estacionários, inclusive no estado de vácuo, desde que $\langle n|a|n\rangle = 0$. Entretanto, o valor esperado para o quadrado desses é diferente de zero, calculado como exemplo para o campo elétrico através da equação (15) feito as devidas substituições para o caso quântico com os operadores $a(t)$ e $a^\dagger(t)$,

$$\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 4\pi\hbar\omega |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 n + \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0. \quad (21)$$

Segue como consequência, uma flutuação no estado de vácuo, existindo mesmo na ausência de qualquer fonte. Desse modo, a eletrodinâmica quântica (EDQ) prediz que o vácuo eletromagnético é um estado estacionário de campo com flutuações estatísticas dos campos elétrico e magnético.

I. O Campo no Espaço Livre

Um campo sem condições de contorno se encontra no espaço livre, neste caso, o número permitido de campos modais se torna infinito. [4]

A intensidade do campo para o espaço livre infinito $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$, da equação (21), deve satisfazer a equação de Helmholtz (14) e ser independente da posição para cada modo do campo. Essas condições são satisfeitas por $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = e_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, onde para satisfazer a condição de calibre de Coulomb,

$$\mathbf{k} \cdot e_{\mathbf{k}} = 0. \quad (22)$$

A fim de normalizarmos nossa função modal, como na equação (17), dividimos o espaço em cubos de volume $V = L^3$ e impomos ao campo a condição de contorno periódica

$$\mathbf{A}(x+L, y+L, z+L, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) \quad (23)$$

equivalente à

$$(k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad (24)$$

onde cada n pode assumir qualquer valor inteiro.

O artifício de introduzir as condições periódicas de contorno não possui consequência física se considerarmos L grande comparado com qualquer dimensão física do nosso interesse. Isso nos permite considerar o campo em qualquer um dos cubos imaginários e definir a função modal $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ satisfazendo as condições da equação de Helmholtz, transversalidade e normalização.

O vetor $e_{\mathbf{k}}$ é unitário, real e específica à polarização do campo modal. Pela equação (22) existe duas condições independentes na sua escolha. Assim a função modal pode ser definida como

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (25)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda e $\lambda = \{1, 2\}$ a polarização. Tornando o potencial vetorial da onda plana modal do campo na seguinte forma,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] e_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (26)$$

A condição (24) nos diz que existe um número infinito de ondas modais. A linearidade das equações de Maxwell nos permite escrever o potencial vetorial total no espaço livre como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] e_{\mathbf{k}\lambda}. \end{aligned} \quad (27)$$

Usando o fato de que

$$\int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'\lambda'}^*(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (28)$$

encontramos, assim como antes, a Hamiltoniana dos infinitos modos no espaço livre

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (29)$$

Essa é a Hamiltoniana para um número infinito de osciladores harmônicos desacoplados, assim, cada campo modal diferente é independente dos demais.

O estado estacionário do campo livre é caracterizado pelo conjunto de números de fótons $\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}$. O estado $\{|n_{\mathbf{k}\lambda}\}$ possui o número total de fótons $\sum_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}$, e energia

$$E = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (30)$$

O estado de vácuo $|vac\rangle$ do campo livre é definido como sendo o estado de menor energia em que $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0$, para todos os modos (\mathbf{k}, λ) . Esse estado de vácuo, assim como todos os estados estacionários do campo, é um autoestado da Hamiltoniana, mas não dos operadores dos campos elétrico e magnético. Isso nos leva aos valores não definidos dos campos no estado de vácuo, como discutido anteriormente, esses podem ser imaginados como flutuações sobre seus valores médios em torno do zero.

No processo em que um fóton é aniquilado (absorvido), pode-se imaginar que o fóton está fazendo uma transição para dentro do estado de vácuo. Similarmente, quando um fóton é criado (emitido), imagina-se que este está fazendo uma transição para fora do estado de vácuo. Não havendo um limite para tal, podemos supor que existe um número infinito de fótons no estado de vácuo com energia infinita.

Usando a equação (24), podemos fazer a seguinte substituição

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \sum_{\lambda} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3\mathbf{k} = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\lambda} \int d^3\mathbf{k}. \quad (31)$$

O ponto zero da densidade de energia se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}} &= \frac{2}{8\pi^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^3, \end{aligned} \quad (32)$$

usando a substituição (31) e a mudança de variável $\mathbf{k} = \omega_{\mathbf{k}}/c$, o fator multiplicativo 2 surge dos dois valores independentes na escolha de λ . A densidade espectral de energia do campo no vácuo é

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}. \quad (33)$$

No intervalo no qual a frequência varia de ω_1 para ω_2 , a densidade de energia é

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \rho_0(\omega) = \frac{h}{8\pi^2 c^3} (\omega_2^4 - \omega_1^4). \quad (34)$$

Esse valor pode ser bastante extenso, mesmo em regiões de baixas frequências no espectro. Na região ótica, por exemplo, de 400 nm à 700 nm, da equação (32) obtemos um valor por volta de $2,2 \times 10^{-5} \text{ J/cm}^3$.

IV. O EFEITO CASIMIR

Uma consequência do campo eletromagnético no ponto zero, mostrado por Casimir em 1948, é uma força atrativa entre duas placas planas perfeitamente condutoras e descarregadas. [4]

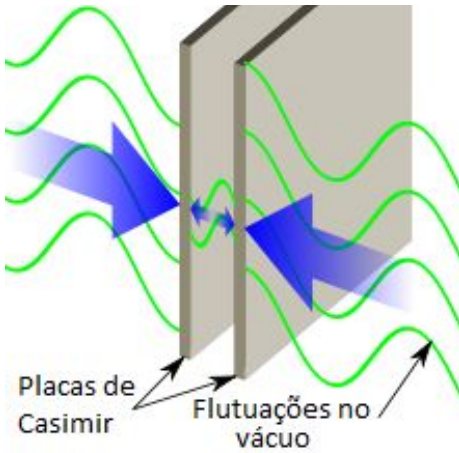


Figura 1: Duas placas paralelas e condutoras experimentam uma força atrativa devido a uma alteração no estado inicial do vácuo, sendo $L_z = d$ a distância entre as placas.

A situação física mostrada na figura 1 leva em consideração um conjunto modal limitado ao invés das ondas planas modais no espaço livre.

Consideramos primeiramente os modos apropriados no interior de um paralelepípedo retangular de lados $L_x = L_y = L$ e L_z , onde L_z é a distância entre as placas igual à d . Para paredes perfeitamente condutoras a função modal satisfazendo as condições de contorno, no qual a componente tangencial do campo elétrico se anula nas paredes são

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + A_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + A_z(\mathbf{r})\mathbf{k} \quad (35)$$

onde

$$A_x(\mathbf{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} a_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (36)$$

$$A_y(\mathbf{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} a_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \quad (37)$$

$$A_z(\mathbf{r}) = \left(\frac{8}{V}\right)^{1/2} a_z \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \quad (38)$$

com $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, $V = L^2 L_z$ e

$$k_x = \frac{l\pi}{L}, k_y = \frac{m\pi}{L}, k_z = \frac{n\pi}{L} \quad (39)$$

onde l, m e n são valores inteiros positivos e zero. Definimos funções de ondas modais que satisfazem a equação de Helmholtz (14) e transversais de acordo com a condição de calibre de Coulomb. Para satisfazer a última condição devemos ter

$$k_x a_x + k_y a_y + k_z a_z = 0 \quad (40)$$

que implica em

$$\frac{\pi}{L}(l a_x + m a_y) + \frac{\pi}{L}(n a_z) = 0, \quad (41)$$

indicando a existência de duas polarizações independentes, a menos que um dos inteiros l, m ou n seja nulo.

Essas funções modais também são ortogonais e satisfazem a condição de normalização (17),

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz [A_x^2(\mathbf{r}) + A_y^2(\mathbf{r}) + A_z^2(\mathbf{r})] = 1. \quad (42)$$

As frequências permitidas definidas pela condição (39) são

$$\omega_{lmn} = k_{lmn} c = \pi c \left[\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L^2} \right]^{1/2}, \quad (43)$$

portanto a energia no ponto zero de energia é

$$\sum_{l,m,n}' (2) \frac{1}{2} h \omega_{lmn} = \sum_{l,m,n} \pi h c \left[\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L^2} \right]^{1/2}, \quad (44)$$

o fator multiplicativo 2 surge das duas polarizações independentes dos modos e a linha no símbolo do somatório implica que o fator $\frac{1}{2}$ deve ser inserido se um dos inteiros l, m ou n for zero.

Na situação física do efeito Casimir $L \gg L_z$, onde $L_z = d$, nos permitindo fazer a seguinte substituição na equação (44): $\sum_{lmn} \rightarrow \sum_n' \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \int \int dk_x dk_y$, tornando a energia no ponto zero como

$$E(d) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 (hc) \sum_n' \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2}\right)^{1/2}, \quad (45)$$

mostra que se trata de um valor infinito, e permanece sendo para qualquer volume finito.

Se d for arbitrariamente grande, a soma sobre n também pode ser substituída por uma integral

$$E(\infty) = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 (hc) \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (46)$$

que também é um valor infinito.

A energia potencial do sistema requerida para trazer as placas de uma longa separação para a separação d é

$$U(d) = E(d) - E(\infty), \quad (47)$$

tratando-se da diferença de duas quantidades infinitas na qual pode-se obter uma medida física de valor finito.

Realizamos uma transformação para as coordenadas polares e introduzimos uma função de corte na frequência 'cutoff' $f(k) = f([u^2 + k_z^2]^{1/2})$, tal que $f(k) = 1$ para $k \ll k_m$ e $f(k) = 0$ para $k \gg k_m$ na equação (47). A função de corte é necessária pelo requerimento das paredes das placas serem perfeitamente condutoras se desfazerem com comprimentos de ondas pequenos comparados com as dimensões atômicas, com isso podemos assumir que $k_m \approx \frac{1}{a_0}$, onde a_0 é o raio de Bohr.

Assim,

$$U(d) = \left(\frac{\pi^2 hc}{4d^3}\right) L^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dx (x+n^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x+n^2]^{1/2}\right) - \int_0^\infty d\kappa \int_0^\infty dx (x+\kappa^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x+\kappa^2]^{1/2}\right) \right] \quad (48)$$

utilizando as variáveis de integração $x = u^2 d^2 / \pi^2$ e $\kappa = k_z d / \pi$. Se definimos

$$F(k) \equiv \int_0^\infty dx (x+\kappa^2)^{1/2} f\left(\frac{\pi}{d}[x+\kappa^2]^{1/2}\right), \quad (49)$$

obtemos

$$U(d) = \left(\frac{\pi^2 hc}{4d^3}\right) L^2 \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) \right]. \quad (50)$$

De acordo com a fórmula de Euler-Maclaurin,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) \dots \quad (51)$$

para $F(\infty) \rightarrow 0$. Realizando as derivadas, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{4}{720}, \quad (52)$$

resultando em,

$$U(d) = -\left(\frac{\pi^2 hc}{720d^3}\right) L^2 \quad (53)$$

que é finito e independente da função 'cutoff'.

Utilizando $F(d) = -\nabla U(d)$, obtemos a força atrativa por unidade de área entre as placas como

$$F(d) = -\frac{\pi^2 hc}{240d^4}. \quad (54)$$

Esta é a força de Casimir, que se refere à mudanças no ponto zero de energia no campo eletromagnético infinito, podendo ser finita e observável.

V. O EFEITO UNRUH-DAVIES

Um átomo se movendo com velocidade constante v , através de um campo térmico, experimenta uma força de fricção $F = -Rv$, no qual R é proporcional a $\rho(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{d\rho}{d\omega}$. No estado de vácuo, temperatura igual à zero, temos pela equação (33) $\rho(\omega) = \rho_0(\omega) = h\omega^3 / 2\pi^2 c^3$, que nos permite escrever,

$$\rho_0(\omega) - \frac{\omega}{3} \frac{d\rho_0}{d\omega} = 0 \quad (55)$$

implicando na não existência de uma força de fricção agindo sobre um átomo que se move com velocidade uniforme pelo estado de vácuo. Como consequência, um observador se movendo com velocidade constante

pele estado de vácuo eletromagnético, não pode dizer que está em movimento. [4]

Entretanto, um observador que se move com uma aceleração *própria* constante pelo estado de vácuo, vê a si mesmo em um banho térmico com temperatura $T = \hbar a / 2\pi\kappa c$, onde a é a sua aceleração com respeito ao sistema inercial instantâneo no qual o vácuo se encontra em repouso. Este resultado foi obtido por Unruh em 1976 seguido de um resultado próximo mostrado por Davies em 1975.

I. Aceleração Uniforme

Definimos a aceleração uniforme de um observador em relação a um sistema inercial instantâneo, no qual o observador se encontra em repouso. A aceleração *própria* a é relativa a esse sistema, e se a for constante a aceleração é uniforme. A linha de mundo é uma hipérbole no plano $x - t$ com assintótica $x = ct$. [2][4]

Usando a transformação de Lorentz, podemos relacionar a aceleração *própria* a com a aceleração do sistema inercial $\frac{dv}{dt}$,

$$\frac{dv}{dt} = a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}. \quad (56)$$

Prosseguindo com integrações, obtemos:

$$v(t) = at \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (57)$$

$$x(t) = c^2 \left\{ a \left[\left(\frac{1 + a^2 t^2}{c^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{-1}, \quad (58)$$

onde v e x são assumidos iguais à zero quando $t = 0$. Substituindo a equação (57) na relação entre o intervalo de tempo do sistema inercial e o intervalo de tempo próprio do observador:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (59)$$

obtemos,

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (60)$$

cuja integração nos leva a

$$t(\tau) = \frac{c}{a} \operatorname{senh} \frac{a\tau}{c}, \quad (61)$$

onde $t(\tau = 0) = 0$.

Substituindo a equação (61) nas equações (57)-(58), encontramos os valores de x e v no sistema inercial em termos do tempo próprio τ ,

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \left[\cosh \frac{a\tau}{c} - 1 \right] \quad (62)$$

$$v(\tau) = c \operatorname{tanh} \frac{a\tau}{c}. \quad (63)$$

II. Campo Escalar

O efeito Unruh será demonstrado para o caso de um campo escalar sem massa $\phi(\mathbf{x}, t)$, cujo resultado é o mesmo para o campo eletromagnético, porém o primeiro é mais simples de ser demonstrado.[4]

Esse campo deve satisfazer a equação de onda $\square^2 \phi = 0$ e possuir uma densidade de energia $\frac{1}{8\pi} \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\delta \phi^2}{\delta t} \right]$. Quando quantizado no espaço livre, possui uma forma similar à equação (27),

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (64)$$

onde novamente foi assumido as condições periódicas de contorno e $a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$. A Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} \int dx^3 \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\delta \phi^2}{\delta t} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

A princípio consideraremos a função de correlação $\langle \phi(0, t) \phi(0, t + \tau) \rangle$, em um ponto fixo no espaço, para um campo em equilíbrio térmico com temperatura T . Nesse caso, teremos $\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(0) a_{\mathbf{k}'}(0) \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^3 \bar{n}(\omega)$, onde $\bar{n}(\omega) \equiv (e^{\hbar\omega/\kappa\tau} - 1)^{-1}$. Isso implica que modos diferentes do campo termal não são correlacionados e que a frequência modal ω possui um número médio de quanta $\bar{n}(\omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} &\langle \phi(0, t) \phi(0, t + \tau) \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right) \left[\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}}(t + \tau) \rangle \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}}(t + \tau) \rangle \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right) [(\bar{n}(\omega_{\mathbf{k}}) + 1) e^{i\omega_{\mathbf{k}} \tau} + \bar{n}(\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} \tau}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{h}{\pi c} \left[\int_0^\infty d\omega \omega e^{i\omega\tau} + 2 \int_0^\infty \frac{d\omega \omega \cos\omega\tau}{e^{h\omega/\kappa\tau} - 1} \right] \\ & = -\frac{h}{\pi c} \left(\frac{\pi\kappa T}{h} \right)^2 \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi\kappa T\tau}{h} \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Agora vamos considerar a função de correlação $\langle \phi(y, t)\phi(y+x, t+\tau) \rangle_0$ no estado de vácuo do nosso campo escalar, onde, nesse caso $\langle a_{\mathbf{k}}(0)a_{\mathbf{k}'}(0) \rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger(0)a_{\mathbf{k}'}(0) \rangle = 0$ e $\langle a_{\mathbf{k}}(0)a_{\mathbf{k}'}^\dagger(0) \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$, pela equação (64) temos

$$\begin{aligned} \langle \phi(y, t)\phi(y+x, t+\tau) \rangle_0 &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}\tau} \\ & \rightarrow \frac{\hbar c^2}{4\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \kappa^2 \omega^{-1} e^{i\omega\tau} \int d\Omega_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ & = \frac{\hbar c}{\pi} \frac{1}{x^2 - c^2\tau^2}. \end{aligned} \quad (67)$$

A função de correlação $\langle \phi(x_1(t_1))\phi(x_2(t_2)) \rangle_0$, medida por um observador sofrendo uma aceleração uniforme no estado de vácuo, é dada pela equação (67), com $x = x_2 - x_1$ e $\tau = \tau_2 - \tau_1$, ou através das equações (61)-(62),

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\operatorname{senh} \frac{a\tau_2}{c} - \operatorname{senh} \frac{a\tau_1}{c} \right] \quad (68)$$

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \left[\operatorname{cosh} \frac{a\tau_2}{c} - \operatorname{cosh} \frac{a\tau_1}{c} \right]. \quad (69)$$

Assim, podemos obter o denominador da equação (67) como

$$\begin{aligned} x^2 - c^2\tau^2 &= \frac{c^4}{a^2} \left[\operatorname{cosh} \frac{a\tau_2}{c} - \operatorname{cosh} \frac{a\tau_1}{c} \right]^2 \\ & - \frac{c^4}{a^2} \left[\operatorname{senh} \frac{a\tau_2}{c} - \operatorname{senh} \frac{a\tau_1}{c} \right]^2 \\ & = -\frac{4c^4}{a^2} \operatorname{senh}^2 \frac{a(\tau_2 - \tau_1)}{2c}, \end{aligned} \quad (70)$$

tornando-a

$$\langle \phi(x_1(t_1))\phi(x_2(t_2)) \rangle_0 = -\frac{\hbar a^2}{4\pi c^3} \operatorname{csch}^2 \frac{a(\tau_2 - \tau_1)}{2c}, \quad (71)$$

a qual é equivalente a função de correlação do campo térmico, representado pela equação (66) com temperatura

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi\kappa c} \quad (72)$$

Como consequência, um detector que se move com aceleração uniforme pelo estado de vácuo responde como se estivesse num banho térmico com temperatura expressada pela equação (72).

VI. CONCLUSÃO

Na física moderna, o vácuo no sentido de espaço vazio é substituído por um estado de vácuo quântico com flutuações eletromagnéticas observáveis em diversas situações. Uma destas se deve a uma alteração nesse estado pela presença de duas placas metálicas resultando numa alteração do espectro de frequências de vibração do campo eletromagnético, no qual um valor finito pode ser extraído.

Um aspecto fortemente não-trivial de sua definição, como sendo um estado sem partículas, surge quando visto por um observador em um sistema de referencial acelerado, como em um banho térmico, tornando a ideia de estado de vácuo dependente do estado de movimento dos observadores envolvidos. Consequentemente, não é simples a definição do conceito de partícula elementar em espaços-tempos sem alguma simetria temporal, como é o caso do universo em expansão no qual vivemos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Clóvis Achy Soares Maia pela orientação no desenvolvimento deste artigo.

REFERÊNCIAS

- [1] Venicius M.; Farina C.; Tort A. *O Efeito Casimir*. Universidade Federal do Rio de Janeiro: Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 22, 2000.
- [2] Mould, R. A. *Basic Relativity*. New York: Springer-Verlag, Inc., 1994.
- [3] Greiner, W.; Reinhardt, J. *Field Quantization*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, Inc., 1996.
- [4] Milloni, P. W. *The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics*. New Mexico: Academic Press, Inc., 1994.